

DOI: 10.11779/CJGE202109016

# 时域稳定的基础频响离散有理近似参数识别方法

王志宇<sup>1</sup>, 唐贞云<sup>\*1, 2</sup>, 杜修力<sup>1</sup>

(1. 北京工业大学城市与工程安全减灾教育部重点实验室, 北京 100124; 2. 中国地震局工程力学研究所, 中国地震局地震工程与  
工程振动重点实验室, 黑龙江 哈尔滨 150080)

**摘要:** 离散时间有理近似函数是建立基础动力分析模型的重要方法之一。而有理函数的稳定性和精度决定了动力时程分析的稳定性和精度。目前关于离散时间有理近似函数的研究主要集中于时域分析模型建立, 而无法同时保证辨识函数的稳定性、精度及计算效率。基于系统稳定性理论, 将有理近似函数看成一阶与二阶系统的组合, 并根据其根的稳定性条件推导了被辨识参数的稳定界限。在此基础上, 利用遗传算法与序列二次规划算法提出了时域稳定的参数识别方法。通过对不同基础频响函数的数值仿真, 验证了该方法辨识参数的稳定性与精度。由于该方法限制了参数取值范围, 其计算效率也得到了大幅度提高。

**关键词:** 基础频响函数; 离散时间有理近似; 稳定性; 精度; 计算效率

**中图分类号:** TU470      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-4548(2021)09-1708-07

**作者简介:** 王志宇(1996—), 男, 北京人, 硕士研究生, 主要从事结构试验技术研究。E-mail: 944825913@qq.com。

## Parameter identification method of time-domain stable discrete rational approximation for frequency response of foundations

WANG Zhi-yu<sup>1</sup>, TANG Zhen-yun<sup>1, 2</sup>, DU Xiu-li<sup>1</sup>

(1. The Key Laboratory of Urban Security and Disaster Engineering of Ministry of Education, Beijing University of Technology, Beijing  
100124, China; 2. Key Laboratory of Earthquake Engineering and Engineering Vibration, Institute of Engineering Mechanics, China  
Earthquake Administration, Harbin 150080, China)

**Abstract:** The discrete-time rational approximation function is one of the important methods for establishing dynamic analysis model for foundations. The stability and accuracy of the rational function determine those of dynamic time history analysis. At present, the researches on the discrete-time rational approximation function mainly focus on the establishment of time-domain analysis model, but they cannot guarantee the stability, accuracy and calculation efficiency of the identification function at the same time. Based on the theory of system stability, the rational approximation function is regarded as the combination of first-order and second-order systems, and the stability boundary of identification parameters is derived according to the stability condition of its roots. On this basis, a time-domain stable parameter identification method is proposed by using the genetic algorithm and the sequential quadratic programming algorithm. The stability and accuracy of parameter identification are verified through numerical simulation of different frequency response functions for foundations. Due to the boundary of parameter range, the calculation efficiency is also greatly improved.

**Key words:** frequency response of foundation; discrete-time rational approximation; stability; accuracy; calculation efficiency

## 0 引言

基础频域阻抗是土结动力相互作用研究中描述基础的一种重要方法。目前, 关于基础阻抗函数解析解已有大量的研究成果, 如: 崔春义等<sup>[1]</sup>利用桩-土耦合条件推导得到管桩基础的动力阻抗解析解; 杨林青等<sup>[2]</sup>求解了任意形状基础的频域动力阻抗。频域阻抗只适用于结构线性响应的频域求解, 无法用于非线性响应分析和混合试验要求的时域逐步积分求解。为了将该频域阻抗用于土-结相互作用系统动力时程分析, 需要

将其转换为时域阻抗模型。目前常用的拟合方法有离散有理近似<sup>[3]</sup>和连续有理近似函数<sup>[4]</sup>两种, 有理近似函数的稳定性与精度决定了动力时域分析的稳定性与精度。采用离散时间有理近似函数对基础频域阻抗进行准确拟合主要取决于参数识别方法的有效性。Paronesso

基金项目: 中国地震局工程力学研究所基本科研业务费专项项目  
(2018D03); 国家自然科学基金项目 (51978016)

收稿日期: 2020-12-01

\*通信作者 (E-mail: tzy@bjut.edu.cn)

等<sup>[5]</sup>采用平衡逼近的方法推导了相互作用力与位移的差分方程, 并将其表示为离散时间的有理近似函数; Wolf 等<sup>[6]</sup>、Safak 等<sup>[7]</sup>、杜修力等<sup>[8]</sup>分别利用有理近似函数拟合了基础阻抗, 并给出了后验的函数稳定性条件为函数极点的模小于 1; Laudon 等<sup>[9]</sup>采用了 Safak 等<sup>[7]</sup>的方法拟合了频域阻抗, 指出该方法虽然可以保证拟合精度, 但存在失稳问题; Gash 等<sup>[10]</sup>将离散时间函数与 Newmark- $\beta$  法结合, 评价了滤波器-积分器所需的稳定条件; Sung 等<sup>[11]</sup>采用最小二乘法对阻抗进行了拟合, 分析了土结动力相互作用对结构动力响应的影响。以上研究表明, 大多数频域阻抗的最优有理近似存在失稳问题, 需要一个有效的方法保证识别函数的稳定性。赵建峰等<sup>[12]</sup>利用罚函数给失稳的参数组合增加惩罚值, 保证了识别程序输出结果的稳定性; 赵密等<sup>[3]</sup>先在 S 域中利用连续时间有理近似函数与罚函数法拟合基础阻抗, 再通过双线性变换得到 Z 域的离散时间函数, 保证了函数的稳定性。

离散时间有理近似函数的参数识别方法主要存在如下问题: 部分方法未对函数的稳定性进行判断, 可能导致时域分析失稳; 另一部分方法采用后验方式判断辨识函数的稳定性, 虽然可以较好地确保稳定性和精度, 但由于辨识参数在整个实数域以及参数稳定性判别的复杂性, 参数辨识效率较低, 在实际中(特别是多自由度基础系统)难以应用。本文从控制理论角度给出了完整的稳定约束条件, 并据此提出了一种高效稳定的离散时间有理近似函数参数识别方法。

## 1 离散时间有理近似的稳定性

采用解析方法或数值方法求解基础频域动力阻抗<sup>[4]</sup>是土结动力相互作用研究中基础的重要描述方法。根据输入与输出物理量不同, 频域阻抗函数可以分为两种: 广义位移作为输入, 广义力作为输出的动力刚度阻抗函数  $S(\omega)$ ; 广义力作为输入, 广义位移作为输出的动力柔度阻抗函数  $F(\omega)$ 。因此, 在频域中基础与无限土体之间力与位移的关系可以表示为

$$f(\omega) = S(\omega)u(\omega) \quad , \quad (1)$$

式中,  $f(\omega)$  为广义力,  $u(\omega)$  为广义位移,  $S(\omega)$  为基础频域阻抗函数, 其可以表示为频率的函数:

$$S(\omega) = S_0 [K(\omega) + iC(\omega)] \quad . \quad (2)$$

式中  $\omega$  为外荷载频率;  $S_0$  为静刚度;  $i = \sqrt{-1}$  为虚数单位;  $K(\omega)$ ,  $C(\omega)$  分别为与频率相关的刚度系数和阻尼系数。采用离散时间有理近似作为时域模型时, 其对应的基础频域阻抗  $S(\omega)$  可描述为

$$S(\omega) \approx S(z) = S_0 \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} \quad . \quad (3)$$

式中  $b_j$  和  $a_j$  分别为分母和分子多项式的待定系数, 且均为实数;  $z = e^{i\omega\Delta t}$  为  $Z$  变换的频域符号,  $\Delta t$  为离散时间步长;  $M$ ,  $N$  分别为分子与分母多项式的阶数, 通常根据基础频域阻抗复杂程度选择合适的阶次即可, 频域阻抗越复杂需要的阶次越高。该模型的参数识别过程中只需用到离散的频域阻抗值, 在采用式(3)进行拟合时, 无需  $K(\omega)$  与  $C(\omega)$  的具体表达形式, 而得到式(3)所示模型后, 可以用不同时域模型对其进行等效。为了保证时域模型的稳定性, 需要首先保证式(3)所示频域模型的稳定性。根据系统稳定性理论<sup>[13]</sup>, 离散时间有理近似函数的稳定性可由其极点确定: 当且仅当其极点全部位于单位圆内, 即所有极点的模均小于 1 时, 模型稳定。假设形如式(3)的离散时间有理近似函数的极点为  $z_j$ , 则其稳定条件可表示为

$$|z_j| < 1 \quad . \quad (4)$$

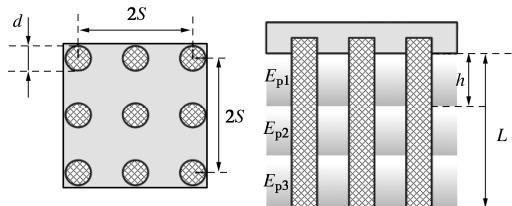


图 1 3×3 群桩基础模型

Fig. 1 Model for foundation with 3×3 pile groups

以一个  $3 \times 3$  群桩模型为例, 假设地基土分为 3 层, 模型如图 1 所示。其中桩直径  $d=1$  m, 桩长  $L=6$  m, 土层厚度  $h=2$  m, 土泊松比  $\nu=0.35$ , 土阻尼比  $\beta=0.05$ , 桩距  $S=5$  m, 桩土密度比  $\rho_p/\rho_s=1.3$ , 混凝土弹性模量  $E_p=30000$  MPa, 3 层土的桩土弹模比  $E_p/E_{s1}=1000$ ,  $E_p/E_{s2}=2000$ 、 $E_p/E_{s3}=500$ 。土体阻抗由文献[14]的方法计算得到, 群桩阻抗由文献[15]的方法计算得到。采用时域递归算法<sup>[12]</sup>对其进行描述, 假设基础-土界面之间的相互作用力为  $f$ , 则其可采用前  $M$  个时刻的界面位移和前  $N$  个时刻的相互作用力描述, 其时域力学模型如图 2, 力学方程如下所示:

$$f(t) = \sum_{i=0}^M b_i u(t-i\Delta t) - \sum_{i=1}^N a_i f(t-i\Delta t) \quad . \quad (5)$$

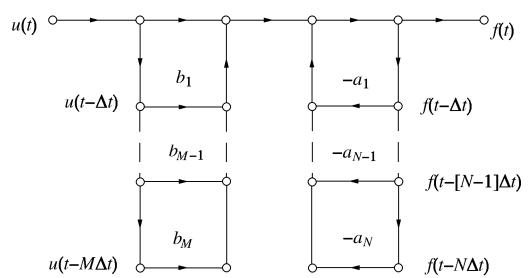


图 2 时域递归模型计算流程

Fig. 2 Computational process of time-domain recursive model

并采用文献[12]给出的修正有理近似函数辨识群桩阻抗进行无约束识别, 计算结果如图 3 所示。由图可知, 虽然在频域内有理函数可以精确地与基础阻抗吻合, 但由于拟合过程中未考虑函数稳定性问题, 因此导致了时程分析发散。因此, 对于离散时间有理近似函数, 仅令其函数值在频域内精确地拟合基础阻抗函数是不够的, 还需要确保时域分析的收敛性才具有应用价值。

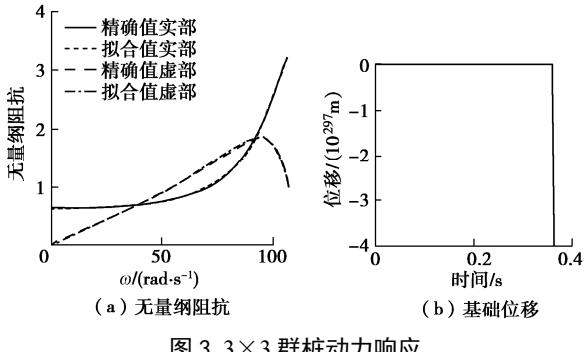


图 3 3×3 群桩动力响应

Fig. 3 Dynamic responses of foundation with 3×3 pile groups

## 2 稳定参数识别方法

为了确保基础时域模型的收敛性, 现有识别方法先满足频域响应精度, 而后进行稳定性判别, 当发现不稳定时重新识别参数, 直到获得同时满足精度和稳定性条件的参数后停止识别。该方法的缺陷在于无法识别过程和结果不可控。如果预先确定满足稳定性的参数条件, 然后在该范围内去寻找满足精度要求的参数将会更有效。

### 2.1 稳定参数约束条件

由式(4)可知, 离散时间有理近似函数稳定的充分必要条件为所有极点的模均小于 1, 但由式(3)可知, 只有该模型的所有参数已知才能得到其根, 这就是现有方法无法提前确定稳定参数范围的原因所在。从控制系统角度来看, 式(3)所示的多阶系统由多个一阶和二阶系统组成。因此, 形如式(3)的离散时间有理近似函数, 可用下式等效:

$$S(\omega) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j z^{-j}}{\prod_{j=1}^l (1 + x_{1j} z^{-1} + x_{2j} z^{-2}) \times \prod_{j=1}^{n-2l} (1 + x_{0j} z^{-1})}, \quad (6)$$

式中,  $x_{1j}$  和  $x_{2j}$  为二阶系统系数,  $x_{0j}$  为一阶系统系数,  $l$  为二阶系统总数。

当式(3)等效为式(6)后, 辨识多阶系统参数变为了辨识一阶和二阶系统参数。由一阶、二阶系统的根可得到其解析式, 也就可以根据式(4)限制(6)中参数的取值范围了。式(6)每个一阶与二阶项的根为

$$z_j = \begin{cases} \frac{-x_{1j} \pm \sqrt{x_{1j}^2 - 4x_{2j}}}{2} \\ -x_{0j} \end{cases} \quad (7)$$

式中, 一阶项根  $x_{0j}$  的取值范围可以简单地确定:

$$-1 < x_{0j} < 1. \quad (8)$$

而二阶项的根需分为实数根与复数根。由于未得到系数  $x$  的值时, 不能判断一阶和二阶系统个数。因此, 当  $n$  为偶数时, 假设一阶项的个数为 0, 即  $n=2l$ ; 当  $n$  为奇数时, 假设一阶项的个数为 1, 即  $n-1=2l$ 。而当求出未知系数  $x$  后, 若二阶项的根为实数根, 则可自动变为两个一阶项。因此, 二阶系统的参数范围分为实极点和复极点分别讨论。

#### (1) 复极点

由于根为复数根, 因此  $x_{1j}^2 - 4x_{2j} < 0$ , 式(7)的二阶项根改写为

$$z = \frac{-x_{1j} \pm (\sqrt{4x_{2j} - x_{1j}^2})i}{2} \quad (9)$$

而函数稳定要求极点的模小于 1, 因此存在:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x_{1j}^2}{4} + \frac{4x_{2j} - x_{1j}^2}{4} < 1, \\ x_{1j}^2 - 4x_{2j} < 0. \end{array} \right\} \quad (10)$$

进一步化简得到  $x$  的取值范围:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x_{2j} < 1, \\ -2\sqrt{x_{2j}} \leq x_{1j} \leq 2\sqrt{x_{2j}}. \end{array} \right\} \quad (11)$$

由式(11)可知,  $x_{1j}$  的取值范围受  $x_{2j}$  的影响, 需要非线性约束, 其取值范围如图 4 所示阴影范围。

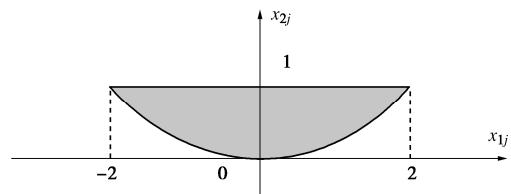


图 4 复数根时稳定参数界限

Fig. 4 Stability parameter boundary for complex roots

#### (2) 实极点

当极点为实数时, 极点的模小于 1 的条件为

$$\left. \begin{array}{l} \left| \frac{-x_{1j} \pm \sqrt{x_{1j}^2 - 4x_{2j}}}{2} \right| < 1, \\ x_{1j}^2 - 4x_{2j} \geq 0. \end{array} \right\} \quad (12)$$

将式(12)进一步化简可得

$$\left. \begin{array}{l} x_{1j} - 2 < \sqrt{x_{1j}^2 - 4x_{2j}} < 2 + x_{1j}, \\ -x_{1j} - 2 < \sqrt{x_{1j}^2 - 4x_{2j}} < 2 - x_{1j}. \end{array} \right\} \quad (13)$$

而由于根为实数根, 在实数范围内实数的偶次平方

根必然为非负数, 因此式(13)不等式组的右端需大于0, 可以得到 $x_{1j}$ 的取值范围:

$$-2 < x_{1j} < 2 \quad \text{。} \quad (14)$$

进而根据式(14)可以判断出式(13)的左端必然成立, 将不等式组的左端去掉并对两侧取平方可得

$$\left. \begin{array}{l} x_{1j} - 1 < x_{2j} , \\ -x_{1j} - 1 < x_{2j} , \\ x_{1j}^2 - 4x_{2j} \geq 0 , \\ -2 < x_{2j} < 2 . \end{array} \right\} \quad (15)$$

式(15)的不等式组需要取交集以保证式(13)必然成立, 则取值范围可简化为式(16), 为便于理解, 取值范围可见图5, 图中深色填充部分为式(16)所示取值范围, 两条交叉直线分别为 $x_2 = x_{1j} - 1$ 和 $x_2 = -x_{1j} - 1$ , 抛物线为 $4x_2 = x_{1j}^2$ 。

$$\left. \begin{array}{l} x_{1j} - 1 < x_{2j} \leq \frac{x_{1j}^2}{4} \quad 0 \leq x_{1j} < 2 , \\ -x_{1j} - 1 < x_{2j} < \frac{x_{1j}^2}{4} \quad -2 < x_{1j} < 0 . \end{array} \right\} \quad (16)$$

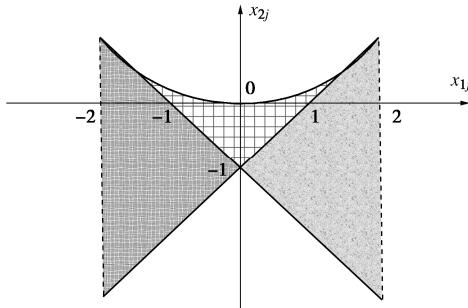


图5 实数根时稳定参数界限

Fig. 5 Stability parameter boundary for real roots

### (3) 稳定参数界限

观察式(11), (16)和图4, 5可以发现, 当共轭根分别为复数与实数时, 参数 $x$ 的取值范围以曲线为 $4x_2 = x_{1j}^2$ 界线分为上下两部分。因此, 可将两部分合并, 则式(6)所示模型的稳定参数界限如式(17), 其参数范围如图6所示, 图中浅色填充部分为复数根的取值范围, 深色填充部分为实数根的取值范围。

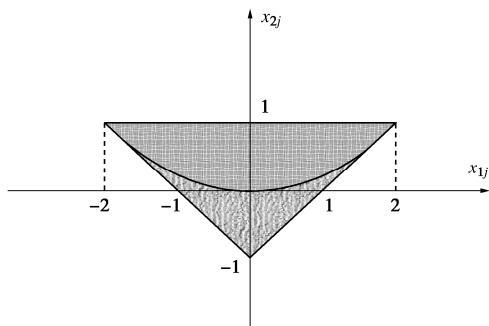


图6 稳定参数界限

Fig. 6 Boundary of stable parameters

$$\left. \begin{array}{l} -2 < x_{1j} < 2 , \\ -1 < x_{2j} < 1 , \\ x_{1j} - 1 < x_{2j} \quad (0 \leq x_{1j} < 2) , \\ -x_{1j} - 1 < x_{2j} \quad (-2 < x_{1j} < 0) . \end{array} \right\} \quad (17)$$

而当拟合动力柔度频响函数时, 则需要保证函数零点的模小于1, 此时可将分子提取 $b_0$ , 然后再采用部分分式的方法得到相同的取值界限。

## 2.2 参数识别

得到了新的有理近似函数形式及其稳定参数取值边界后, 如何通过参数识别确保最优的精度是参数寻优问题。优化算法可以分为全局优化算法和局部优化算法, 常见的全局优化算法有进化算法、遗传算法、粒子群优化算法等等, 而常见的局部算法有单纯形法、序列二次规划算法等等。

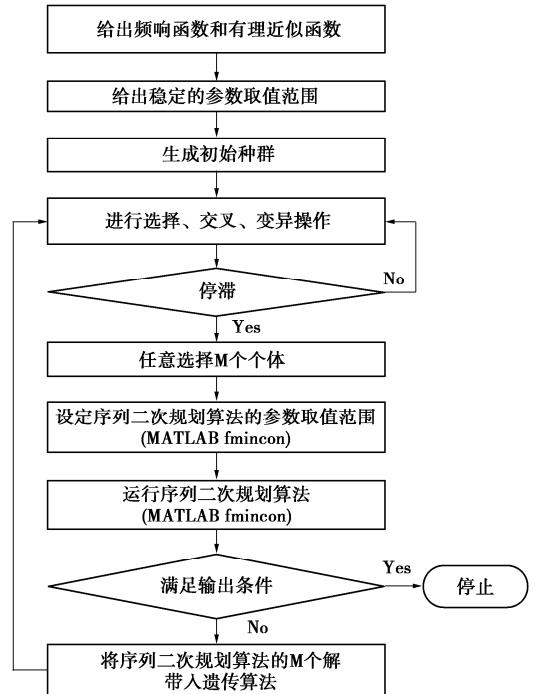


图7 参数识别流程

Fig. 7 Flow chart of parameter identification

本文以Wang等<sup>[16]</sup>将遗传算法与单纯形法结合形成的混合算法为基础, 采用序列二次规划算法(SQP算法)代替单纯形法, 形成遗传-序列二次规划算法, 用于求解有理近似函数的待定系数。遗传算法作为全局优化算法, 不需要给出合理的初始值, 其从多个任意初始值开始寻优, 搜索范围大, 利于全局择优。而SQP算法作为局部优化算法可以从遗传算法得到的全局最优解中选择初始值, 避免了因初值选择不适当而造成的拟合效果不佳。此外, 采用SQP算法代替单纯形法可以将无约束优化问题变为有约束优化问题, 通过约束方程人为地规定参数的取值范围, 更适用于本文建立的稳定参数边界。具体的计算流程如图7所示, 预先设定有理近似函数阶次和预期误差(比如均方根

小于 10%), 当辨识参数对应阻抗函数精度满足预期误差条件时跳出循环; 当辨识参数对应精度无法满足预期误差条件时, 设定连续 10 次循环每两次输出结果精度之差均小于 0.1% 时跳出循环, 增加有理近似函数阶次, 重复前面的循环, 直至辨识精度满足预期误差条件。

### 3 数值算例验证

为了验证上述方法的有效性, 本节分别采用 3 组复杂程度不同的基础阻抗进行对比研究。

#### (1) 算例 1: $3 \times 3$ 群桩基础

对图 2 所示的  $3 \times 3$  群桩基础的频域阻抗, 本文采用文献[12]提出的修正离散时间有理近似函数进行辨识, 辨识所用目标函数如下式所示:

$$f = \sum_{\Omega} \left( \left| \frac{R(\Omega) - S(\Omega)}{S_0} \right|^2 \right), \quad (18)$$

式中,  $\Omega$  为外荷载频率  $\omega$  或其无量纲频率  $a_0$ , 视函数形式而定, 但计算过程中需保持量纲一致,  $R(\Omega)$  为离散时间有理近似函数,  $S(\Omega)$  为频域阻抗函数。

为了综合验证本文方法在稳定性、精度和计算效率, 对图 3 所示无约束识别失稳案例采用罚函数法<sup>[12]</sup>和本文方法进行对比分析, 分别对有理函数  $m=n=3/4/5/6/7$  阶进行了分析。为了对辨识模型精度进行定量评价, 取频域函数精确解与识别函数之差绝对值积分面积占精确阻抗绝对值积分面积的比值作为误差评价指标, 其计算方法如下式所示, 其中虚部和实部误差权重均定义为 0.5。

$$E = \left( \frac{\int_0^{\omega_N} |R(\omega)_{\text{Re}} - S(\omega)_{\text{Re}}| d\omega}{\int_0^{\omega_N} |S(\omega)_{\text{Re}}| d\omega} \times 0.5 + \frac{\int_0^{\omega_N} |R(\omega)_{\text{Im}} - S(\omega)_{\text{Im}}| d\omega}{\int_0^{\omega_N} |S(\omega)_{\text{Im}}| d\omega} \times 0.5 \right) \times 100\%. \quad (19)$$

式中  $E$  表示识别模型误差, 由实部与虚部的权重各一半;  $R(\omega)_{\text{Re}}$ ,  $S(\omega)_{\text{Re}}$ ,  $R(\omega)_{\text{Im}}$  和  $S(\omega)_{\text{Im}}$  分别表示有理函数与阻抗精确值的实部与虚部;  $\omega_N$  表示频率最大值。辨识结果如表 1 和图 8 所示。

由图 8 (a), 8 (b) 可以看到, 两种方法辨识所得模型均可较精确地描述频域阻抗, 采用式 (19) 计算所得误差小于 1%, 证明两种方法拥有很高精度。由图 8 (c), 8 (d) 可以看到, 将 EL-centro 波作为地震动输入, 两种方法均可保证时程计算的稳定性, 且时程曲线一致。由表 1 可知, 在计算效率方面上, 本文方法明显优于罚函数法。两种方法分别采用 3 到 7

阶函数对基础阻抗进行识别, 本文方法所需时间均在 3 s 以内, 且效率损失随函数阶数增加并不明显, 而罚函数法所需时间在 3~34 s, 为本文方法的 2 倍到 10 倍, 且拟合用时随阶数增加几乎成倍增长。原因在于: 第一, 本文方法给定了参数取值区间, 而罚函数法的参数取值范围为整个实数域, 取值范围的增大造成了计算效率的降低; 第二, 本文方法取值区间内可保证函数稳定, 但罚函数法需要求解高阶多项式判断稳定性, 进一步降低了计算效率。

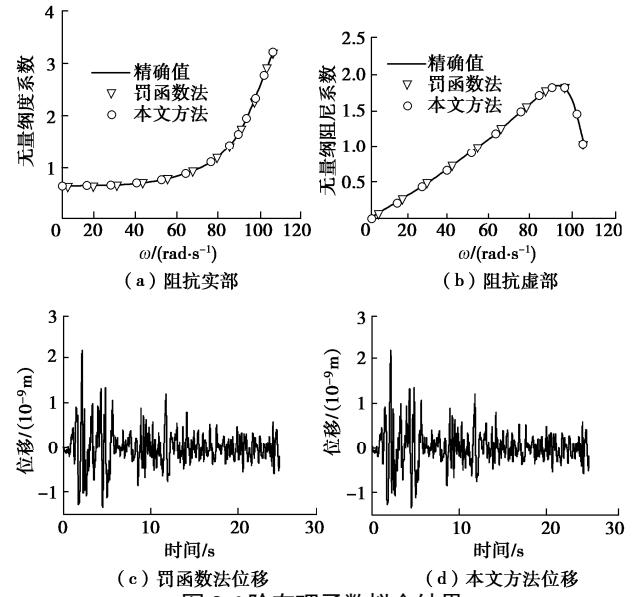


Fig. 8 Identification results of six-order rational function

表 1  $3 \times 3$  群桩基础辨识效率

Table 1 Identification efficiency of foundation with  $3 \times 3$  pile

阶次	groups				
	3	4	5	6	7
本文方法/s	1.82	2.24	2.24	2.86	2.92
罚函数法/s	3.53	4.67	8.41	16.17	33.67

#### (2) 算例 2: $5 \times 5$ 群桩基础

为验证阶数对于辨识精度的影响, 分别采用不同阶数的有理近似函数对图 9 和图 10 所示  $5 \times 5$  群桩基础的阻抗进行拟合, 其阻抗由文献[17]的图 6 所得。图中  $d$  为桩基础直径,  $S$  为桩间距, 桩中心距筏板边缘长  $0.5S$ 。由于此基础动力阻抗对频率变化剧烈, 因此利用离散时间的有理近似函数拟合具有挑战性。本

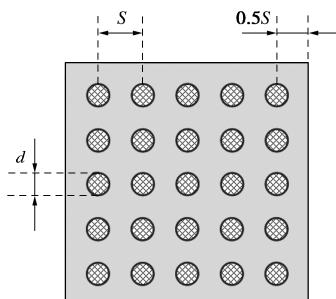


图 9  $5 \times 5$  群桩基础模型

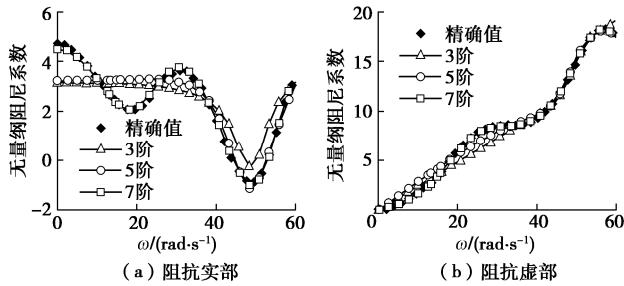
Fig. 9 Model for foundation with  $5 \times 5$  pile groups

文采用式(3)给出的有理函数, 取  $\Delta t=0.02$  s, 阶数  $m=n=3\sim 7$  阶进行拟合。函数拟合精度采用式(19)进行判断, 结果如图 10 和表 2。

表 2  $5\times 5$  群桩基础拟合精度与效率

Table 2 Identification accuracy and efficiency of foundation with  $5\times 5$  pile groups

阶次	3	4	5	6	7
误差/%	18.80	18.23	13.02	2.03	1.97
时间/s	9.02	8.15	9.81	13.74	16.46

图 10  $5\times 5$  群桩基础不同阶次拟合精度Fig. 10 Identification accuracy of foundation with  $5\times 5$  pile groups in different orders

由表 2 和图 10 可以看到, 采用不同阶次的有理函数辨识时, 辨识精度随阶数增加逐渐提高, 当采用 3 阶函数拟合时, 效果较差, 整体误差约有 19%, 难以拟合复杂阻抗。但当阶数增加到 6 阶时, 整体误差降低到 2%, 此时有理函数可较精确地吻合频域阻抗。从辨识效率来看, 3 阶函数拟合用时约为 9 s, 7 阶时约为 16 s, 增加了仅一倍, 可以看出拟合效率的损失随阶次增加较低。采用同阶次的罚函数法进行拟合由于计算效率过低未得到有效结果, 证明本文方法更适用于采用高阶次函数对复杂阻抗函数进行准确辨识。

### (3) 算例 3: 水平运动的圆形基础

对于随频率变化更为复杂的阻抗函数, 以文献[7]中图 7 的圆形基础水平运动动力刚度函数为例。基础模型如图 11 所示, 图中  $Pe^{i\omega\Delta t}$  和  $ue^{i\omega\Delta t}$  分别为基础受到的外荷载与产生的位移。基础参数为: 半径  $r=10$  m, 剪切波速  $V_s=100$  m/s, 土体泊松比  $\nu=1/3$ , 土体阻尼比  $\zeta=0.05$ , 土层厚度  $H=2$  m。拟合阶数取  $m=n=3/5/7/9/11$  阶, 拟合精度采用式(19)进行判断, 结果如图 12 与表 3 所示。

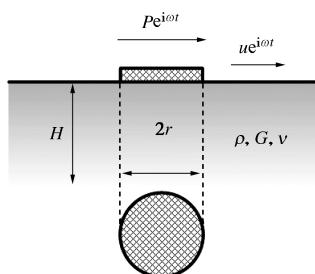


图 11 水平运动的圆形基础

Fig. 11 Circular foundation under horizontal motion

表 3 圆形基础拟合精度与效率

Table 3 Identification accuracy and efficiency of circular foundation

阶次	3	5	7	9	11
误差/%	16.82	12.29	7.49	6.74	6.62
时间/s	4.46	4.19	5.79	7.12	8.66

对于此圆形基础阻抗, 罚函数法仍无法辨识出有效结果, 而本文方法结果如表 3 与图 12 所示。由表 3 可知, 随有理函数阶次增加, 拟合用时逐渐增加, 而拟合精度也逐渐提高, 但总体用时低于 10 s, 误差可降低到 7%, 通过图 12 的不同阶次对比可知: 增加阶次有利于提高阻函数拟合精度, 在达到 7 阶后, 增加阶次对精度提高不明显, 此时已可以较好的满足应用需求。

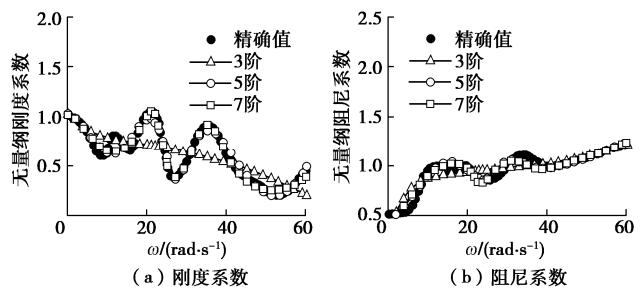


Fig. 12 Identification accuracy of circular foundation in different orders

## 4 结论

针对基础频响离散时间有理近似函数的参数识别难以同时保证稳定性、精度及计算效率的问题, 本文提出了时域绝对稳定的离散有理近似函数参数识别方法。采用不同基础阻抗函数, 对本文方法和罚函数拟合方法就稳定性、精度及计算效率等方面进行了对比分析, 验证了本文方法的有效性与优势。

(1) 从线性系统理论角度将基础阻抗离散有理近似函数看成一阶与二阶系统的组合, 并根据其根的稳定条件建立了被辨识参数的稳定界限。据此, 采用遗传-序列二次规划算法建立了时域稳定的参数识别方法, 保证了识别函数时域模型的绝对稳定性。

(2) 对单自由度基础阻抗对比仿真表明, 本文方法与既有方法拥有同等精度, 但计算效率明显优于既有算法。对于简单阻抗函数, 本文方法拟合用时均低于 3 s, 为同等精度既有方法的 10%~50%; 对于不同的复杂函数, 本文方法用时也均低于 20 s, 提高了多自由度阻抗函数识别的适用性。

(3) 通过对复杂基础阻抗的辨识仿真表明, 增加有理函数阶次有利于提高拟合精度, 但过高的阶次对提高精度不明显。根据本文仿真结果, 7 阶有理近似函数能比较好的描述复杂基础阻抗。

(4) 本文基于单输入单输出控制理论建立了单自

由度基础阻抗的时域模型参数识别方法,对于多自由度体系,动力分析方法与有理近似函数特性相互耦合,其稳定条件更为复杂,将在后续工作中开展进一步研究。

### 参考文献:

- [1] 崔春义, 孟 坤, 武亚军, 等. 考虑竖向波动效应的径向非均匀黏性阻尼土中管桩纵向振动响应研究[J]. 岩土工程学报, 2018, **40**(8): 1433 – 1443. (CUI Chun-yi, MENG Kun, WU Ya-jun, et al. Dynamic response of vertical vibration of pipe piles in soils with radial inhomogeneity and viscous damping considering vertical wave effect[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2018, **40**(8):1433 – 1443. (in Chinese))
- [2] 杨林青, 韩泽军, 林 奠, 等. 横观各向同性层状地基上任意形状刚性基础动力响应求解与分析[J]. 岩土工程学报, 2020, **42**(7): 1257 – 1267. (YANG Lin-qing, HAN Ze-jun, LIN Gao, et al. Solution and analysis for dynamic response of arbitrarily shaped rigid foundation on transversely isotropic layered soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2020, **42**(7): 1257 – 1267. (in Chinese))
- [3] 赵 密, 杜修力. 基础频响有理近似的稳定性和识别: 离散时间的递归算法[J]. 工程力学, 2010, **27**(1): 141 – 147,153. (ZHAO Mi, DU Xiu-li. Stability and identification for rational approximation of foundation frequency response: discrete-time recursive evaluations[J]. Engineering Mechanics, 2010, **27**(1): 141 – 147, 153. (in Chinese))
- [4] 赵 密, 杜修力. 基础频响有理近似的稳定性和识别: 连续时间的集中参数模型[J]. 工程力学, 2009, **26**(12): 76 – 84, 99. (ZHAO Mi, DU Xiu-li. Stability and identification for rational approximation of foundation frequency response: continuous-time lumped-parameter models[J]. Engineering Mechanics, 2009, **26**(12): 76 – 84, 99. (in Chinese))
- [5] PARONESSO A, WOLF J P. Recursive evaluation of interaction forces and property matrices from unit-impulse response functions of unbounded medium based on balancing approximation[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1998, **27**: 609 – 618.
- [6] WOLF JP, MOTOSAKA M. Recursive evaluation of interaction forces of unbounded soil in the time domain from dynamic-stiffness coefficients in the frequency domain[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1989, **18**: 365 – 376.
- [7] SAFAK E. Time-domain representation of frequency-dependent foundation impedance functions[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2006, **26**(1): 65 – 70.
- [8] 杜修力, 赵建锋, 韩 强. 精度可控地基阻抗力的一种时域差分计算方法[J]. 力学学报, 2008, **40**(1): 59 – 66. (DU Xiu-li, ZHAO Jian-feng, HAN Qiang. Accuracy controllable time-domain difference approach to calculate foundation resisting force[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2008, **40**(1): 59 – 66. (in Chinese))
- [9] LAUDON A D, KWON O S, GHAEMMAGHAMI A R. Stability of the time-domain analysis method including a frequency-dependent soil–foundation system[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2015, **44**(15): 2737 – 2754.
- [10] GASH R, SEVLABI E E, TACIROGLU E. Implementation and stability analysis of discrete-time filters for approximating frequency-dependent impedance functions in the time domain[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2017, **94**: 223 – 233.
- [11] SUNG Y C, CHEN C C. Z-transferred discrete-time infinite impulse response filter as foundation-soil impedance function for SDOF dynamic structural response considering soil-structure interaction[J]. Earthquake Spectra, 2019, **35**(2): 1003 – 1022.
- [12] 赵建锋, 杜修力. 地基阻抗力时域递归参数的计算方法及程序实现[J]. 岩土工程学报, 2008, **30**(1): 34 – 40. (ZHAO Jian-feng, DU Xiu-li. Computation method and realization procedure for time-domain recursive parameters of ground resistance[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, **30**(1): 34 – 40. (in Chinese))
- [13] OPPENHEIM A V, WILLSKY A S, NAWBA S H. Signals & Systems[M]. 2nd ed. New Jersey: Prentice-Hall Inc, 1997.
- [14] HAN Y C, SABIN G C W. Impedances for radially inhomogeneous viscoelastic soil media[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1995, **121**(9): 939 – 947.
- [15] 黄茂松, 吴志明, 任 青. 层状地基中群桩的水平振动特性[J]. 岩土工程学报, 2007, **29**(1): 32 – 38. (HUANG Mao-song, WU Zhi-ming, REN Qing. Lateral vibration of pile groups in layered soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, **29**(1): 32 – 38. (in Chinese))
- [16] WANG C, YAN C Q, WANG J J, et al. Parametric optimization of steam cycle in PWR nuclear power plant using improved genetic-simplex algorithm[J]. Applied Thermal Engineering, 2017, **125**: 830 – 845.
- [17] 文学章, 尚守平. 层状地基中桩筏基础的动力阻抗研究[J]. 工程力学, 2009, **26**(8): 95 – 99. (WEN Xue-zhang, SHANG Shou-ping. Research on dynamic impedance functions of pile-raft foundation in layered soil[J]. Engineering Mechanics, 2009, **26**(8): 95 – 99. (in Chinese))