

DOI: 10.11779/CJGE202108014

# 基于 WUS 概率密度权重法的边坡稳定系统可靠度分析

姬 建<sup>1, 2</sup>, 王乐沛<sup>1</sup>, 廖文旺<sup>1</sup>, 张卫杰<sup>1, 2</sup>, 朱德胜<sup>3</sup>, 高玉峰<sup>\*1, 2</sup>

(1. 河海大学土木与交通学院, 江苏 南京 210029; 2. 岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 江苏 南京 210029;  
3. 扬州大学建筑科学与工程学院, 江苏 扬州 225127)

**摘要:** 复杂边坡工程中由于边坡土体分层或土体参数的不确定性等因素, 边坡失稳往往会在多个潜在失稳滑面, 因此, 采用单一临界确定性滑面或临界概率滑面对边坡系统可靠度进行分析会极大低估其失效概率。运用 WUS (Weighted Uniform Simulation) 方法对边坡系统可靠度进行了概率分析, 运用 4 个多层边坡算例演示 WUS 对于边坡系统可靠度分析的良好适用性。分析结果表明, 该方法对高维、隐式极限状态方程下的多层土边坡问题分析精度较高的同时, 可极大减少边坡模型计算样本数, 例如, 对于边坡可靠度分析 MCS 通常需要  $10^4$  以上的样本量, 而 WUS 仅需 500 组左右即可满足精度要求。通过对原始 WUS 算法的修正, 在样本量足够的情况下, 修正 WUS 法能更加高效计算得到复杂边坡系统失效概率, 并且可以自动摒弃冗余失效模式而得到较为准确的多失效模式所对应的多组可靠度参数设计点, 即 MPP (Most Probable Failure Point), 进而高效识别出多层土复杂边坡的代表性滑动面, 为边坡安全及失稳灾害防治提供重要的参考价值。

**关键词:** 边坡稳定; 多滑裂面识别; WUS 抽样模拟; 系统可靠度; 蒙特卡洛模拟

**中图分类号:** TU43      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-4548(2021)08-1492-10

**作者简介:** 姬 建(1983—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事边坡工程、地下工程、岩土工程可靠度分析等方面的教学和科研工作。E-mail: jian.ji@hhu.edu.cn。

## System reliability analysis of slopes based on weighted uniform simulation method

JI Jian<sup>1, 2</sup>, WANG Le-pei<sup>1</sup>, LIAO Wen-wang<sup>1</sup>, ZHANG Wei-jie<sup>1, 2</sup>, ZHU De-sheng<sup>3</sup>, GAO Yu-feng<sup>1, 2</sup>

(1. College of Civil and Transportation Engineering, Hohai University, Nanjing 210029, China; 2. Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and Embankment Engineering, Hohai University, Nanjing 210029, China; 3. College of Civil Science and Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225127, China)

**Abstract:** In practical engineering, due to the slope stratification or the spatial variability of soil properties, the slope will often fail along multiple potential sliding surfaces. Considering that using a single critical deterministic sliding surface or a critical probability sliding surface to analyze slope reliability will greatly underestimate the probability of failure, this study uses the weighted uniform simulation (WUS) method to analyze the system reliability of slopes. Four multi-layer slope cases are used to prove that the WUS has good applicability for system reliability analysis of slopes. High accuracy is obtained for multi-layer slope problems under high-dimensional and implicit limit state equations by this method, while the sample size is greatly reduced from  $10^4$  samples required by the direct Monte Carlo simulation to only about 500 samples under the same accuracy requirements. By modifying the original WUS algorithm, when the sample size is sufficient, the modified WUS can efficiently obtain the system failure probability and effectively abandon redundant failure modes to obtain accurate most probable failure points corresponding to multiple failure modes. Furthermore, the representative sliding surfaces of the multi-layer slope can be effectively and automatically identified, which provides important reference value for the later maintenance and failure prevention of slopes.

**Key words:** slope stability; multiple failure surfaces; weight uniform simulation; system reliability; Monte Carlo simulation

## 0 引言

由于土体参数的不确定性, 边坡工程中越来越多地使用可靠度分析方法进行边坡稳定性评估, 相较于传统确定性分析方法, 依据可靠度分析方法得到边坡

的失效概率, 可以获取边坡的整体风险水平, 使边坡

基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (51879091, 52079045, 41772287)

收稿日期: 2021-01-07

\*通信作者 (E-mail: yfgao66@163.com)

的设计更加安全可靠, 能够更真实地评价边坡安全性水平<sup>[1]</sup>。

在岩土工程的可靠度分析中, 较为常见的可靠度分析方法有一阶可靠度法 (the first-order reliability method, FORM)、高阶可靠度法、响应面法、蒙特卡洛模拟 (Monte Carlo simulation, MCS) 等。Low<sup>[2]</sup>运用 FORM 对香港红磡一处岩质边坡分析了可靠性; 蒋辽等<sup>[3]</sup>运用 MCS 分析得到暴雨工况下一处工程边坡的失效概率; Ji 等<sup>[4]</sup>在原始空间中导出基于 HL-RF 递归算法的 FORM 的简易算式, 提升了对隐式极限状态方程类边坡可靠度分析的简便性和适用性。

在实际工程问题中, 由于边坡分层或土体参数的不确定性等原因, 单体边坡往往会沿多个潜在失稳滑面破坏<sup>[5-8]</sup>, 即存在多个失效模式, 此时采用单一临界确定性滑面或临界概率滑面对边坡可靠度进行分析往往会使边坡大大低估失效概率。为了降低这类安全风险, 研究边坡系统可靠度至关重要。Low 等<sup>[9]</sup>采用一阶可靠度法结合 Ditlevsen 的上下限法对多层土坡进行系统可靠度分析; Ji 等<sup>[8]</sup>基于分层响应面法, 选取代表性滑面并据此建立二阶响应面方程, 再采用 FORM 结合 Ditlevsen 上下限法进行系统可靠度分析; Cho<sup>[10]</sup>采用多点一阶可靠度方法 (multi-point FORM) 计算边坡系统可靠度。FORM 对于单一失效模式的边坡可靠度分析精度足够且效率高, 但是面对多失效模式的问题时需要搜索确定多个最可能失效点 MPPs<sup>[11]</sup> (most probably failure points), 使用相对困难, 且对于具有高度非线性的极限状态函数问题, FORM 求解可靠度的精度不高。

另一方面, 曾鹏等<sup>[12]</sup>采用拟牛顿近似二阶法凭借少于 FORM 的计算量得到与经典二阶法(SORM)相当的系统失稳概率计算精度。杨智勇等<sup>[13]</sup>提出了基于广义子集模拟的边坡系统可靠度分析方法及代表性滑面识别方法。李静萍等<sup>[14]</sup>建立了基于大量潜在滑面的多重响应面, 计算系统失效概率, 并识别其中的代表性滑面。

## 1 蒙特卡洛模拟及 WUS 法

### 1.1 蒙特卡洛模拟 (MCS)

蒙特卡洛模拟 (MCS) 是一种基于大数定律的抽样方法, 其失效概率计算等效于失效样本点在全部样本点中出现的频率, 原理简单, 计算便捷, 能够得到相对精确的可靠度指标。

常规 MCS 往往需要大量的样本数据进行分析计算, 尤其是在面对小概率失效问题时, 计算量较大。工程边坡问题的失效概率范围一般为  $10^{-6} \sim 10^{-3}$ , 直接采用常规 MCS 进行分析时往往需要  $10^4 (10/P_f)$  以上的

样本量才能保证计算精度。当单个样本点需要进行的极限平衡分析过程较为复杂, 或者问题为隐式形式的极限状态方程, 没有直接的方程式表达, 需要进行有限元模型计算分析时,  $10^4$  的样本量会带来庞大的计算量<sup>[15]</sup>。针对该缺点, 众多学者提出了各类 MCS 改进方法: Ching 等<sup>[16]</sup>运用重要性抽样方法 (Importance sampling, IS) 在大量潜在滑动面上对边坡可靠度进行了有效评估; 吴振君等<sup>[17]</sup>用拉丁超立方抽样 (Latin hypercube sampling, LHS) 方法代替 MCS 的随机抽样, 考虑边坡参数的变异性及相关性进行边坡可靠度分析; Echard 等<sup>[18]</sup>提出主动学习可靠度算法 AK-MCS, 将克里金模型与 MCS 结合, 兼顾了可靠度计算精度和效率; Bichon 等<sup>[19]</sup>提出了有效的全局可靠度分析方法, 在不确定性空间全域中构建了克里金代理模型, 高效地获得精确的可靠度结果。

对于多失效模式的边坡可靠度的计算, MCS 具有良好的适用性。Fauriat 等<sup>[20]</sup>基于 AK-MCS 提出考虑系统可靠度理论的 AK-SYS, 进一步提高了对多失效模式问题的适用性。蒋水华等<sup>[21]</sup>采用随机响应面法, 结合 Hermite 多项式和 MCS 有效地识别边坡代表性滑面和计算边坡可靠度。张天龙等<sup>[22]</sup>引入了基于主动学习径向基函数 (ARBF) 代理模型的高效分析方法结合 MCS 计算边坡系统失效概率。对于 MCS 处理多失效模式的边坡可靠度问题, 主要考虑两个方面: ①如何进一步减小 MCS 计算量, 尤其当问题涉及有限元模拟及复杂极限平衡分析时; ②如何有效的识别出边坡的多个失效模式, 代表性滑面的有效搜索识别对后续边坡维护与治理具有重要参考意义。

### 1.2 WUS 概率密度权重法原理

Rashki 等<sup>[23]</sup>提出了 WUS (weighted uniform simulation) 概率密度权重法, 是一种改进的的 MCS 可靠度计算方法, 因其在进行 MCS 时用均匀分布代替随机变量的原有分布类型进行抽样, 样本点可以快速布满不确定性空间全域, 快速逼近 MPP 点, 所以其能在保证结果足够精确的情况下, 大大提高可靠度分析的计算效率, 降低计算成本。同时该方法还能在此基础上得到 MPP 最可能失效点, 便于对问题进行进一步的研究分析, 这是常规 MCS 所无法完成的。该算法应用方面, Ghohani Arab 等<sup>[24]</sup>采用逐层递增取值区间、低差异序列样本分布、局部 MPP 优化搜索等方法对 WUS 法进行了改进, 进一步提高了计算效率。

基于重要性抽样原理, WUS 法将其中的抽样方式改为均匀分布抽样<sup>[25]</sup>, 失效概率  $P_f$  改写为

$$P_f = \int \frac{I(x)f(x)}{U(x)} U(x) dx , \quad (1)$$

式中,  $U(x)$  为均匀分布概率密度函数, 当样本点在取值区间时, 其概率密度为 1 除以取值区间的长度。 $I(x)$  为二值变量, 当  $x$  在失效域时  $I(x)$  为 1, 在安全域时  $I(x)$  为 0:

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{L} & (x \in D) \\ 0 & (x \notin D) \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $L$  为随机变量取值区间的长度。

由于重要性抽样需要先验信息如通过 FORM 获取的设计点或者最大概率密度点等, 并且在处理高维问题时存在困难<sup>[26]</sup>, WUS 法运用蒙特卡洛积分思想, 将重要性抽样拓展到多个随机变量的高维问题中,  $P_f$  可进一步写为

$$P_f = \frac{\prod L_j}{N} \cdot \sum_{i=1}^N I(\mathbf{x}_i) f_X(\mathbf{x}_i) = \frac{\sum_{i=1}^N I(\mathbf{x}_i) f(\mathbf{x}_i)}{\prod L_j} \quad (3)$$

其中,  $\prod L_j$  为  $M$  个随机变量的取值区间长度乘积,  $N$  为样本数量, 又因为

$$\int f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \cong \left( \frac{\prod L_j}{N} \cdot \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_i) \right) = 1 \quad (4)$$

最终得到  $P_f$  为

$$P_f \cong \frac{\sum_{i=1}^N I(\mathbf{x}_i) f(\mathbf{x}_i)}{\frac{\prod L_j}{N} \cdot \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_i) \cdot \frac{N}{\prod L_j}} = \frac{\sum_{i=1}^N I(\mathbf{x}_i) f(\mathbf{x}_i)}{\sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_i)} \quad (5)$$

式中,  $f(\mathbf{x}_i)$  为联合概率密度函数, 当  $j$  个随机变量互相独立时,

$$f(\mathbf{x}_i) = f(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{Mi}) = f_1(x_{1i}) \cdot f_2(x_{2i}) \cdots f_M(x_{Mi}) \quad (6)$$

### 1.3 WUS 密度权重法步骤

(1) 运用 MCS 的原理, 产生大量原随机变量分布类型的数据, 用来确定产生大致的样本取值区间。

(2) 在样本取值区间内, 按照随机均匀分布重新生成均匀分布的  $M$  个随机变量的  $N$  个随机样本点。

(3) 定义随机均匀分布样本点的权重因子  $W_i$  为每个样本点  $\mathbf{x}_i$  的所有随机变量( $x_1, x_2, \dots, x_M$ )的概率密度函数  $f(x_{ji})$  乘积:

$$W_i = f_1(x_{1i}) \cdot f_2(x_{2i}) \cdots f_M(x_{Mi}) \quad (7)$$

式中,  $i=1, 2, \dots, N$ ,  $j=1, 2, \dots, M$ 。

(4) 失效概率  $P_f$  则定义为失效区域内样本点的权重因子值之和与全域内所有样本点的权重因子值之和的比值:

$$P_f = \frac{\sum_{i=1}^N I \cdot W_i}{\sum_{i=1}^N W_i} \quad (8)$$

在 WUS 方法中, 最可能失效点 MPP 则相应被定义为失效区域内, 权重因子  $W_i$  值最大的样本点处。

### 1.4 代表性滑面识别

祁小辉等<sup>[27]</sup>提出了边坡最危险滑动面随机分析方法, 能够有效地确定边坡最危险滑动面空间分布特征。边坡的破坏经常呈现多种失效模式的情况, 换而言之, 边坡可靠性分析中存在出现多个最可能失效点 MPP 的可能性。前述研究中的研究方法多概括为先识别代表性滑面, 并以此为基础采用响应面法等方法计算可靠度, 而因为 MCS 可以直接得出可靠度, 所以识别代表性滑面更多是为了给后续边坡防治提供依据<sup>[14]</sup>。原始 WUS 法只是求得单个 MPP, 即只识别出单一失效模式, 无法考虑边坡多种失效模式问题。

本文研究拟在原始 WUS 法基础之上进一步更新算法机制, 将所有失效样本点按照权重因子  $W_i$  大小降序排列。在确定权重因子  $W_i$  值最大的样本点作为第一个 MPP 点之外, 依据权重因子  $W_i$  的定义, 考虑到其值较小的样本点发生的可能性较小, 为进一步减少计算次数, 设定进行比较的权重因子  $W_i$  的阈值  $\varepsilon_0$ , 剔除较小点。经过多个算例的比较, 发现不同算例因其随机变量个数的不同, 其权重因子  $W_i$  的范围有较大区别。依据经验设置权重因子  $W_i$  的阈值  $\varepsilon_0$  为最大权重因子的平方  $W_{\max}^2$  时, 对于尤其是随机变量个数较多或者失效概率较大的算例, 可以极大地减少相互比较次数。对于这些权重因子  $W_i$  相对较大的失效样本点, 根据 Li 等<sup>[28]</sup>提出的识别代表性滑面的方法, 计算其与上一个保留的 MPP 点的相关性系数, 并设定相关性系数阈值  $\rho_0$  为 0.2, 作为与上一个 MPP 点不相关的界限, 当计算所得相关性系数大于 0.2 时, 该样本点被认为冗余失效模式<sup>[13]</sup>。由该算法自动比对搜索得到符合要求的多个 MPP 点, 即对应多个代表性滑面。

### 1.5 计算流程

根据滑动面上的抗剪强度与滑动力的比值或者抗剪力矩与滑动力矩的比值定义  $F_s$ , 但安全系数  $F_s$  的求解很多情况下为对隐式的极限状态方程的求解, 基于此, 各种数值模拟手段被使用, 如利用基于强度折减的有限元法、有限差分法等。在没有  $F_s$  具体表达式的情况下, 边坡稳定分析的极限状态函数<sup>[8]</sup>被定义为

$$g(\mathbf{x}) = F_s - 1 \quad (9)$$

通过对原始 WUS 算法的修改, 在样本量足够的情况下, 修正 WUS 能高效地得到系统失效概率并且有效地摒弃冗余失效模式而得到较为准确的多失效模式所对应的多个 MPP 点。基于 Excel VBA 平台, 本文利用简化毕肖普法进行边坡稳定性分析, 基于 jupyter notebook 平台, 进行 WUS 的 python 代码编写。python 与 excel 良好的交互性为数据的高效联动提供了便利, 具体流程如图 1 所示。主要步骤如下:

(1) Jupyter notebook 平台生成土体参数随机变

量在取值区间内均匀分布的样本点, 保存成 xlsx 格式, 并导入 Excel VBA 编写的简化毕肖普法程序, 修改 VBA 宏代码完成安全系数  $F_s$  的批量计算并保存成  $F_s.xlsx$  格式。

(2) WUS 程序读入不同样本量下的  $F_s.xlsx$ , 根据各样本点的随机变量的概率密度函数计算权重因子  $W_i$  及其极限状态函数  $g(x)=F_s-1$ , 进而计算边坡系统失效概率。

(3) 针对所有极限状态函数  $g(x)=F_s-1<0$  的失效样本点, 按照权重因子  $W_i$  对其降序排列, 确定权重因子  $W_i$  最大的样本点为第一个 MPP 点  $x_{p=1}(x_1, x_2, \dots, x_M)$ , 首先判断降序排列中的权重因子  $W_i$  大小是否大于设定阈值  $\varepsilon_0$ , 符合条件进而降序选取失效样本点计算与之前保留的所有 MPP 点  $x_p(x_1, x_2, \dots, x_M)$  的相关性系数  $\rho_{p,q}$  ( $p=1, 2, \dots, q$ ), 如果所有相关性系数  $\rho_{p,q}$  都小于设定阈值  $\rho_0$ , 即代表当前样本点与之前保留的所有 MPP 点都不相关, 记录该样本点, 重复计算直至降序排列中的权重因子  $W_i$  小于设定阈值  $\varepsilon_0$ 。

(4) 完成不同样本量的 WUS 边坡系统可靠度流程计算, 直至失效概率收敛。

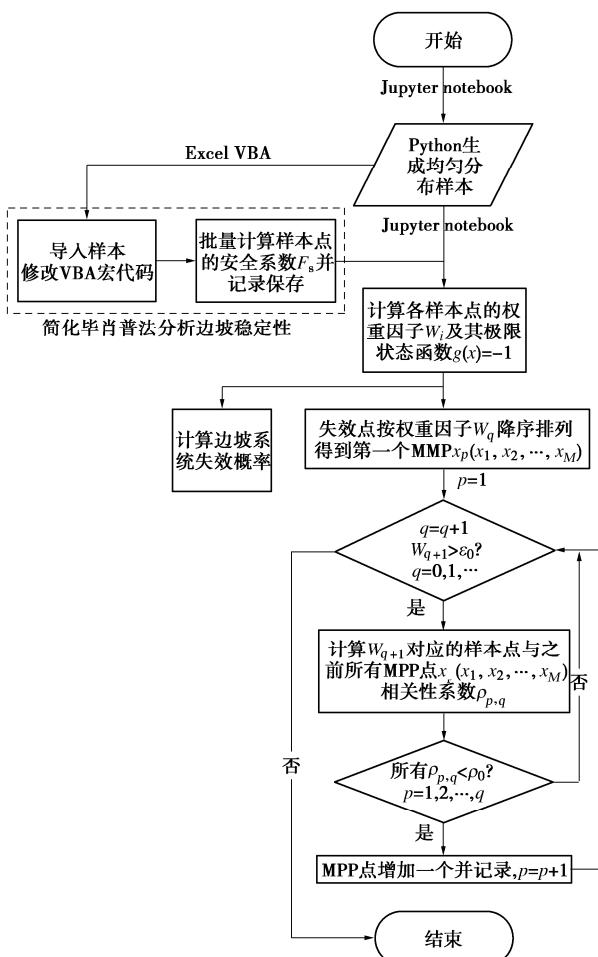


图 1 修正 WUS 法分析系统可靠度的计算流程图

Fig. 1 Flow chart for system reliability analysis of slopes by modified WUS

## 2 算例分析

### 2.1 两层不排水饱和黏土边坡

算例 1: 如图 2 所示, 运用修正 WUS 法计算两层不排水饱和黏土边坡的边坡系统可靠度, 验证提出的方法应对多失效模式边坡的适用性。Ji 等<sup>[8]</sup>、Low 等<sup>[9]</sup>、Ching 等<sup>[16]</sup>、蒋水华等<sup>[21]</sup>、杨智勇等<sup>[13]</sup>均对该边坡进行了系统可靠度分析。

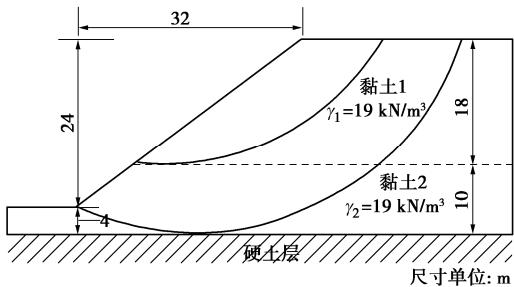


图 2 两层黏土边坡代表性滑动面

Fig. 2 Representative sliding surfaces of two-layer clay slope

两层黏土层均考虑将不排水剪切强度作为随机变量, 具体参数如表 1 所示。基于 Excel VBA 平台, 本篇研究运用简化毕肖普法对算例分别进行样本量为 100~500 的边坡稳定性批量分析。所有样本均通过基于 python 平台的 jupyter notebook 程序生成, 同时基于该程序, 将批量边坡稳定性分析结果导入并进行修正 WUS 可靠度分析, 得到不同样本量下可靠度指标  $\beta$  以及最可能失效点 MPP 结果如表 2 所示。

表 1 土体不确定性强度参数 (算例 1)

Table 1 Uncertain strength properties of soil (Case 1)

随机变量	分布类型	均值/kPa	变异系数
黏土 1 $c_u$	对数正态分布	120	0.3
黏土 2 $c_u$	对数正态分布	160	0.3

表 2 MPP 点随样本数量变化情况 (算例 1)

Table 2 Change of MPPs with sample size (Case 1)

样本数量	可靠度指标 $\beta$	MPP ( $c_{u1}/c_{u2}$ )
100	2.25	(47.24, 251.34) (76.39, 71.19)
200	2.69	(44.58, 160.79) (102.70, 49.77)
300	2.59	(50.34, 125.51) (72.45, 52.79)
400	2.66	(48.96, 119.39) (77.43, 57.43)
500	2.68	(47.95, 177.87) (75.67, 61.73)

从表 2 中不难发现在 5 次计算中, 都存在 2 组 MPP, 且所有样本量情况下相应 2 组 MPP 所对应的临界滑动面都区别较大, 说明该两层土边坡存在两种不同的失效模式, 当样本量为 500 时, 2 组 MPP 点 (47.95, 177.87 kPa) 以及 (75.67, 61.73 kPa) 对应的临界滑动面如图 2 中弧线所示, 其中, 处于 Clay-1 层且临界滑动面较小的为 MPP 点 (47.95, 177.87 kPa) 计算所得, 其不排水剪切强度  $c_{ul}$  较小; 而贯穿整个

表 3 不同方法边坡的系统可靠度结果比较 (算例 1)

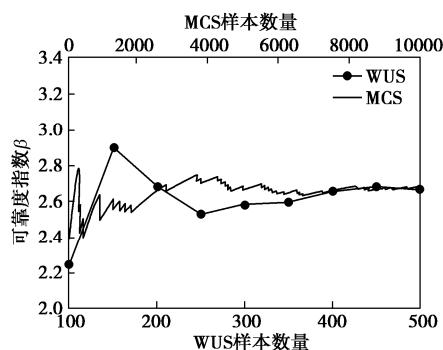
Table 3 Comparison of different system reliability analysis results of slopes (Case 1)

计算方法	失效概率 $P_f$	MPP ( $c_{u1}/c_{u2}$ )	样本数量	来源
WUS	$\mu_{P_f} = 0.42\%$ , $\sigma_{P_f} = 0.058\%$	(47.95, 177.87) (75.67, 61.73)	500	本文
MCS	$\mu_{P_f} = 0.44\%$ , $\sigma_{P_f} = 0.067\%$ $\pm 0.405\%$	—	10000 20000	Ching 等 <sup>[16]</sup> Ji 等 <sup>[8]</sup>
重要性抽样方法	$\mu_{P_f} = 0.41\%$ , $\sigma_{P_f} = 0.027\%$	—	1000	Ching 等 <sup>[16]</sup>
GSS 广义子集模拟	0.44%	—	1643	杨智勇等 <sup>[13]</sup>
分层响应面法	{0.402%, 0.411%}	—	—	Ji 等 <sup>[8]</sup>

边坡、滑动面较大的为 MPP 点 (75.67, 61.73 kPa)

计算所得, 其不排水剪切强度  $c_{u2}$  较小。

算例 1 使用不同方法计算所得可靠度指标  $\beta$  随样本量的变化趋势如图 3 所示, 可以看出可靠度指标  $\beta$  在 2.6 附近上下波动, 其中使用 MCS 所得的折线图显示当样本量达到 7000 之后可靠度指标  $\beta$  大致收敛, 而使用修正 WUS 法当样本量达到 400 后, 可靠度指标  $\beta$  即趋于稳定, 且两种方法最终结果吻合较好。当样本量为 500 时, 各样本点如图 4 所示均匀分布在二维不确定性取值空间内。其中, 蓝色点为未发生破坏点, 红色点为发生破坏点, 而红色曲线为示意极限状态面。不难发现, 红色点主要分布在不确定性取值空间前侧区域及右前侧部分区域, 即分别对应两层土边坡不排水剪切强度  $c_u$  较小的情况。权重因子  $W_i$  的大小如图 4 中呈现的柱状图所示, 柱状图越高表示该点权重因子  $W_i$  越大, 可以直观地看到权重因子  $W_i$  较大的样本点对应了图 4 中左侧及后侧两随机变量概率密度函数  $f(x_{ji})$  的较大的位置, 这些点对失效概率  $P_f$  的影响也更大。因均匀分布抽样, 样本点覆盖全域, 修正 WUS 法能快速逼近 MPP 点, 2 组 MPP 点如图 4 所示为红色柱状图较高且相关性较弱的两点。

图 3 可靠度指标  $\beta$  随样本数量变化情况 (算例 1)Fig. 3 Change of reliability index  $\beta$  with sample size (Case 1)

本文同样对该算例进行 3 次样本量为 500 的修正 WUS 可靠度计算, 与其他方法的结果对比如表 3 所示, 采用本文提出的 WUS 方法开展 3 次计算模拟

所得的失效概率均值  $\mu_{P_f}$  为 0.42%, 方差  $\sigma_{P_f}$  为 0.058%, 结果与其他方法较为一致, 但是满足精度所需的样本量大为减少, 尤其相比 MCS 大大降低, 简单实用。

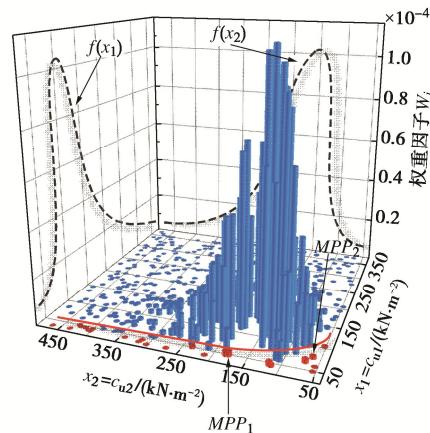


图 4 样本点权重因子柱状示意图 (算例 1)

Fig. 4 Columnar diagram of sample weight index (Case 1)

## 2.2 芝加哥国会街切坡

算例 2: 边坡进一步设置有 4 层不同土体性质的土层, 顶层为砂层, 下面部分为黏土层, 如图 5 所示。Chowdhury 等<sup>[7]</sup>、Ji 等<sup>[8]</sup>、Ching 等<sup>[16]</sup>都对该算例进行了研究, 3 层黏土层的不排水剪切强度均设为正态分布形式的土层随机变量, 具体参数设置如表 4 所示。

基于修正 WUS 法分析该边坡系统可靠度的过程与算例 1 保持一致, 系统失效概率  $P_f$  随样本量的变化趋势如图 6 所示, 可以看出算例 2 系统边坡失效概率  $P_f$  在 0.35 附近上下浮动, 整体较为平稳。

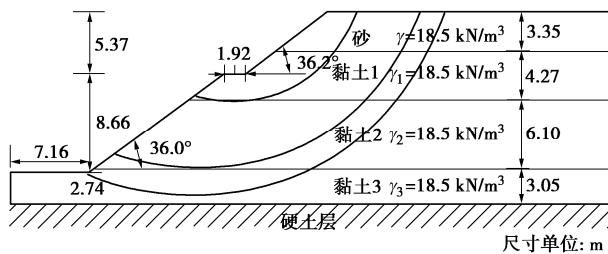


图 5 芝加哥国会街切坡代表性滑动面

Fig. 5 Representative sliding surfaces of Congress Street Cut

表 4 土体不确定性强度参数 (算例 2)

Table 4 Uncertain strength properties of soil (Case 2)

随机变量	分布类型	均值/kPa	变异系数
$c_{u1}$	正态分布	55	0.37
$c_{u2}$	正态分布	43	0.19
$c_{u3}$	正态分布	56	0.24

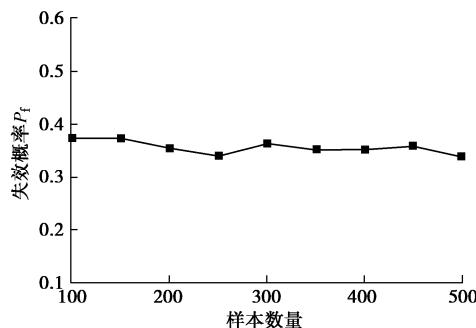
图 6 失效概率  $P_f$  随样本数量变化情况 (算例 2)Fig. 6 Change of probability of failure  $P_f$  with sample size (Case 2)

表 5 给出了修正 WUS 法计算 100~500 不同样本量下的样本点所得的边坡系统可靠度指标  $\beta$  及对应的 3 组 MPP 点。其中, 样本量为 300, 500 时, 3 组 MPP 所对应的临界滑动面区别较大, 如图 5 所示分别分布在 3 个不同的黏土层, 说明该四层土边坡存在 3 种不同的失效模式, 分别对应三层黏土层的不排水剪切强度  $c_u$  较小的情况。值得注意的是其他样本量情况下的 WUS 可靠度分析并没有同时得到 3 种不同的代表性滑动面, 3 组 MPP 点搜索临界滑动面结果只呈现黏土层 2 及黏土层 3 中的临界滑动面, 其中黏土层 3 中的 MPP 点搜索频率更高, 而黏土层 1 中临界滑动面并没有得到有效搜索, 分析其原因可能是该样本量下生成的样本点并没有覆盖黏土层 1 中的临界滑动面情况, 修正 WUS 在样本量较少的情况下对代表性滑面的搜索存在一定局限性。

表 5 MPP 点随样本数量变化情况 (算例 2)

Table 5 Change of MPPs with sample size (Case 2)

样本数量	可靠度指标 $\beta$	MPP ( $c_{u1}/c_{u2}/c_{u3}$ )
100	0.32	(43.33, 36.05, 48.72)
200	0.37	(63.01, 34.28, 37.86)
300	0.35	(58.15, 31.30, 44.63)
400	0.38	(49.28, 36.93, 41.30)
500	0.34	(42.38, 36.90, 49.77)

表 6 不同方法边坡的系统可靠度结果比较 (算例 2)

Table 6 Comparison of different system reliability analysis results of slopes (Case 2)

计算方法	失效概率 $P_f$	MPP ( $c_{u1}/c_{u2}/c_{u3}$ )	样本数量	来源
WUS	$\mu_{P_f} = 34\%, \sigma_{P_f} = 2\%$	(42.38, 36.90, 49.77) (39.05, 44.96, 34.13) (14.86, 49.61, 48.61)	500	本文
Slide V6.0 MCS	$\pm 36.76\%$	—	10000	Ji 等 <sup>[8]</sup>
分层响应面法	{31.22%, 41.84%}	—	—	Ji 等 <sup>[8]</sup>
Ditlevsen 上下限法	{27.4%, 44.7%}	—	—	Chowdhury 等 <sup>[7]</sup>

不同可靠度分析方法计算该算例的系统可靠度结果对比如表 6 所示, 修正 WUS 计算所得系统失效概率  $P_f$  的均值  $\mu_{P_f}$  为 34%, 标准差  $\sigma_{P_f}$  为 2%, 精度满足工程实际要求, 但相较于常规 MCS, 其计算量大大减少, 并且在样本量较大时能同时识别出 3 个代表性滑面, 这对类似边坡工程滑坡治理有重要参考意义。

### 2.3 不排水软土地基上的黏性土路堤

算例 3: 如图 7 同样取自 Chowdhury 等<sup>[7]</sup>的研究, Ji 等<sup>[8]</sup>对其进行分层响应面法的可靠度分析计算。上层为填土路堤, 下层为软黏土地基层, 其所有土体不确定性强度参数如表 7 所示。

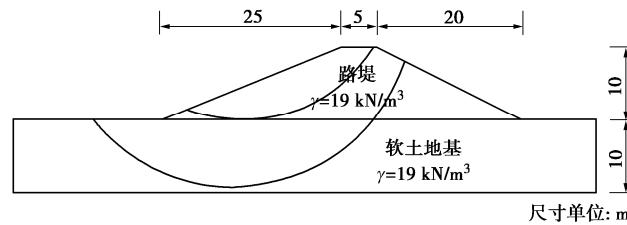


图 7 软土地基上的黏性土路堤代表性滑动面

Fig. 7 Representative sliding surfaces of embankment resting on soft clay foundation

根据计算流程, 对该算例进行样本量为 100~500 的可靠度计算及多 MPP 点搜索, 得到的系统失效概率  $P_f$  在 0.30~0.40 上下浮动 (图 8), 当样本数量达到 400 之后, 曲线波动逐渐平缓。进一步对稳定性计算结果进行分析, 如图 9 所示, 当样本量为 500 时, 均匀分布产生的样本点覆盖三维不确定性取值空间全域。根据简化毕肖普法结果对样本点标注, 红色及橘黄色点为安全系数  $F_s$  小于 1.0, 黄色及绿色点为安全系数  $F_s$  大于 1.0, 示意极限状态面橘色点和黄色点之间 (图 9 红色曲面)。可以直观地看出路堤失效破坏发生在取值空间的底部、左侧以及后方, 即 3 个土体参数随机变量值较小处, 安全系数  $F_s$  大致呈阶梯状

递增。图 9 表明, 高维问题中失效区域与安全区域交界处多有交错, 失效区域形状较为复杂。

表 7 土体不确定性强度参数 (算例 3)

Table 7 Uncertain strength properties of soil (Case 3)

随机变量	位置	分布类型	均值	变异系数
内聚力 $c$ /kPa	路堤	正态分布	10	0.20
软黏土基层	正态分布	40	0.20	
摩擦角 $\varphi$ /°	路堤	正态分布	12	0.25

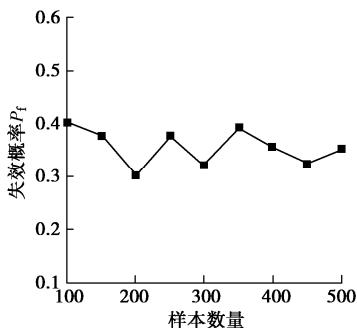


图 8 失效概率  $P_f$  随样本数量变化情况 (算例 3)

Fig. 8 Change of probability of failure  $P_f$  with sample size (Case 3)

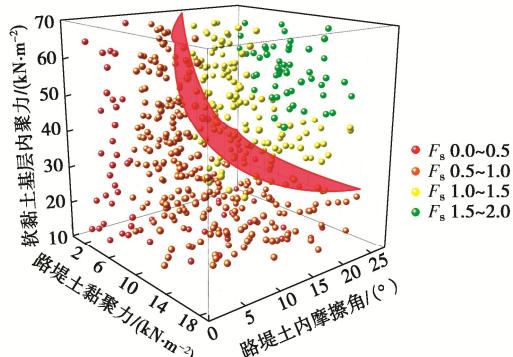


图 9 样本点分布 (算例 3)

Fig. 9 Distribution of samples (Case 3)

100~500 不同样本量下, 算例 3 经修正 WUS 法分析所得的的系统可靠度指标  $\beta$  及对应的 2 组 MPP 点如表 8 所示。根据算法设定, 相关性系数大于 0.2 的样本点被视作冗余失效模式而被排除, 每一次分析的 MPP 点结果均为 2 个, 表明该路堤算例有两种失效模式, 其对应的代表性滑面如图 7 所示, 第一类临界滑动面圆弧位于上层路堤底部, 第二类临界滑动面贯穿路堤上下层, 圆弧位于地基层底部。按表 8 沿样

表 9 不同方法边坡的系统可靠度结果比较 (算例 3)

Table 9 Comparison of different system reliability analysis results of slopes (Case 3)

计算方法	失效概率 $P_f$	MPP ( $c$ 路堤/ $\varphi$ 路堤/ $c$ 基层)	样本数量	来源
WUS	$\mu_{P_f} = 32.38\%$ , $\sigma_{P_f} = 2.58\%$	(7.69, 10.09, 40.13) (11.46, 13.19, 12.19)	500	本文
Slide V6.0 MCS	±36.1%	—	2000	Ji 等 <sup>[8]</sup>
分层响应面法	{31.22%, 41.84%}	—	—	Ji 等 <sup>[8]</sup>
Ditlevsen 上下限法	{27.4%, 44.7%}	—	—	Chowdhury 等 <sup>[7]</sup>

本数量递增方向分析 MPP 点搜索结果, 发现 2 组 MPP 点区别明显而各自则较为聚集收敛, 搜索结果较好; 一类为路堤土层的土体强度较低的情况, 一类为地基层土体强度参数偏低的情况, 与代表性滑面相对应。

表 8 MPP 点随样本数量变化情况 (算例 3)

Table 8 Change of MPPs with sample size (Case 3)

样本数量	可靠度指标 $\beta$	最可能失效点 MPP ( $c$ 路堤/ $\varphi$ 路堤/ $c$ 基层)
100	0.24	(8.58, 11.88, 31.60), (11.42, 16.04, 10.80)
200	0.52	(10.86, 10.45, 29.99), (11.57, 15.35, 9.98)
300	0.46	(9.68, 8.07, 36.63), (10.10, 15.90, 13.09)
400	0.37	(9.68, 8.19, 44.93), (10.68, 15.03, 10.97)
500	0.35	(9.29, 8.53, 41.68), (10.04, 18.34, 13.65)

修正 WUS 法与其他边坡系统可靠度方法分析算例 3 的结果对比如表 9 所示, 本文方法经过 3 次计算模拟 500 组样本量下的系统失效概率  $P_f$  均值  $\mu_{P_f}$  为 32.38%, 标准差  $\sigma_{P_f}$  为 2.58%, 结果与其他方法基本一致, 但是计算量较小且能够有效识别两个代表性滑动面。

## 2.4 ACADS 1(c)算例

算例 4: 如图 10 所示, 为澳大利亚计算机辅助设计协会赞助支持的一系列边坡稳定性分析算例之一, 是极限状态方程为隐式的 3 层土边坡算例, 其砂土层的内摩擦角为 38°, 其黏土层的 4 个土体强度参数如表 10 所示, 均为独立随机变量。Ji 等<sup>[8]</sup>运用分层响应面法对其进行可靠度分析, Zhang 等<sup>[29]</sup>则将 Hassan 等<sup>[6]</sup>的搜索代表滑动面方法与 MCS 以及均值一次二阶矩法 (the mean first-order reliability method) 结合分析边坡系统失效概率, Zhu 等<sup>[30]</sup>利用基于机器学习的高斯过程回归方法对该算例进行了分析, Tun 等<sup>[31]</sup>则运用遗传算法计算了三维边坡的系统失效概率。

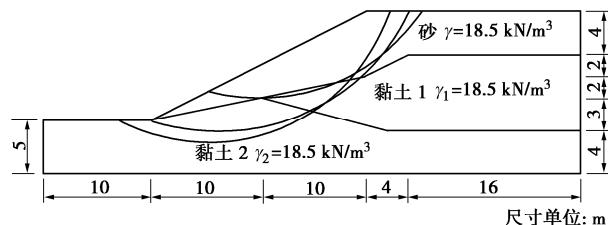


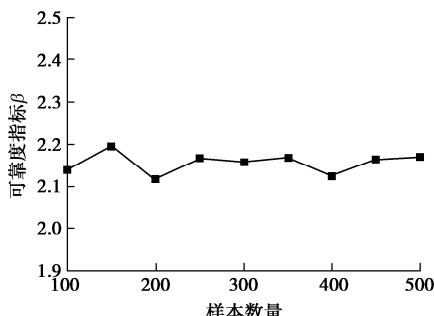
图 10 ACADS 1(c)边坡代表性滑动面

Fig. 10 Representative sliding surfaces of ACADS 1(c) problem

表 10 土体不确定性强度参数 (算例 4)

随机变量	分布类型	均值	变异系数
黏聚力 $c/\text{kPa}$	黏土 1	正态分布	5.3
	黏土 2	正态分布	7.2
摩擦角 $\phi/(\text{°})$	黏土 1	正态分布	23
	黏土 2	正态分布	20

运用修正 WUS 法分析的系统可靠度指标  $\beta$  结果随样本数量变化如图 11 所示, 系统可靠度指标  $\beta$  围绕 2.16 在 2.1~2.2 浮动, 当样本量超过 250 后, 浮动趋于平缓。100~500 组样本量下算例 4 的 MPP 点搜索结果如表 11 所示, 共有 3 个 MPP 点对应图 10 中 3 个代表性滑动面。第一类 MPP 点为黏土层 2 黏聚力  $c_2$  以及摩擦角  $\phi_2$  偏小的情况; 第二类 MPP 点为黏土层 1 黏聚力  $c_1$  以及摩擦角  $\phi_1$  偏小的情况; 第三类则为两黏土层强度参数均较小的情况。

图 11 可靠度指标  $\beta$  随样本数量变化情况 (算例 4)Fig. 11 Change of reliability index  $\beta$  with sample size (Case 4)

同样对该算例进行 3 组样本量为 500 的 WUS 法分析, 得到的边坡系统失效概率  $P_f$  均值  $\mu_{P_f}$  为 1.49%, 标准差  $\sigma_{P_f}$  为 0.21%, 与其他方法的分析结果对比如表 12 所示, 不难发现结果吻合较好, 表明修正 WUS 法针对高维问题 (4 个随机变量) 以及隐式极限状态函

表 11 MPP 点随样本数量变化情况 (算例 4)

Table 11 Change of MPPs with sample size (Case 4)

样本数量	可靠度指标 $\beta$	最可能失效点 MPP ( $c_1/\phi_1 / c_2/\phi_2$ )
100	2.14	(14.27, 3.49, 12.33, 4.84)
200	2.12	(21.40, 5.47, 12.84, 2.27)
300	2.16	(20.50, 4.60, 11.40, 4.62)
400	2.12	(21.56, 7.20, 11.27, 4.95)
500	2.17	(17.73, 4.93, 10.58, 7.91)

表 12 不同方法边坡的系统可靠度结果比较 (算例 4)

Table 12 Comparison of different system reliability analysis results of slopes (Case 4)

计算方法	失效概率 $P_f$	MPP ( $c_1/\phi_1 / c_2/\phi_2$ )	样本数量	来源
WUS	$\mu_{P_f} = 1.49\%$ , $\sigma_{P_f} = 0.21\%$	(17.73, 4.93, 10.58, 7.91) (6.54, 2.21, 28.87, 5.85) (9.38, 6.92, 9.56, 12.29)	500	本文
MCS	1.33%	—	50000	Zhang 等 <sup>[29]</sup>
Slide V6.0 MCS	±1.40%	—	20000	Ji 等 <sup>[8]</sup>
	1.22%	—	1000000	Zhu 等 <sup>[30]</sup>
分层响应面法	{1.08%, 1.30%}	—	—	Ji 等 <sup>[8]</sup>

数的多层土边坡系统可靠度分析同样具有较好的适用性, 同时, 具有计算量小、简单高效且能搜索代表性滑面的优点。

### 3 结 论

本文根据修正 WUS 法所提供的可靠度分析算法, 针对分层土边坡的多失效模式情况, 修正了搜索 MPP 点的算法部分, 对 4 个边坡系统可靠度进行了分析, 得出以下 4 点结论。

(1) 4 个算例表明 WUS 法对于边坡系统可靠度分析有很好的适用性, 原理简单, 高效实用。对高维、隐式极限状态方程下的多层边坡问题分析精度较高。

(2) 比较重要性抽样方法计算边坡可靠度, WUS 法不需要提供先验信息且对于高维问题的可靠性分析同样使用简单。不同于常规 MCS, 该方法极大地减少了样本数量, 对于边坡可靠性分析, MCS 通常需要  $10^4$  以上的样本量, 而 WUS 法仅需 500 组左右即可满足精度要求, 降低了 MCS 复杂极限平衡分析或者有限元分析所需庞大的计算量。

(3) 在改进了 MPP 搜索算法后, 修正 WUS 法可以有效地自动识别出多层边坡的多个代表性滑动面, 为边坡后期维护防治提供参考。但是其在样本量不足时, 会出现代表性滑动面搜索不全的情况, 存在一定局限, 需进一步研究。

(4) Python 平台赋予了该套方法更多拓展的可能性, 通过 Python 平台与 MS-Excel 的结合, 完成可靠度分析; 同样还可以充分利用有限元软件如 ABAQUS 等的 Python 接口<sup>[32]</sup>, 边坡稳定性分析交由数值模拟软件完成, 简便地进行复杂岩土工程问题可靠度分析。

## 参考文献:

- [1] 蒋水华, 刘 贤, 黄发明, 等. 考虑多参数空间变异性的降雨入渗边坡失稳机理及可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2020, 42(5): 900 - 907. (JIANG Shui-hua, LIU Xian, HUANG Fa-ming, et al. Failure mechanism and reliability analysis of soil slopes under rainfall infiltration considering spatial variability of multiple soil parameters[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2020, 42(5): 900 - 907. (in Chinese))
- [2] LOW B K. Reliability analysis of rock slopes involving correlated nonnormals[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2007, 44(6): 922 - 935.
- [3] 蒋 边, 喻 兴, 刘林洁, 等. 基于蒙特卡罗模拟的填方边坡可靠度分析[J]. 地下空间与工程学报, 2017, 13(增刊2): 693 - 697. (JIANG Liao, YU Xing, LIU Lin-jie, et al. Reliability analysis on filled slope based on Monte Carlo simulation[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2017, 13(S2): 693 - 697. (in Chinese))
- [4] JI J, KODIKARA J K. Efficient reliability method for implicit limit state surface with correlated non-Gaussian variables[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2015, 39(17): 1898 - 1911.
- [5] OKA Y, WU T H. System reliability of slope stability[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1990, 116(8): 1185 - 1189.
- [6] HASSAN A M, WOLFF T F. Search algorithm for minimum reliability index of earth slopes[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1999, 125(4): 301 - 308.
- [7] CHOWDHURY R N, XU D W. Geotechnical system reliability of slopes[J]. Reliability Engineering & System Safety, 1995, 47(3): 141 - 151.
- [8] JI J, LOW B K. Stratified response surfaces for system probabilistic evaluation of slopes[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2012, 138(11): 1398 - 1406.
- [9] LOW B K, ZHANG J, TANG W H. Efficient system reliability analysis illustrated for a retaining wall and a soil slope[J]. Computers and Geotechnics, 2011, 38(2): 196 - 204.
- [10] CHO S E. First-order reliability analysis of slope considering multiple failure modes[J]. Engineering Geology, 2013, 154: 98 - 105.
- [11] XIAO N C, YUAN K, ZHOU C N. Adaptive kriging-based efficient reliability method for structural systems with multiple failure modes and mixed variables[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 359: 112649.
- [12] 曾 鹏, 陈 语, 李天斌. 基于拟牛顿近似二阶法的岩土工程系统可靠性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2018, 37(3): 726 - 733. (ZENG Peng, CHEN Yu, LI Tian-bin. System reliability of geotechnical problems using quasi-Newton approximation-based sorm[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2018, 37(3): 726 - 733. (in Chinese))
- [13] 杨智勇, 李典庆, 曹子君, 等. 基于广义子集模拟的土坡系统可靠度分析[J]. 岩土力学, 2018, 39(3): 957 - 966, 984. (YANG Zhi-yong, LI Dian-qing, CAO Zi-jun, et al. System reliability of soil slope using generalized subset simulation[J]. Rock and Soil Mechanics, 2018, 39(3): 957 - 966, 984. (in Chinese))
- [14] 李静萍, 程勇刚, 李典庆, 等. 基于多重响应面法的空间变异土坡系统可靠度分析[J]. 岩土力学, 2016, 37(1): 147 - 155, 165. (LI Jing-ping, CHENG Yong-gang, LI Dian-qing, et al. System reliability analysis of spatially variable soil slopes using the multiple response surfaces method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, 37(1): 147 - 155, 165. (in Chinese))
- [15] 陈松坤, 王德禹. 基于神经网络的蒙特卡罗可靠性分析方法[J]. 上海交通大学学报, 2018, 52(6): 687 - 692. (CHEN Song-kun, WANG De-yu. An improved Monte Carlo reliability analysis method based on neural network[J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2018, 52(6): 687 - 692. (in Chinese))
- [16] CHING J, PHOON K-K, HU Y-G. Efficient Evaluation of reliability for slopes with circular slip surfaces using importance sampling[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, American Society of Civil Engineers, 2009, 135(6): 768 - 777.
- [17] 吴振君, 王水林, 葛修润. LHS 方法在边坡可靠度分析中的应用[J]. 岩土力学, 2010, 31(4): 1047 - 1054. (WU Zhen-jun, WANG Shui-lin, GE Xiu-run, et al. Application of Latin hypercube sampling technique to slope reliability analysis[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(4): 1047 - 1054. (in Chinese))
- [18] ECHARD B, GAYTON N, LEMAIRE M. AK-MCS: an active learning reliability method combining Kriging and

- Monte Carlo Simulation[J]. Structural Safety, 2011, **33**(2): 145 – 154.
- [19] BICHON B J, MCFARLAND J M, MAHADEVAN S. Efficient surrogate models for reliability analysis of systems with multiple failure modes[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2011, **96**(10): 1386 – 1395.
- [20] FAURIAT W, GAYTON N. AK-SYS: An adaptation of the AK-MCS method for system reliability[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2014, **123**: 137 – 144.
- [21] 蒋水华, 祁小辉, 曹子君, 等. 基于随机响应面法的边坡系统可靠度分析[J]. 岩土力学, 2015, **36**(3): 809 – 818. (JIANG Shui-hua, QI Xiao-hui, CAO Zi-jun, et al. System reliability analysis of slope with stochastic response surface method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, **36**(3): 809 – 818. (in Chinese))
- [22] 张天龙, 曾鹏, 李天斌, 等. 基于主动学习径向基函数的边坡系统可靠度分析 [J]. 岩土力学, 2020, **41**(9): 3098 – 3108. (ZHANG Tian-long, ZENG Peng, LI Tian-bin, et al. System reliability analyses of slopes based on active-learning radial basis function[J]. Rock and Soil Mechanics, 2020, **41**(9): 3098 – 3108. (in Chinese))
- [23] RASHKI M, MIRI M, AZHDARY MOGHADDAM M. A new efficient simulation method to approximate the probability of failure and most probable point[J]. Structural Safety, 2012, **39**: 22 – 29.
- [24] GHOHANI ARAB H, GHASEMI M R, MIRI M. Enhancing weighted uniform simulation for structural reliability analysis[J]. Iran University of Science & Technology, 2013, **3**(4): 635 – 651.
- [25] RASHKI M, MIRI M, MOGHADDAM M A. Closure to “a new efficient simulation method to approximate the probability of failure and most probable point” (Struct. Safety 2012;39:22–9)[J]. Structural Safety, 2014, **46**: 15 – 16.
- [26] IBRAHIM Y. Observations on applications of importance sampling in structural reliability analysis[J]. Structural Safety, 1991, **9**(4): 269 – 281.
- [27] 祁小辉, 李典庆, 周创兵, 等. 考虑土体空间变异性边坡最危险滑动面随机分析方法[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(4): 745 – 753. (QI Xiao-hui, LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing, et al. Stochastic analysis method of critical slip surfaces in soil slopes considering spatial variability[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(4): 745 – 753. (in Chinese))
- [28] LI L, WANG Y, CAO Z. Probabilistic slope stability analysis by risk aggregation[J]. Engineering Geology, 2014, **176**: 57 – 65.
- [29] ZHANG J, HUANG H W, JUANG C H, et al. Extension of Hassan and Wolff method for system reliability analysis of soil slopes[J]. Engineering Geology, 2013, **160**: 81 – 88.
- [30] ZHU B, PEI H, YANG Q. An intelligent response surface method for analyzing slope reliability based on Gaussian process regression[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2019, **43**(15): 2431 – 2448.
- [31] TUN Y W, LLANO-SERNA M A, PEDROSO D M, et al. Multimodal reliability analysis of 3D slopes with a genetic algorithm[J]. Acta Geotechnica, Springer, 2019, **14**(1): 207 – 223.
- [32] 任斌斌, 苏立君, 张崇磊, 等. 基于 Python 语言和 Abaqus 平台的边坡可靠度计算自动化算法开发[J]. 土木与环境工程学报(中英文), 2019, **41**(5): 67 – 72. (REN Bin-bin, SU Li-jun, ZHANG Chong-lei, et al. A slope reliability automated algorithm based on python language and Abaqus platform[J]. Journal of Civil and Environmental Engineering, 2019, **41**(5): 67 – 72. (in Chinese))