

DOI: 10.11779/CJGE202110014

# 考虑约束的贝叶斯概率反演方法

陶袁钦<sup>1</sup>, 孙宏磊<sup>\*2</sup>, 蔡袁强<sup>1, 2</sup>

(1. 浙江大学建筑工程学院, 浙江 杭州 310058; 2. 浙江工业大学土木工程学院, 浙江 杭州 310014)

**摘要:** 土体参数对岩土工程计算模型的预测效果至关重要。在土体参数识别问题中, 基于MCMC抽样的贝叶斯方法是一种反演土体参数概率分布的常见方法。然而该方法通常仅考虑土体参数的先验分布、预测与观测间的差异, 不考虑其他已知信息如土体参数间的经验性相互关系等, 当采用数值模拟作为计算模型时, 该方法计算负担大, 限制了其运用。为此, 提出了一种考虑附加约束信息的近似贝叶斯方法 REnKF-MDA, 并将其与无约束MCMC、考虑约束的MCMC、正则化集合卡尔曼滤波 REnKF 进行对比, 采用简单多项式算例和地基沉降案例说明该方法的有效性。结果表明: 融合附加约束信息有助于提高反演参数的合理性和可信度, 约束强弱由约束协方差决定。以考虑约束的MCMC为参考, REnKF可准确估计均值但显著低估了参数后验分布的不确定性, REnKF-MDA可同时合理地估计均值和不确定性。

**关键词:** 贝叶斯方法; 参数估计; 集合卡尔曼滤波; 约束信息; 数据融合

中图分类号: TU431

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2021)10-1878-09

**作者简介:** 陶袁钦(1995—), 女, 博士研究生, 主要从事岩土工程中的数据融合等方面的研究。E-mail: taoyuanqin@zju.edu.cn。

## Bayesian back analysis considering constraints

TAO Yuan-qin<sup>1</sup>, SUN Hong-lei<sup>2</sup>, CAI Yuan-qiang<sup>1, 2</sup>

(1. College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China; 2. College of Civil Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, China)

**Abstract:** Soil parameters significantly affect the prediction performance of geotechnical models. In the field of parameter identification, the MCMC-based Bayesian method is an effective way to infer the probability distribution of soil parameters. However, this method only considers the prior distribution of soil parameters and the difference between predictions and observations, without considering other additional information such as empirical correlations between soil parameters. In addition, the MCMC method leads to high computational cost if the numerical methods are used as the model, which limits its application. In this study, a new approximate Bayesian method considering the additional constraints is proposed, named REnKF-MDA. The proposed method is compared with the MCMC-based Bayesian method, MCMC-based Bayesian method with constraints, and REnKF. The effectiveness of the proposed REnKF-MDA method is illustrated by a simple polynomial case and a foundation settlement project. The results indicate that assimilating the additional constraint informations is helpful to improve the rationality and confidence of the inferred parameters. The confidence of the constraint is determined by the covariance of the constraint information. Taking the MCMC-based Bayesian method with constraints as a reference, the REnKF provides an accurate evaluation of the mean value, but significantly underestimates the uncertainty of the posterior distributions. In contrast, the REnKF-MDA estimates both the mean and uncertainty well.

**Key words:** Bayesian method; parameter identification; ensemble Kalman filter; constraint information; data assimilation

## 0 引言

岩土工程问题常采用各类计算模型进行预测, 而土体参数输入直接影响计算模型的预测效果。在实际工程中, 由于人力、时间、经济等成本的限制, 只能得到有限的土工试验数据, 难以获得土体参数的统计特征。因此, 国内外学者提出了基于观测数据来推断

岩土体参数的反演方法, 比如最大似然法<sup>[1]</sup>、贝叶斯

**基金项目:** 国家重点研发计划项目(2017YFE0119500, 2016YFC0800200); 国家自然科学基金项目(52078464, U2006225, 51620105008)

**收稿日期:** 2021-01-14

**\*通信作者** (E-mail: sunhonglei@zju.edu.cn)

方法<sup>[2-6]</sup>和智能优化算法(遗传算法<sup>[7-8]</sup>、差分进化算法<sup>[9]</sup>等)。其中, 贝叶斯方法可以有效融合先验信息和观测数据, 推断得到土体参数的概率分布, 为土体响应预测和可靠度分析提供输入信息。近年来, 基于马尔科夫链蒙特卡洛(Markov Chain Monte Carlo, MCMC)算法的贝叶斯方法在岩土工程中获得了广泛应用<sup>[10-12]</sup>。如郑栋等<sup>[3]</sup>利用勘探信息和沉降监测数据, 基于改进的 MCMC 算法更新土性参数的后验概率分布, 从而准确地预测路堤后续沉降。Li 等<sup>[13]</sup>和 Sun 等<sup>[14]</sup>利用多阶段监测数据, 反演推断岩石物理力学参数, 实现边坡开挖响应的更新预测。然而, 由于 MCMC 方法常需模拟  $10^{5-6}$  组样本, 若调用似然函数时以数值方法(如有限元、有限差分法)作计算模型, 将造成巨大的计算负担。在此情况下, 有学者提出采用计算成本相对较低的近似贝叶斯方法<sup>[15-16]</sup>来反演推断未知参数。

集合卡尔曼滤波<sup>[17]</sup>(ensemble Kalman filter, EnKF)是一种基于最大后验估计的近似贝叶斯方法, 近年来被初步应用于岩土问题中。例如, Hommels 等<sup>[18]</sup>利用 EnKF 方法和沉降数据更新了对土体杨氏模量的估计。Liu 等<sup>[19]</sup>采用 EnKF 方法估计了边坡的水力传导系数随机场, 从而更新边坡稳定性预测。Tao 等<sup>[20]</sup>基于 EnKF 时序融合沉降监测数据, 预测了路堤的长期累积变形。上述研究均采用了标准 EnKF 方法, 而为了使 EnKF 方法在非线性问题中实现更准确的估计, 学者们将迭代的思想引入其中<sup>[16]</sup>。其中, Emerick 等<sup>[21]</sup>提出基于多重数据融合的集合卡尔曼滤波(ensemble Kalman filter with multiple data assimilation, EnKF-MDA), 其基本思想是以递归形式考虑似然函数, 且在每一次融合中放大观测误差, EnKF-MDA 在非线性问题上表现优于 EnKF<sup>[22]</sup>。

岩土工程参数反演问题大多是不适定问题, 存在解不唯一、不稳定的现象。为了缓解不适定性和提高反演结果合理性, 需要收集和融合更多信息。在岩土工程实践中, 观测数据类型和数量往往有限, 但常存在其他已知信息, 比如土体物理力学性质的理论公式、土体参数取值的上下界、经验性的参数相互关系等。将这些既有信息作为约束条件融入贝叶斯方法, 有利于排除不合理的反演结果, 提高反演所得参数的可信度。一些学者已在考虑约束的贝叶斯方法上进行了初步探索, 如 Wang 等<sup>[23]</sup>在得到由 EnKF 更新的参数后, 将原问题转化为约束优化问题, 采用拉格朗日乘子法解得带硬约束的参数估计。Zhang 等<sup>[24]</sup>提出了正则化集合卡尔曼滤波(regularized ensemble Kalman filter, REnKF), 他们修改了 EnKF 中的更新步, 根据约束构

造惩罚函数并将其增加至目标函数, 从而实现了软约束的施加。Wu 等<sup>[25]</sup>构造了基于解对约束的适应度的似然函数, 提出了一种通用的考虑约束的贝叶斯框架。然而, 目前岩土工程中使用的贝叶斯方法主要通过融合观测数据来推断土体参数, 未利用这些既有约束信息。为了使得岩土体参数反演结果更合理和准确, 亟需发展一种能考虑附加约束信息的、适用于非线性问题的、且计算成本较低的反演方法。

本文首先简述了土体参数反演的常用贝叶斯方法和考虑约束的贝叶斯方法<sup>[25]</sup>, 接着提出了考虑附加约束信息的 REnKF-MDA(regularized ensemble Kalman filter with multiple data assimilation)方法, 依次介绍了该方法的基本思想、推导过程和计算步骤。通过算例对比了 MCMC, REnKF, REnKF-MDA 的反演效果, 最后将 REnKF-MDA 方法应用于地基沉降案例。

## 1 贝叶斯方法

### 1.1 土体参数的贝叶斯推断

岩土体作为一种天然材料, 受地质作用和复杂成因的影响, 具有不可避免的变异性。带有不确定性的土体参数  $\theta$  ( $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N]^T$ ) 常由随机变量来表征, 记系统物理状态(如沉降)为  $x_p$ , 计算模型为  $F(\cdot)$ , 则

$$x_p = F(\theta) \quad (1)$$

观测数据  $d$  可表示为

$$d = H(F(\theta)) + \epsilon \quad (2)$$

式中,  $H(\cdot)$  为观测函数, 旨在将状态空间转换到观测空间,  $\epsilon$  代表观测误差, 用均值为 0、协方差为  $R$  的高斯分布表示。

基于贝叶斯公式, 利用土体参数先验信息和观测数据, 土体参数的后验分布为

$$p(\theta | d) = kp(d | \theta)p(\theta) \quad (3)$$

式中,  $k$  代表归一化常数,  $p(\theta)$  是先验分布, 代表着尚未获得观测数据时对土体参数取值的认知,  $p(d | \theta)$  代表给定观测数据条件下, 土体参数  $\theta$  的似然函数, 其表达式为

$$p(d | \theta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{N_d} |R|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [d - HF(\theta)]^T R^{-1} [d - HF(\theta)] \right\} \quad (4)$$

式中,  $d$  为所有观测数据组成的向量或矩阵,  $N_d$  为观测点数量,  $R$  为观测数据  $d$  的协方差矩阵。

以上为反演推断土体参数的常用贝叶斯框架, 由于后验分布  $p(\theta | d)$  的解析解在大部分情况下难以

获得, 因此常采用 MCMC 方法产生大量等效样本来模拟土体参数  $\theta$  的后验分布。

## 1.2 考虑约束的贝叶斯方法

Wu 等<sup>[25]</sup>提出了考虑约束的贝叶斯方法, 他们将参数的约束条件看作一项附加的似然函数, 从而将约束信息融入 1.1 节中的原始贝叶斯框架。记土体参数  $\theta$  的附加约束条件  $G(\theta)$  为

$$G(\theta) = [f_1(\theta), f_2(\theta), \dots, f_{N_c}(\theta)] = \mathbf{0} \quad (5)$$

式中,  $f_i(\theta)$  ( $i=1, 2, \dots, N_c$ ) 为土体参数  $\theta$  服从的第  $i$  个约束函数,  $N_c$  为约束条件总个数,  $\mathbf{0}$  表示由元素 0 构成的向量。假设约束条件  $G(\theta)$  服从均值为  $\mathbf{0}$ 、协方差矩阵为  $C_c$  的正态分布, 则土体参数后验分布从式 (3) 演变式 (6), 约束项对应的似然函数  $p(G(\theta)|\theta)$  表达式见式 (7), 其中协方差矩阵  $C_c$  反映了约束的强弱程度。

$$p(\theta|d, G(\theta)) = k p(d|\theta) p(G(\theta)|\theta) p(\theta) \quad (6)$$

$$p(G(\theta)|\theta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{N_c} |C_c|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [G(\theta)]^T C_c^{-1} [G(\theta)] \right\} \quad (7)$$

岩土问题中的附加约束信息可分为等式和不等式约束两大类, 比如土体物理力学性质的理论公式通常为等式, 而土体参数经验关系可能为不等式。当约束为不等式约束条件时, 如  $f(\theta) < \mathbf{0}$ , 该约束对应的似然函数为

$$p(f(\theta)|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_c^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_c^2} [\max(0, f(\theta))]^2 \right\} \quad (8)$$

式中,  $\sigma_c$  为该约束的标准差。将式 (4), (7) 及先验分布代入式 (6) 可获得带约束的土体参数后验分布表达式, 然后与原始贝叶斯方法一样, 使用 MCMC 抽样来获得考虑约束作用下的土体参数的后验分布。在下文中, 为了简洁起见, 把土体参数的原始贝叶斯方法和后续的 MCMC 抽样简称为无约束 MCMC, 把考虑附加约束信息的贝叶斯方法和对应后验分布的 MCMC 抽样简称为考虑约束的 MCMC 方法。

## 2 REnKF-MDA 方法

### 2.1 基本原理

本文提出的 REnKF-MDA 方法是在 EnKF-MDA 方法<sup>[21]</sup>的基础上发展而来的、可以考虑附加约束信息的近似贝叶斯方法。假设先验信息、观测误差、约束条件服从高斯分布, 则参数的先验分布、观测数据的似然函数和约束对应似然函数有如下表达式:

$$p(\theta) \propto \exp \left( -\frac{1}{2} \|\theta - \bar{\theta}\|_{P^{-1}}^2 \right) \quad (9)$$

$$p(d|\theta) \propto \exp \left( -\frac{1}{2} \|d - H(F(\theta))\|_{R^{-1}}^2 \right) \quad (10)$$

$$p(G(\theta)|\theta) \propto \exp \left( -\frac{1}{2} \|G(\theta)\|_{C_c^{-1}}^2 \right) \quad (11)$$

则未知土体参数的后验分布:

$$p(\theta|d) \propto \exp \left( -\frac{1}{2} \|\theta - \bar{\theta}\|_{P^{-1}}^2 - \frac{1}{2} \|d - H(F(\theta))\|_{R^{-1}}^2 - \frac{1}{2} \|G(\theta)\|_{C_c^{-1}}^2 \right) \quad (12)$$

为了使上述后验分布概率最大, 等同于求土体参数  $\theta$  使如下目标函数  $J(\theta)$  最小:

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \|\theta - \bar{\theta}\|_{P^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \|d - H(F(\theta))\|_{R^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \|G(\theta)\|_{C_c^{-1}}^2 \quad (13)$$

在迭代型的 EnKF 算法中, 常将未知参数  $\theta$  与系统物理状态  $\mathbf{x}_p$  写在一起组成增广的系统状态  $\mathbf{x}$ , 即  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_p, \theta]^T$ , 包含  $M$  个样本的集合记为  $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^M$ 。对某一增广系统状态  $\mathbf{x}_{i,j}$ , 目标函数  $J(\mathbf{x}_{i,j})$  记为

$$J(\mathbf{x}_{i,j}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_{i,j} - \hat{\mathbf{x}}_{i,j}\|_{P^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \|d - H(\mathbf{x}_{i,j})\|_{R^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \|G(\mathbf{x}_{i,j})\|_{C_c^{-1}}^2 \quad (14)$$

式中, 符号  $\hat{\cdot}$  表示未经更新的增广系统状态, 下标  $i$  表示迭代步数, 下标  $j$  表示样本号,  $H(\cdot)$  为增广系统状态的观测函数。

已知 EnKF-MDA 采用递归的形式考虑似然函数<sup>[21]</sup>, 且每一次融合数据时放大观测误差, 避免在某一迭代步中过度修正。基于此思想, 原目标函数式 (14) 变换为

$$J(\mathbf{x}_{i,j}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_{i,j} - \hat{\mathbf{x}}_{i,j}\|_{P^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \|d + \sqrt{\alpha_i} \epsilon_{i,j} - H(\mathbf{x}_{i,j})\|_{(\alpha_i R)^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \|\sqrt{\beta_i} \epsilon_{i,j} - G(\mathbf{x}_{i,j})\|_{(\beta_i C_c)^{-1}}^2 \quad (15)$$

式中,  $\sum_{i=1}^{N_{\text{iter}}} (1/\alpha_i) = 1$ ,  $\sum_{i=1}^{N_{\text{iter}}} (1/\beta_i) = 1$ ,  $N_{\text{iter}}$  为迭代总次数, 在本文中  $\alpha_i$  和  $\beta_i$  简单取为  $N_{\text{iter}}$ 。值得注意的是, 不同于式 (2), 此式中  $d$  指不含观测误差的观测量, 即  $d = H(F(\theta))$ ,  $d + \sqrt{\alpha_i} \epsilon_{i,j}$  为包含放大误差的观测数据,  $\epsilon_{i,j}$  和  $\epsilon_{i,j}$  是均值为 0、协方差分别为  $R$  和  $C_c$  的高斯向量。

### 2.2 REnKF-MDA 的推导

本节的目标在于求得令式 (15)  $J(\mathbf{x}_{i,j})$  最小、后验分布概率最大的更新增广状态  $\mathbf{x}_{i,j}$ 。令  $\frac{\partial J(\mathbf{x}_{i,j})}{\partial \mathbf{x}_{i,j}} = 0$ , 得

$$P_i^{-1}(\mathbf{x}_{i,j} - \hat{\mathbf{x}}_{i,j}) + H'(\mathbf{x}_{i,j})^T (\alpha_i R)^{-1} (H(\mathbf{x}_{i,j}) - d - \sqrt{\alpha_i} \epsilon_{i,j}) + G'(\mathbf{x}_{i,j})^T (\beta_i C_c)^{-1} (G(\mathbf{x}_{i,j}) - \sqrt{\beta_i} \epsilon_{i,j}) = 0 \quad (16)$$

假设  $H(\mathbf{x}_{i,j})$  和  $H'(\mathbf{x}_{i,j})$  可近似为

$$H(\mathbf{x}_{i,j}) \approx H(\hat{\mathbf{x}}_{i,j}) + H'(\hat{\mathbf{x}}_{i,j})(\mathbf{x}_{i,j} - \hat{\mathbf{x}}_{i,j}), \quad (17a)$$

$$H'(\mathbf{x}_{i,j}) \approx H'(\hat{\mathbf{x}}_{i,j}) \quad (17b)$$

同理, 假设  $G(\mathbf{x}_{i,j})$  和  $G'(\mathbf{x}_{i,j})$  可近似为

$$G(\mathbf{x}_{i,j}) \approx G(\hat{\mathbf{x}}_{i,j}), \quad (18a)$$

$$G'(\mathbf{x}_{i,j}) \approx G'(\hat{\mathbf{x}}_{i,j}) \quad (18b)$$

将式 (17), (18) 代入式 (16), 整理得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i,j} &= \hat{\mathbf{x}}_{i,j} + (P_i^{-1} + H'(\hat{\mathbf{x}}_{i,j})^T (\alpha_i R)^{-1} H'(\hat{\mathbf{x}}_{i,j}))^{-1} H'(\hat{\mathbf{x}}_{i,j})^T \cdot \\ &(\alpha_i R)^{-1} (\mathbf{d} + \sqrt{\alpha_i} \epsilon_{i,j} - H(\hat{\mathbf{x}}_{i,j})) + (P_i^{-1} + H'(\hat{\mathbf{x}}_{i,j})^T \cdot \\ &(\alpha_i R)^{-1} H'(\hat{\mathbf{x}}_{i,j}))^{-1} G'(\hat{\mathbf{x}}_{i,j})^T (\beta_i C_c)^{-1} (\sqrt{\beta_i} \epsilon_{i,j} - G(\hat{\mathbf{x}}_{i,j})). \end{aligned} \quad (19)$$

记观测函数  $H(\bullet)$  的切线算子为  $H$ , 即  $H(\mathbf{x}_{i,j}) = H\mathbf{x}_{i,j}$ ,  $H'(\mathbf{x}_{i,j}) = H$ 。且为了表达式简洁, 省略观测函数和约束函数中的  $\hat{\mathbf{x}}_{i,j}$ , 得到

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i,j} &= \hat{\mathbf{x}}_{i,j} + \\ &P_i(I + H^T(\alpha_i R)^{-1} H P_i)^{-1} H^T(\alpha_i R)^{-1} (\mathbf{d} + \sqrt{\alpha_i} \epsilon_{i,j} - H\hat{\mathbf{x}}_{i,j}) + \\ &P_i(I + H^T(\alpha_i R)^{-1} H P_i)^{-1} G^T(\beta_i C_c)^{-1} (\sqrt{\beta_i} \epsilon_{i,j} - G). \end{aligned} \quad (20)$$

式 (20) 中, 等式右侧第二项为 EnKF-MDA 的卡尔曼修正项, 第三项为附加约束项。由于  $(I + H^T(\alpha_i R)^{-1} H P_i)^{-1} H^T = H^T(I + (\alpha_i R)^{-1} H P_i H^T)^{-1}$ , 对此式两边分别左乘  $(I + H^T(\alpha_i R)^{-1} H P_i)^{-1}$ , 右乘  $(I + (\alpha_i R)^{-1} \cdot H P_i H^T)^{-1}$ , 得到

$$H^T(I + (\alpha_i R)^{-1} H P_i H^T)^{-1} = (I + H^T(\alpha_i R)^{-1} H P_i)^{-1} H^T. \quad (21)$$

将式 (21) 代入式 (20) 中的第二项, 得式 (20) 卡尔曼修正项

$$\begin{aligned} &= P_i H^T(I + (\alpha_i R)^{-1} H P_i H^T)^{-1} (\alpha_i R)^{-1} (\mathbf{d} + \sqrt{\alpha_i} \epsilon_{i,j} - H\hat{\mathbf{x}}_{i,j}) \\ &= P_i H^T(\alpha_i R + H P_i H^T)^{-1} (\mathbf{d} + \sqrt{\alpha_i} \epsilon_{i,j} - H\hat{\mathbf{x}}_{i,j}). \end{aligned} \quad (22)$$

接着化简式 (20) 第三项, 基于 Woodbury 矩阵恒等式得

$$(I + H^T(\alpha_i R)^{-1} H P_i)^{-1} = I - H^T(\alpha_i R + H P_i H^T)^{-1} H P_i, \quad (23)$$

将式 (23) 代入式 (20) 的第三项中, 得

$$\begin{aligned} &式 (20) 约束项 = P_i G^T(\beta_i C_c)^{-1} (\sqrt{\beta_i} \epsilon_{i,j} - G) - \\ &P_i H^T(\alpha_i R + H P_i H^T)^{-1} H P_i G^T(\beta_i C_c)^{-1} (\sqrt{\beta_i} \epsilon_{i,j} - G) \\ &= (I - P_i H^T(\alpha_i R + H P_i H^T)^{-1} H) P_i G^T(\beta_i C_c)^{-1} (\sqrt{\beta_i} \epsilon_{i,j} - G). \end{aligned} \quad (24)$$

记修改的卡尔曼增益矩阵为

$$K'_i = P_i H^T(\alpha_i R + H P_i H^T)^{-1} \quad (25)$$

则化简后  $\mathbf{x}_{i,j}$  的表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i,j} &= \hat{\mathbf{x}}_{i,j} + K'_i(\mathbf{d} + \sqrt{\alpha_i} \epsilon_{i,j} - H\hat{\mathbf{x}}_{i,j}) + \\ &(I - K'_i H) P_i G^T(\beta_i C_c)^{-1} (\sqrt{\beta_i} \epsilon_{i,j} - G). \end{aligned} \quad (26)$$

## 2.3 REnKF-MDA 的计算步骤

REnKF-MDA 计算流程主要包含初始步、预测步

和更新步 3 个步骤。

(1) 初始步。基于先验分布, 采用随机抽样方法生成  $M$  组土体参数  $\theta$  的初始样本。

(2) 预测步。基于初始样本 (或上一轮更新步后获得的更新样本) 和计算模型, 预测得到下一迭代步  $i+1$  时的系统状态  $\hat{\mathbf{x}}_{i+1,j}$ :

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+1,j} = F(\mathbf{x}_{i,j}) \quad (27)$$

$M$  个增广预测向量构成预测集合  $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^M$ 。计算集合样本均值和协方差:

$$\bar{\mathbf{x}}_{i+1} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \hat{\mathbf{x}}_{i+1,j}, \quad (28)$$

$$P_{i+1} = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M (\hat{\mathbf{x}}_{i+1,j} \hat{\mathbf{x}}_{i+1,j}^T - \bar{\mathbf{x}}_{i+1} \bar{\mathbf{x}}_{i+1}^T) \quad (29)$$

(3) 更新步。基于式 (25) 计算修改的卡尔曼增益矩阵, 并将其代入式 (26) 计算得到更新状态。重复步骤 (2) 和步骤 (3) 直至收敛或达到预设的最大迭代次数。

值得说明的是, 此方法可以考虑的约束信息包括等式约束 (如算例一)、不等式约束及这两类约束的组合 (如算例二)。对于不等式约束, 当参数在不等式范围内, 约束函数  $G$  和梯度  $G'$  为 0 或零向量, 即更新式 (26) 中的右侧第三项 (即约束项) 无效; 当参数超过不等式限制时, 约束项生效。

## 3 算例一

本节以一简单多项式算例来说明本文所提出的 REnKF-MDA 方法的有效性。计算模型  $F(\bullet)$  见式 (30), 系统状态  $\mathbf{x}$  由输入参数  $\theta$  代入模型  $F(\bullet)$  中计算得到

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = F(\theta) = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_1 + \theta_2^3 \end{bmatrix} \quad (30)$$

观测量  $\mathbf{d}$  为

$$\mathbf{d} = H\mathbf{x} = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_1 + \theta_2^3 \end{bmatrix} \quad (31)$$

给定参数的虚拟真实值  $\theta = [0, \sqrt[3]{9}]$ , 则对应的虚拟观测量  $\mathbf{d} = 2\theta_1 + \theta_2^3 = 9$ , 假设观测误差为虚拟观测值的 5%, 假设  $\theta_1$  和  $\theta_2$  先验分布均为均值为 1、标准差为 1 的高斯分布, 既有约束信息为  $\theta_1 - \theta_2 + \sqrt[3]{9} = 0$ , 约束条件标准差为 1。反问题为已知观测数据, 反演未知参数  $\theta$ , 通过比较反演结果和虚拟真实值的差异来评价无约束 MCMC、考虑约束的 MCMC、REnKF 和 REnKF-MDA 的效果。其中, MCMC 抽样采用一种多链自适应差分演化 Metropolis 算法 (DREAM) [26], 设定 10 条马尔科夫链, 链长为 8000, 共计样本数  $8 \times 10^4$  个, 即调用似然函数中的计算模型  $8 \times 10^4$  次; 设定 REnKF 和 REnKF-MDA 方法的集合大小为 300,

迭代次数为 20, 共计调用计算模型 6000 次。此算例的目的—是对比有无附加信息对反演结果的影响, 二是证明本文提出的 REnKF-MDA 方法是否可以用较低的计算代价实现和带约束的 MCMC 相近的结果。

首先基于常用的不考虑约束信息的 MCMC 抽样来获得未知参数  $\theta$  的后验分布。图 1 给出了本算例的后验概率密度函数, 可见参数  $\theta_1$  和  $\theta_2$  的均值分别为 1.40 和 1.80, 与真实值 0 和 2.08 差异较大。然后将既有约束信息考虑在内, 分别采用考虑约束的 MCMC 抽样<sup>[25]</sup>、REnKF<sup>[24]</sup>和本文提出的 REnKF-MDA 方法反演未知参数, 得到的目标参数后验联合分布见图 2。对于  $\theta_1$  和  $\theta_2$  的均值, 有约束的计算结果明显向真实值靠拢, 但  $\theta_1$  的推断均值与其真实值仍有一定差距。对于参数方差, 有约束时的后验方差显著小于先验分布及无约束时的后验方差, 即推断的不确定性减小, 其中 REnKF 方法表征的不确定性显著低于作为参考值的 MCMC 方法, 而 REnKF-MDA 方法估计得到的参数后验联合概率密度函数和 MCMC 方法比较接近。

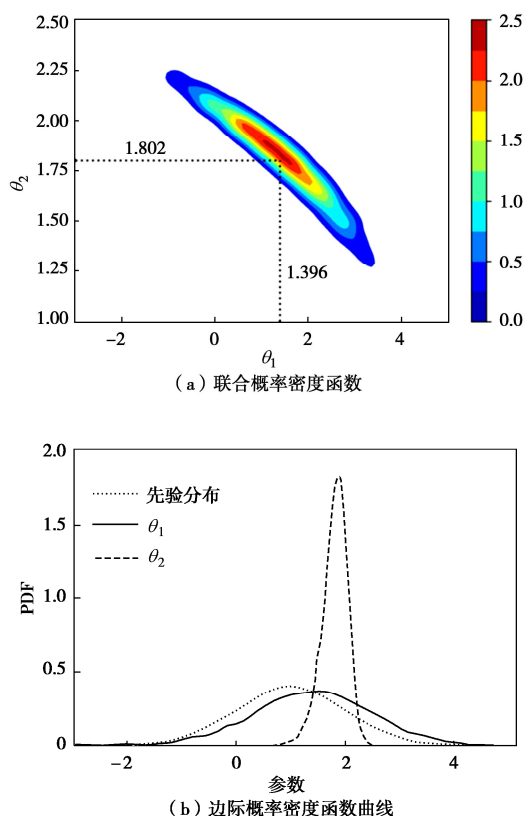


图 1 无约束时基于 MCMC 抽样获得的目标参数后验分布  
Fig. 1 Posterior distribution of target parameters obtained by unconstrained MCMC sampling

为了进一步研究约束信息强弱对反演结果的影响, 将约束条件的协方差从 1 减小到 0.1, 即该信息的可信度增强。图 3 给出了先验分布协方差  $P_0=[1, 0; 0, 1]$ , 约束协方差  $C_c=0.1$  条件下, 采用 3 种算法的反演

结果。对比图 2 和图 3 的对应子图, 可以看出约束信息可信度的提高显著降低了参数后验方差。如图 3 所示, 3 种算法得到  $\theta_1$  和  $\theta_2$  的均值和其真实值非常接近。以图 3 (a) 中 MCMC 反演结果作为参照, 可以看出图 3 (c) 中 REnKF 方法的反演结果集中在均值附近而低估了不确定性。对比图 3 (a) 和图 3 (b), 可以看出 REnKF-MDA 不仅可以准确估计均值, 还可以合理表征参数的不确定性。为了进一步显示 REnKF-MDA 结果的准确性, 图 4 给出了 MCMC 和 REnKF-MDA 的参数后验边际概率密度函数曲线, 可以看出 REnKF-MDA 所得曲线的峰值相对略低, 但总体来讲近似效果令人满意。

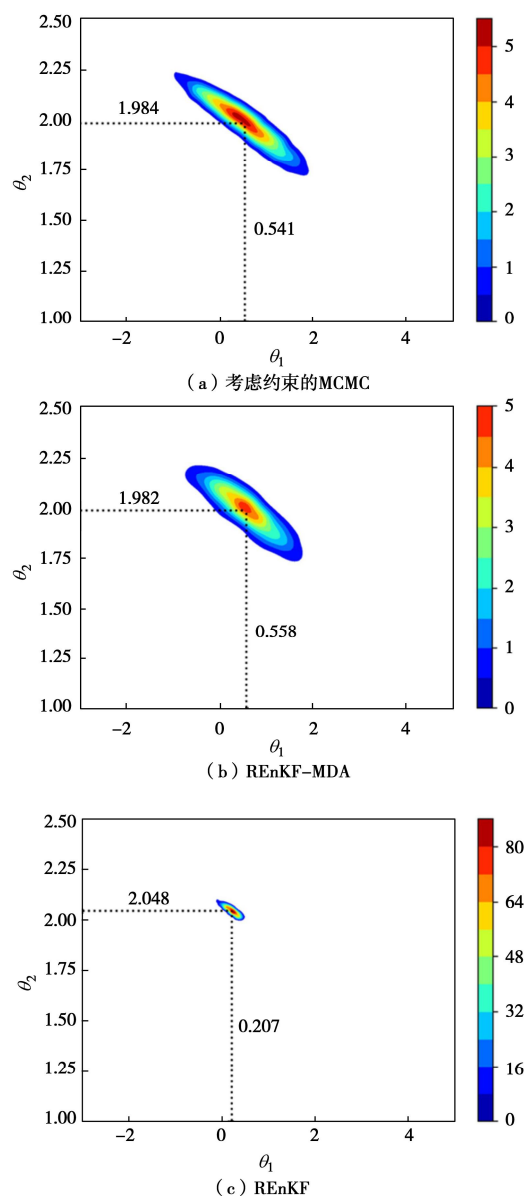


图 2 考虑约束时 3 种反演方法获得的目标参数后验分布  
( $P_0=[1, 0; 0, 1]$ ,  $C_c=1$ )

Fig. 2 Posterior distribution of target parameters obtained by three inverse methods considering constraint with  $C_c=1$

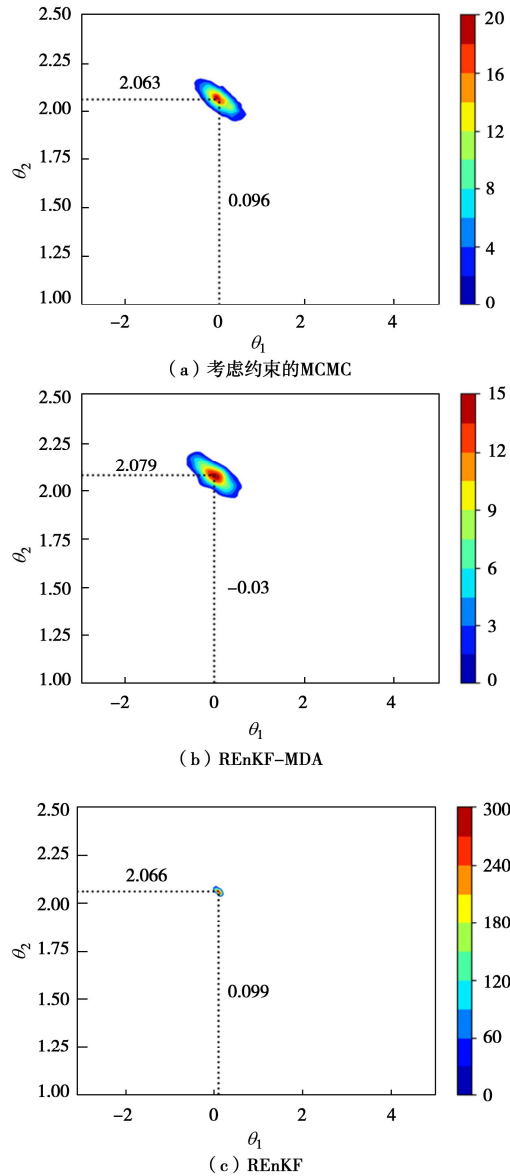


图 3 考虑约束时 3 种反演方法获得的目标参数后验分布 ( $P_0 = [1, 0; 0, 1]$ ,  $C_c=0.1$ )

Fig. 3 Posterior distribution of target parameters obtained by three inverse methods considering constraints with  $C_c=0.1$

表 1 总结了无约束和约束条件  $C_c=0.1$  条件下的后验统计值和反演结果相对误差。其中, 取后验均值为推测值, 即相对误差为后验均值和真实值的差异。由于  $\theta_1$  的真实值为 0, 故采用式 (32) 计算其相对误差。3 种考虑约束的方法推断的参数  $\theta_1$  误差都小于 10%, 参数  $\theta_2$  误差小于 1%, 相比于无约束情况准确度显著提高。从本例计算模型的表达式中可以看出, 参数  $\theta_2$  对观测数据的影响大于  $\theta_1$ , 敏感性更高, 故推测更准确。对于标准差, 考虑约束的 MCMC 和 REnKF-MDA 结果几乎一致, 而 REnKF 显著低估。

$$\text{err}_\theta = \frac{|\theta_{\text{inferred}} - \theta_{\text{true}}|}{1 + |\theta_{\text{true}}|} \quad (32)$$

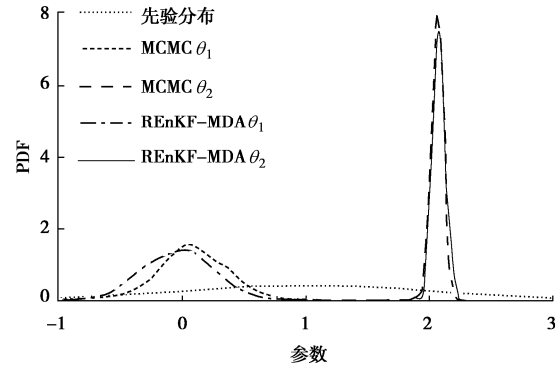


图 4 MCMC 和 REnKF-MDA 的参数边际概率密度函数曲线

( $C_c=0.1$ )

Fig. 4 Marginal PDF of target parameters obtained by MCMC and REnKF-MDA considering constraints with  $C_c=0.1$

## 4 算例二

### 4.1 算例介绍

准确预测地基沉降是岩土工程中的一项重要内容。本算例的计算模型如图 5 所示, 采用考虑前期固结压力的分层总和法<sup>[27]</sup>计算地基沉降量。由于土体重度变异性较小, 选取初始孔隙比  $e_0$ 、压缩指数  $C_c$  和回弹指数  $C_s$  为未知土体参数。已有许多研究总结了土体变形参数和物理指标间的相互关系<sup>[28-29]</sup>, 本算例假定土体为上海典型黏土层 (②层土), 超固结比为 2, 根据此 3 个参数常见取值范围<sup>[29-30]</sup>, 假设目标参数  $e_0$ ,  $C_c$  和  $C_s$  的先验分布分别是均值为 0.9, 0.4 和 0.04, 变异系数为 30% 的正态分布。既有约束信息采用何平等<sup>[29]</sup>基于现有文献和上海 69 个场地数据分析整理的  $C_c - e_0$ 、 $C_c - C_s$  经验关系, 见式 (33)。假定  $e_0$ ,  $C_c$  和  $C_s$  的虚拟真实值分别为 1.0, 0.277 和 0.0644, 从而便于和反演结果作对比来评估反演方法效果。虚拟观测数据为基于土体参数虚拟真实值计算得到的地基沉降量加上均值为 0、标准差为沉降量的 1% 的高斯白噪声。分别采用 EnKF-MDA 和 REnKF-MDA 进行无约束和考虑约束情况下的反演, 其中样本数为 300, 迭代次数为 20。

$$f_1(\theta) = 0.112[\exp(1.071e_0) - 0.445] - C_c = 0, \quad (33a)$$

$$f_2(\theta) = -C_c + 3.3C_s < 0, \quad (33b)$$

$$f_3(\theta) = C_c - 5.2C_s < 0. \quad (33c)$$

### 4.2 有无约束条件下反演结果比较

图 6 显示了土体参数  $e_0$ ,  $C_c$  和  $C_s$  的先验分布以及由 EnKF-MDA 和 REnKF-MDA 得到的后验分布概率密度函数曲线。对比先验和后验分布, 可以看出无论是否考虑约束, 利用贝叶斯方法融合观测数据可以有

表 1 4 种反演方法获得的参数后验统计值和相对误差

Table 1 Posterior statistics and relative errors obtained by four back analysis methods

类型	$\theta_1$			$\theta_2$		
	均值	标准差	相对误差/%	均值	标准差	相对误差/%
真实值	0.000	—	—	$\sqrt[3]{9}$ (2.080)	—	—
无约束 MCMC	1.396	1.068	139.6	1.802	0.2410	13.4
考虑约束 MCMC	0.096	0.268	9.6	2.063	0.0511	0.8
REnKF-MDA	-0.030	0.267	3.0	2.079	0.0512	0.1
REnKF	0.099	0.053	9.9	2.066	0.0110	0.7

表 2 无约束和考虑约束条件下的参数后验统计值

Table 2 Posterior statistics under unconstrained and constrained conditions

类型	$e_0$			$C_c$			$C_s$			地基沉降/mm
	均值	标准差	相对误差/%	均值	标准差	相对误差/%	均值	标准差	相对误差/%	
真实值	1.00	—	—	0.277	—	—	0.064	—	—	25.5
EnKF-MDA	1.01	0.22	1.0	0.350	0.056	26.4	0.039	0.012	39.1	25.6
REnKF-MDA	1.01	0.19	1.0	0.290	0.052	4.7	0.060	0.006	6.3	25.4

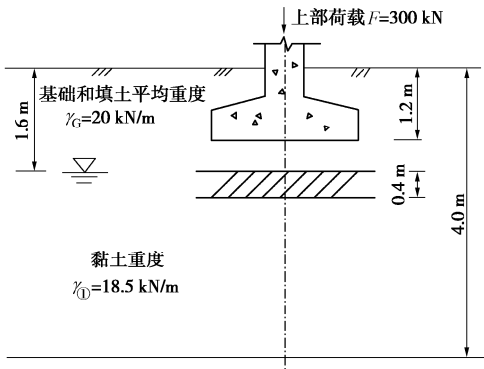
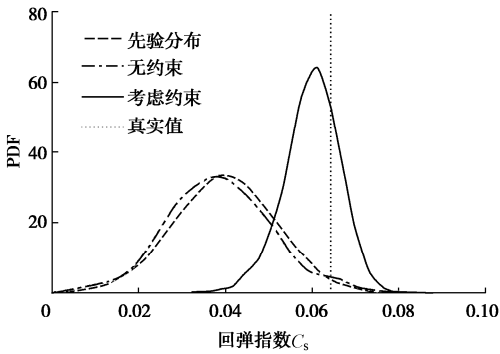


图 5 地基沉降计算示意图

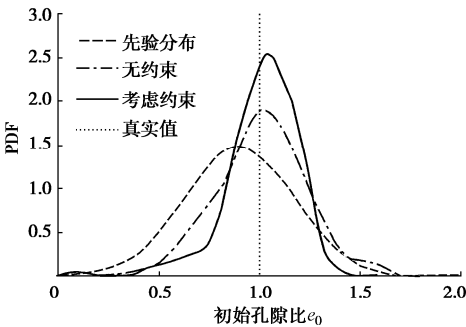
Fig. 5 Schematic diagram of foundation settlement



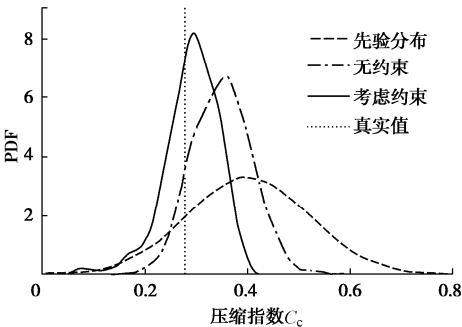
(e) 回弹指数  $C_s$  的后验分布

图 6 无约束和考虑约束条件下参数后验分布的比较

Fig. 6 Comparison of posterior distributions under unconstrained and constrained conditions



(a) 初始孔隙比  $e_0$  的后验分布



(b) 压缩指数  $C_c$  的后验分布

效地降低土体参数的不确定性估计。然而考虑约束条件下得到的参数后验分布明显比无约束时更接近参数的真实值。这是因为 REnKF-MDA 方法不仅考虑了和观测数据之间的差异,还考虑了是否满足附加约束信息,并协调两者之间的平衡。表 2 总结了两种反演方法的后验统计值和基于后验分布的均值计算得到的沉降量。由参数真实值和有无约束条件下的后验均值计算得到的沉降量基本一致,说明即使在不附加信息的情况下,基于观测数据获得的后验分布也能准确地预测观测测量,这与已有文献的研究结果一致<sup>[3, 13]</sup>。然而,考虑附加约束信息后,土体参数取值及相互关系更符合工程实际,参数  $C_c$  和  $C_s$  的均值与其真实值之间的相对误差显著减小,且土体参数的不确定性估计进一步减小。

## 5 结 论

本文提出了一种考虑附加约束信息的 REnKF-MDA 方法,并对比了无约束的 MCMC、考虑约束的



MCMC 和 REnKF 方法, 主要结论如下:

(1) 无论贝叶斯反演方法是否考虑附加信息, 得到的参数后验分布都能准确地预测观测量, 但考虑约束的反演方法在未知参数空间上表现更好。对比原始贝叶斯方法, 考虑附加约束信息使得参数后验分布的均值更接近真实值, 后验方差更小。融入附加约束信息有助于提高反演结果合理性和可信度。

(2) 以考虑约束的 MCMC 为参考, REnKF 可准确估计均值但显著低估了参数后验分布的不确定性, REnKF-MDA 可合理估计均值和表征不确定性。

(3) REnKF-MDA 作为一种近似贝叶斯方法, 在比 MCMC 少调用似然函数一个数量级的次数的情况下, 可获得和 MCMC 相似的均值和方差。在使用计算量较大的数值方法 (如有限元等) 作为计算模型时, REnKF-MDA 反演方法具有一定优势。

(4) 约束信息的强弱由其协方差矩阵大小决定, 减小约束协方差可以增强约束信息的影响, 使参数后验样本更严格地服从约束条件。

#### 参考文献:

- [1] WANG L, HWANG J H, LUO Z, et al. Probabilistic back analysis of slope failure—a case study in taiwan[J]. Computers and Geotechnics, 2013, **51**: 12–23.
- [2] 蒋水华, 刘 贤, 尧睿智, 等. 基于贝叶斯更新和信息量分析的边坡钻孔布置方案优化设计方法[J]. 岩土工程学报, 2018, **40**(10): 1871–1879. (JIANG Shui-hua, LIU Xian, YAO Rui-zhi, et al. Optimization design approach for layout scheme of slope boreholes based on Bayesian updating and value of information analysis[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2018, **40**(10): 1871–1879. (in Chinese))
- [3] 郑 栋, 黄劲松, 李典庆. 基于多源信息融合的路堤沉降预测方法[J]. 岩土力学, 2019, **40**(2): 709–727. (ZHENG Dong, HUANG Jin-song, LI Dian-qing. An approach for predicting embankment settlement by integrating multi-source information[J]. Rock and Soil Mechanics, 2019, **40**(2): 709–727. (in Chinese))
- [4] LO M K, LEUNG Y F. Bayesian updating of subsurface spatial variability for improved prediction of braced excavation response[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2019, **56**(8): 1169–1183.
- [5] CAO Z J, WANG Y. Bayesian approach for probabilistic site characterization using cone penetration tests[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2013, **139**(2): 267–276.
- [6] CAI Y, LI J, LI X, et al. Estimating soil resistance at unsampled locations based on limited CPT data[J]. Bulletin of Engineering Geology and the Environment, 2018, **78**(5): 3637–3648.
- [7] HASHASH Y M A, LEVASSEUR S, OSOULI A, et al. Comparison of two inverse analysis techniques for learning deep excavation response[J]. Computers and Geotechnics, 2010, **37**(3): 323–333.
- [8] YIN Z Y, JIN Y F, SHEN J S, et al. Optimization techniques for identifying soil parameters in geotechnical engineering: Comparative study and enhancement[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2018, **42**(1): 70–94.
- [9] ZHAO B D, ZHANG L L, JENG D S, et al. Inverse analysis of deep excavation using differential evolution algorithm[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2015, **39**(2): 115–134.
- [10] 蒋水华, 刘 源, 张小波, 等. 有限数据条件下空间变异岩土力学参数随机反演分析及比较[J]. 岩石力学与工程学报, 2020, **39**(6): 190–201. (JIANG Shui-hua, LIU Yuan, ZHANG Xiao-bo, et al. Stochastic back analysis and comparison of spatially varying geotechnical mechanical parameters based on limited data[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2020, **39**(6): 190–201. (in Chinese))
- [11] 田 密, 李典庆, 曹子君, 等. 基于贝叶斯理论的土性参数空间变异性量化方法[J]. 岩土力学, 2017, **38**(11): 3355–3362. (TIAN Mi, LI Dian-qing, CAO Zi-jun, et al. Quantification of spatial variability of soil parameters using Bayesian approaches[J]. Rock and Soil Mechanics, 2017, **38**(11): 3355–3362. (in Chinese))
- [12] QI X H, ZHOU W H. An efficient probabilistic back-analysis method for braced excavations using wall deflection data at multiple points[J]. Computers and Geotechnics, 2017, **85**: 186–198.
- [13] LI X Y, ZHANG L M, JIANG S H. Updating performance of high rock slopes by combining incremental time-series monitoring data and three-dimensional numerical analysis[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2016, **83**: 252–261.
- [14] SUN Y, HUANG J, JIN W, SLOAN S W, JIANG Q. Bayesian updating for progressive excavation of high rock slopes using multi-type monitoring data[J]. Engineering Geology, 2019, **252**: 1–13.



- [15] XIAO H, CINNELLA P. Quantification of model uncertainty in RANS simulations: a review[J]. *Progress in Aerospace Sciences*, 2019, **108**: 1 – 31.
- [16] IGLESIAS M A, LAW K J H, STUART A M. Ensemble Kalman methods for inverse problems[J]. *Inverse Probl*, 2013, **29**(4): 045001.
- [17] EVENSEN G. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1994, **99**(C5): 10143 – 10162.
- [18] HOMMELS A, MURAKAMI A, NISHIMURA S I. Comparison of the Ensemble Kalman Filter with the Unscented Kalman Filter: Application to the Construction of A Road Embankment[M]. 19th European Young Geotechnical Engineers Conference, 2008, Gyor.
- [19] LIU K, VARDON P J, HICKS M A. Sequential reduction of slope stability uncertainty based on temporal hydraulic measurements via the ensemble Kalman filter[J]. *Computers and Geotechnics*, 2018, **95**: 147 – 161.
- [20] TAO Y, SUN H, CAI Y. Predicting soil settlement with quantified uncertainties by using ensemble Kalman filtering [J]. *Engineering Geology*, 2020, **276**: 105753.
- [21] EMERICK A A, REYNOLDS A C. History matching time-lapse seismic data using the ensemble Kalman filter with multiple data assimilations[J]. *Computational Geosciences*, 2012, **16**(3): 639 – 659.
- [22] ZHANG X, XIAO H, GOMEZ T, COUTIER-DELGOSHA O. Evaluation of ensemble methods for quantifying uncertainties in steady-state CFD applications with small ensemble sizes [J]. *Computers & Fluids*, 2020, **203**: 104530.
- [23] WANG D, CHEN Y, CAI X. State and parameter estimation of hydrologic models using the constrained ensemble Kalman filter[J]. *Water Resources Research*, 2009, **45**: 10.1029.
- [24] ZHANG X L, MICHEL N STR FER C, XIAO H. Regularized ensemble Kalman methods for inverse problems [J]. *Journal of Computational Physics*, 2020, **416**: 109517.
- [25] WU J, WANG J X, SHADDEN S C. Adding constraints to bayesian inverse problems[J]. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2019, **33**: 1666 – 1673.
- [26] VRUGT J A. Markov chain Monte Carlo simulation using the DREAM software package: theory, concepts, and MATLAB implementation[J]. *Environmental Modelling & Software*, 2016, **75**: 273 – 316.
- [27] 李广信. 高等土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 253 – 254. (LI Guang-xin. *Advanced Soil Mechanics*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 253 – 254. (in Chinese))
- [28] AZZOUZ A S, KRIZEK R J, COROTIS R B. Regression analysis of soil compressibility[J]. *Soils & Foundations*, 1976, **16**(2): 19 – 29.
- [29] 何平, 王卫东, 徐中华. 上海黏土压缩指数和回弹指数经验关系 [J]. *岩土力学*, 2018, **39**(10): 275 – 84. (HE Ping, WANG Wei-dong, XU Zhong-hua. Empirical correlations of compression index and swelling index for Shanghai clay[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2018, **39**(10): 275 – 284. (in Chinese))
- [30] 武朝军. 上海浅部土层沉积环境及其物理力学性质[D]. 上海: 上海交通大学, 2016. (WU Chao-jun. *Depositional Environment and Geotechnical Properties for the Upper Shanghai Clays*[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2016. (in Chinese))