

DOI: 10.11779/CJGE202104016

非饱和土中圆柱孔扩张问题不排水解答及吸力影响效应分析

张亚国¹, 翟张辉², 梁发云^{*3}, 李同录²

(1. 长安大学建筑工程学院, 陕西 西安 710061; 2. 长安大学地质工程与测绘学院, 陕西 西安 710054; 3. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092)

摘要: 圆柱孔扩张理论为沉桩挤土及旁压试验分析等提供了理论基础, 然而已有研究多是针对饱和土展开, 在非饱和土相关工程中并不适用。基于修正剑桥临界状态模型, 对非饱和土中不排水条件下的圆柱孔扩张问题进行求解。在考虑非饱和土吸力效应的情况下推导土体应力-应变关系式, 并引入反映吸力与比体积之间关系的液相本构方程。在此基础上联立圆柱孔周围土单元平衡微分方程, 最终将非饱和土中的圆柱孔扩张问题归结为求解一阶偏微方程组的问题。通过引入辅助变量将所有方程转至拉格朗日系下, 以弹塑性边界上的应力及比体积作为初值条件对其进行求解。结果表明: 当非饱和吸力增大时, 圆柱孔周围土体应力和扩孔压力均随之增大, 说明土体出现了吸力硬化效应; 对于初始比体积较小的土体, 随着塑性区内的径向位置增加, 比体积和吸力会出现先增大后减小的变化特征, 说明圆柱孔在不排水扩张过程中局部土体发生了剪胀。所采用的本构关系较为简洁, 参数易于确定, 便于在非饱和土相关的工程问题得到实际应用。

关键词: 非饱和土; 不排水条件; 圆柱孔扩张; 吸力; 弹塑性解

中图分类号: TU431 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2021)04-0734-09

作者简介: 张亚国(1984—), 男, 博士, 副教授, 主要从事土力学与基础工程的教学科研工作。E-mail: yaguo Zhang29@chd.edu.cn。

Critical cylindrical cavity expansion in unsaturated soil under undrained conditions incorporating suction effects

ZHANG Ya-guo¹, ZHAI Zhang-hui², LIANG Fa-yun³, LI Tong-lu²

(1. School of Civil Engineering, Chang'an University, Xi'an 710061, China; 2. School of Geological Engineering and Surveying, Chang'an

University, Xi'an 710054, China; 3. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The cylindrical cavity expansion theory provides the theoretical basis for analysis of pile installation and pressuremeter tests. However, most of the studies are conducted on cavity expansion in saturated soil, and are unsuitable for solving the engineering problem in unsaturated soil. Therefore, based on the critical state soil model, the cylindrical cavity expansion in unsaturated soil under undrained conditions is solved. The stress-strain relationship is derived considering suction effects. Meanwhile, a constitutive equation for the relationship between the suction and the void volume is introduced. Combing the radial equilibrium equation, the formulation of the problem is reduced to solving a system of the first-order ordinary differential equations. Introducing an auxiliary variable, all of the differential equations are transferred to the Lagrangian description and solved by taking the values at the elasto-plastic boundary as the initial value. The results show that the soil stresses and the cavity expansion pressure increase as the suction increases, which can be regarded as the suction-stiffening effects. For the soil with low initial ratio volume, the partial volume and the suction in the plastic zone firstly increase, and then decrease, which implies that the shear dilatancy occurs during the cavity expansion. The results have a potential application in the related projects owing to the simple constitutive relation and available parameters.

Key words: unsaturated soil; undrained condition; cylindrical cavity expansion; suction; elasto-plastic solution

0 引言

圆孔扩张理论在岩土工程中有着广泛的应用, 如沉桩挤土效应分析^[1-2]、旁压试验结果的解释^[3]以及隧道围岩应力计算^[4]等; 该类工程问题均可简化为求解

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目(41807242); 中央高校基本科研业务费专项项目(300102281202)

收稿日期: 2020-06-08

*通信作者 (E-mail: fyliang@tongji.edu.cn)

岩土体中圆柱孔扩张的问题。为此, 在过去几十年内, 国内外学者针对圆孔扩张问题开展了大量研究, 并取得了诸多有价值的成果^[5-7]。然而, 这些圆孔扩张解答多是针对单相介质或两相饱和土提出, 在非饱和黄土、膨胀土等地区的工程问题中并不适用。

近年来, 非饱和土中的圆孔扩张问题引起研究人员的关注。与饱和土相比, 非饱和土中扩孔问题的求解更为复杂。这是因为非饱和土是三相介质, 需要采用包含净应力和吸力的双应力状态变量对其力学行为进行描述; 另外, 与饱和土不同, 非饱和土中体应变与含水率变化并非一一对应。胡伟等^[8]对非饱和土中圆孔扩张问题的求解进行了初步尝试, 其解答中将净应力和吸力统一看作粒间力, 考虑了该力引起的土体体积变化, 但没有考虑吸力与持水度之间关系(土水特征曲线 SWCC)的影响。Russell 研究团队^[9-10]基于已有的相似解技术^[11], 先后假定土体屈服后服从修正剑桥模型和统一界面模型, 求解了非饱和土中圆孔扩张问题。在此基础上, Cheng 等^[12]进一步讨论了应力和位移约束边界对圆孔扩张过程的影响。上述成果很好地促进了非饱和土圆孔扩张理论的发展。然而, 已有解答是基于相似解技术展开, 求解过程需要对偏应力和平均应力进行简化, 这使得该解答无法对各应力分量进行确定。为此, Chen 等^[13]摒弃了传统的相似解技术, 在不对偏应力和平均应力进行任何简化的情况下, 提出了基于 MCC 模型的饱和土圆柱孔扩张问题精确解。

鉴于此, 翟张辉等^[14]通过引入非饱和土有效应力表达, 在考虑吸力效应的情况下, 将 Chen 等^[13]的饱和排水解拓展至非饱和土中, 求解了完全排水条件下非饱和土中的圆孔扩张问题。然而, 该解答在非饱和土相关工程问题中的应用范围有限。这是因为非饱和土的渗透性要远小于土体饱和状态时的渗透性, 故而在沉桩挤土、静力触探及旁压试验过程中, 非饱和土中的水分很难排出, 因此该类工程问题对应的是不排水条件。另一方面, 与排水情况相比, 不排水条件下圆孔扩张问题更为复杂, 此时塑性区的吸力是一变量而非常量。具体而言, 尽管不排水条件下土体的质量含水率不变, 然而由于土中气体的排出, 使得孔隙在扩孔过程中被压缩, 土体饱和度发生了变化; 根据非饱和土 SWCC 可知, 在既定的增湿或减湿路径下, 土体饱和度与吸力大小是一一对应的, 因而吸力也随之发生了变化。从方程求解角度而言, 完全排水条件下的扩孔问题中未知变量有 4 个, 包括 3 个应力分量和比体积, 此时非饱和吸力为一已知常数; 而不排水条件下, 未知变量增加到 5 个, 即还需在原来基础上求

解扩孔过程中吸力的变化。为此, 本文拟在原有的固相方程组中进一步引入能够反映吸力与体应变关系的液相本构方程, 对不排水条件下扩孔问题进行求解。与 Chen 等^[15]采用的方法相比, 本文采用了更为简化的本构模型, 计算参数易于确定。本文研究成果将为非饱和土中沉桩挤土效应及旁压试验结果分析等提供理论依据。

1 非饱和土中圆柱孔扩张力学模型

假定圆柱孔初始孔径为 a_0 , 当孔径从 a_0 扩张到 a 时, 孔周任一点从 r_0 移动至 r 位置, 扩孔压力从初始有效应力 σ'_0 增加到 σ'_a , 如图 1 所示。圆孔周围形成一个半径为 r_p 的塑性区, 在塑性区外为弹性区。应力和应变均以压为正。

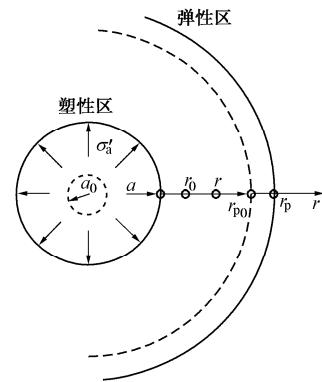


图 1 圆柱孔扩张模型

Fig. 1 Model of cylindrical cavity expansion

在极坐标系内, 任一土单元的位置可表示为 (r, θ, z) , 其总应力和有效应力分量可分别表示为 σ_r , σ_θ , σ_z 和 σ'_r , σ'_θ , σ'_z 。与饱和土中类似, 非饱和土中柱孔周围土单元的总应力平衡微分方程可以表示为

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad . \quad (1)$$

根据 Bishop^[16], 非饱和土中的有效应力公式可表示为

$$\sigma' = \sigma_n + \chi s \quad . \quad (2)$$

式中 σ_n 为净应力, 等于总应力减去大气压, 即 $\sigma - u_a$; χ 为有效应力参数; s 为吸力, 等于大气压减去孔隙水压, 即 $u_a - u_w$ 。因此, 非饱和土中平衡微分方程表示成有效应力的形式为

$$\frac{d\sigma'_r}{dr} + \frac{\sigma'_r - \sigma'_\theta}{r} - \psi \frac{ds}{dr} = 0 \quad , \quad (3)$$

式中, $\psi = \frac{d(\chi s)}{ds}$ 。 χ 为有效应力参数, 对于完全饱和的土和干土其值分别为 1 和 0; 对于非饱和土, χ 可以表示为^[10]

$$\chi = \begin{cases} 1 & \frac{s}{s_e} \leq 1 \\ \left(\frac{s}{s_e}\right)^{-0.55} & \frac{s}{s_e} \geq 1 \end{cases}, \quad (4)$$

式中, s_e 为进气值, 即土体从饱和状态过渡到非饱和状态时的吸力。

根据临界状态弹塑性理论, 在不做任何假定的情况下, 平均有效应力 p' 和偏应力 q 可表示为

$$p' = \frac{1}{3}(\sigma'_r + \sigma'_\theta + \sigma'_z), \quad (5)$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma'_r - \sigma'_\theta)^2 + (\sigma'_\theta - \sigma'_z)^2 + (\sigma'_z - \sigma'_r)^2]}. \quad (6)$$

2 非饱和土中圆柱孔扩张的应力分析

2.1 弹性区应力

根据 Hooke 定律, 弹性区内应力 - 应变关系可用增量形式表示为

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_r^e \\ d\epsilon_\theta^e \\ d\epsilon_z^e \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{Bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d\sigma'_r \\ d\sigma'_\theta \\ d\sigma'_z \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

式中, ν 为泊松比, E 为弹性模量, 可由比体积 v 、平均有效应力 p' 等表示为^[17]

$$E = \frac{3(1-2\nu)vp'}{\kappa}. \quad (8)$$

联立式 (3), 式 (7) 和式 (8), 弹性区的有效应力分量可表示为^[13]

$$\sigma'_r = \sigma'_0 + (\sigma'_p - \sigma'_0) \left(\frac{r_p}{r} \right)^2, \quad (9)$$

$$\sigma'_\theta = \sigma'_0 - (\sigma'_p - \sigma'_0) \left(\frac{r_p}{r} \right)^2, \quad (10)$$

$$\sigma'_z = \sigma'_0, \quad (11)$$

式中, 假定土体中各向初始应力相等, 均为 σ'_0 , 则根据式 (5), 平均有效应力 $p'_0 = \sigma'_0$, σ'_p 为弹塑性边界处的平均有效应力。

2.2 非饱和土本构模型

随着扩孔压力增大, 柱孔孔壁及周围土体依次从弹性状态发生屈服, 进入塑性状态。根据 Schnaid 等^[3], 非饱和土屈服后可用修正剑桥临界状态模型进行描述, 该屈服面在 $p' - q$ 平面上为一椭圆, 其表达式为

$$f(p', q, p'_c) = \frac{q^2}{M^2 p'} + p' - p'_c = 0, \quad (12)$$

式中, M 为临界状态线 (CSL) 斜率, 可以假定为一与土体吸力无关的材料参数^[17]。

p'_c 为非饱和土的有效前期固结压力, 其大小不仅受土体塑性应变硬化影响, 还与非饱和吸力硬化效应

有关^[18], 即

$$p'_c = p'_{c0} \exp \left[\frac{v \epsilon_p^p}{\lambda - \kappa} \right] + \gamma(s), \quad (13)$$

式中, λ 和 κ 分别为 $v - \ln p'$ 平面内正常压缩线和回弹线斜率, v 为比体积, 其值等于 $e+1$ (e 为孔隙比)。 ϵ_p^p 为塑性应变, $\gamma(s)$ 为吸力硬化效应引起的 p'_c 增量, 在 $v - p'$ 平面上指的是临界状态线由吸力 s 变化引起的偏移量。 p'_{c0} 为饱和土前期固结应力, 可表示为^[18]

$$p'_{c0} = \exp \left[\frac{N - v - \kappa \ln p'}{\lambda - \kappa} \right], \quad (14)$$

式中, N 为 $v - p'$ 平面上正常压缩线上当 $p' = 1$ 时所对应的比体积。

2.3 塑性区应力

在塑性区, 某一点土体的塑性应变增量可通过塑性势求应力的偏导进行确定。此处采用相关联流动法则, 即假定塑性势面 g 与屈服面 f 重合。结合屈服面方程式 (12), 各应变增量可表示为^[6]

$$d\epsilon_r^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma'_r} = \Lambda \left(\frac{p'(M^2 - \eta^2)}{3} + 3(\sigma'_r - p') \right), \quad (15a)$$

$$d\epsilon_\theta^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma'_\theta} = \Lambda \left(\frac{p'(M^2 - \eta^2)}{3} + 3(\sigma'_\theta - p') \right), \quad (15b)$$

$$d\epsilon_z^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma'_z} = \Lambda \left(\frac{p'(M^2 - \eta^2)}{3} + 3(\sigma'_z - p') \right), \quad (15c)$$

式中, $d\epsilon_r^p$, $d\epsilon_\theta^p$ 和 $d\epsilon_z^p$ 为 r , θ 和 z 方向的塑性应变增量, Λ 为塑性乘子, $\eta = q/p'$ 为应力比。

不论饱和土还是非饱和土, 在不排水条件下, 土体的质量含水率均为常数。然而, 与饱和土不同的是, 非饱和土扩孔过程中, 由于孔隙气体的排出, 土体比体积 v 不再是常数, 这使得塑性区土体的饱和度发生变化。根据 SWCC 曲线可知, 吸力 s 也随之发生变化。由此可见, 在不排水条件下的非饱和土圆孔扩张问题中, 未知变量有 5 个, 分别为 σ'_r , σ'_θ , σ'_z , v 和 s ; 而目前仅有 3 个方程, 即式 (15a), (15b) 和 (15c)。为此, 需要进一步引入反映吸力和比体积之间关系的水相本构方程, 以及有效应力和吸力之间的平衡微分方程。

根据体积含水率、饱和度以及孔隙比之间的关系, 吸力与比体积增量关系可以表示为^[18]

$$dv_w = \psi dv - v [c'_m - \psi^2 c] ds, \quad (16)$$

式中, $c'_m = -G_s \beta/v$, G_s 为土粒相对质量密度, β 为土水特征曲线斜率, c 反映的是土体压缩性, 可表示为 $\kappa p'/v$, v_w 为水的体积, ψ 的含义见式 (3)。

在不排水条件下, 土中水的体积变化为 0, 即 $dv_w = 0$, 此时式 (16) 可写成

$$dv = \frac{v(c'_m - \psi^2 c)}{\psi} ds. \quad (17)$$

结合应力-应变关系式(15)以及比体积与吸力的关系式(17), 塑性区微分方程可表示(推导详见附录)为

$$\begin{Bmatrix} D\sigma'_r \\ D\sigma'_\theta \\ D\sigma'_z \\ Ds \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D\epsilon_r \\ D\epsilon_\theta \\ D\epsilon_z \\ Dv \end{Bmatrix} \quad (18)$$

为了强调土体固相和液相本构方程是追踪某一土单元的拉格朗日坐标描述(与空间位置无关), 并与欧拉坐标系下的平衡微分方程进行区分, 式(18)中统一用 $D\sigma'_r$, $D\sigma'_\theta$, $D\sigma'_z$ 和 $D\epsilon_r$, $D\epsilon_\theta$, $D\epsilon_z$ 表示某一土单元在径向、切线、竖向上的应力和应变增量。 b_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) 和 Δ 均是包含有效应力 σ'_r , σ'_θ , σ'_z , v 和 s 的显式表达(附录中式 A9a~A9n)。

对于圆柱孔扩张问题, 其竖向应变 $D\epsilon_z = 0$, 因此体应变增量 $D\epsilon_v = D\epsilon_r + D\epsilon_\theta$; 又由于 $D\epsilon_v = -\frac{Dv}{v}$, $D\epsilon_\theta = -\frac{Dr}{r}$, 因此, 式(18)又可写成

$$D\sigma'_r = \frac{1}{\Delta} \left[b_{11} \left(-\frac{Dv}{v} \right) - (b_{12} - b_{11}) \frac{Dr}{r} + b_{14} Dv \right], \quad (19a)$$

$$D\sigma'_\theta = \frac{1}{\Delta} \left[b_{21} \left(-\frac{Dv}{v} \right) - (b_{22} - b_{21}) \frac{Dr}{r} + b_{24} Dv \right], \quad (19b)$$

$$D\sigma'_z = \frac{1}{\Delta} \left[b_{31} \left(-\frac{Dv}{v} \right) - (b_{32} - b_{31}) \frac{Dr}{r} + b_{34} Dv \right], \quad (19c)$$

$$Ds = \frac{b_{44}}{\Delta} Dv. \quad (19d)$$

由于欧拉系的平衡微分方程式(3)不能直接与拉格朗日系的式(19)联立求解5个未知变量, 因此需要引入辅助变量 ξ , 将式(3)转化到拉格朗日系下。

根据Chen等^[13], ξ 可表示为

$$\xi = \frac{u_r}{r} = \frac{r - r_0}{r}, \quad (20)$$

式中, u_r 为径向位移。

对式(20)求导可得

$$\frac{Dr}{r} = \frac{D\xi}{1-\xi}. \quad (21)$$

考虑塑性区扩孔产生的大应变, du_r/dr 可表示为

$$\frac{du_r}{dr} = 1 - \frac{v_0}{v(1-\xi)}, \quad (22)$$

式中, v_0 为初始比体积, dr/dr 为关于 r 的空间导数。注意此处不要与追踪某一土单元的 Du_r/Dr 混淆, 对于固定位置 r_0 , $Du_r/Dr=1$ ^[13]。

将式(20)~(22)代入平衡微分方程式(3), 得

$$\left(\frac{D\sigma'_r}{D\xi} - \psi \frac{Ds}{D\xi} \right) \left(1 - \xi - \frac{v_0}{v(1-\xi)} \right) + \sigma'_r - \sigma'_\theta = 0, \quad (23)$$

式中, $D/D\xi$ 为土单元关于 ξ 的物质导数。

将式(21)代入式(19)中, 并联立式(23), 可组成求解不排水条件下非饱和土中圆柱孔扩张问题的方程组:

$$\frac{D\sigma'_r}{D\xi} = -\frac{b_{11}}{\Delta} \alpha - \frac{b_{12} - b_{11}}{\Delta(1-\xi)} + \frac{b_{14}}{\Delta} \alpha, \quad (24a)$$

$$\frac{D\sigma'_\theta}{D\xi} = -\frac{b_{21}}{\Delta} \alpha - \frac{b_{22} - b_{21}}{\Delta(1-\xi)} + \frac{b_{24}}{\Delta} \alpha, \quad (24b)$$

$$\frac{D\sigma'_z}{D\xi} = -\frac{b_{31}}{\Delta} \alpha - \frac{b_{32} - b_{31}}{\Delta(1-\xi)} + \frac{b_{34}}{\Delta} \alpha, \quad (24c)$$

$$\frac{Ds}{D\xi} = \frac{b_{44}}{\Delta} \frac{Dv}{D\xi}, \quad (24d)$$

式中,

$$\alpha = \frac{Dv}{D\xi} = \left\{ \frac{\sigma'_r - \sigma'_\theta}{1 - \xi - v_0 / [v(1-\xi)]} - \frac{b_{12} - b_{11}}{\Delta(1-\xi)} \right\} / \left\{ \frac{b_{11}}{\Delta v} - \frac{b_{14}}{\Delta} + \psi \frac{b_{44}}{\Delta} \right\}. \quad (24e)$$

需要说明的是, 当式(24)中 $Dv=0$ (体变为0), 且 $Ds=0$ (吸力为0或常吸力) 时, 该解答将退化至文献[6]饱和土中圆柱孔扩张的不排水解答; 当式(24)中 $Dv \neq 0$, 而 $Ds=0$ 时, 该解答将退化至文献[13]饱和土中圆柱孔扩张的排水解答。

2.4 弹塑性边界应力

在弹性区, 平均应力保持不变, 即 $\Delta p'=0$, 因此, 弹塑性边界上 ξ_p ($(u_r/r)_{r=r_p}$) 的平均有效应力等于初始值, 即

$$p'(\xi_p) = p'_0, \quad (25)$$

式中, p'_0 为初始平均有效应力。

将式(25)代入式(12)中, 弹塑性边界的偏应力可表示为

$$q(\xi_p) = M \sqrt{p'(\xi_p) [p'_c - p'(\xi_p)]}, \quad (26)$$

式中, 前期固结压力 p'_c 可由式(13)计算。

根据式(5), (6), (9), (10)和(11), 弹塑性边界处有效应力分量为

$$\sigma'_r(\xi_p) = p'_0 + \sqrt{\frac{q(\xi_p)^2}{3}}, \quad (27a)$$

$$\sigma'_\theta(\xi_p) = p'_0 - \sqrt{\frac{q(\xi_p)^2}{3}}, \quad (27b)$$

$$\sigma'_z(\xi_p) = p'_0. \quad (27c)$$

弹塑性边界处的比体积和吸力分别等于初始比体积 v_0 和 s_0 :

$$v(\xi_p) = v_0, \quad (27d)$$

$$s(\xi_p) = s_0. \quad (27e)$$

至此, 控制方程式(24)及边界条件方程式(27a)~(27e) 中已全部用 ξ 代替了 r ; 然而, 方程求解后尚需将变量从 ξ 转化为 r , 该步骤可通过下式完成:

$$\frac{r}{a} = \exp \left(\int_{\xi(a)}^{\xi} \frac{d\xi}{1 - \{v_0/[v(\xi)(1-\xi)] - \xi\}} \right), \quad (28)$$

式中, $\xi(a)$ 对应的是孔壁上 u_r/r 的值。

3 结果验证及吸力效应讨论

选取非饱和高岭土的力学参数^[18]作为模型计算参数, 其中 $M=0.85$, $N=2.64$, $\lambda=0.14$, $\kappa=0.015$, $\nu=0.3$, $G_s=2.67$, $s_e=85$ kPa, $\gamma(s)=0.6s$, $\beta=-0.023/s$, 初始平均净应力 $p_n=p'-\chi s=200$ kPa, 假定初始孔径与最终扩孔半径比值 $a_0/a=0.25$ 。为了验证本文方法的可靠性, 首先取吸力 s 为 0, 使得本文的解退化至饱和土中, 并与文献[13]中的饱和排水解进行对比。此外, 在非饱和土参数及弹塑性边界处应力值 (p'_0 和 q) 均一致的情况下, 在 $p'-q$ 平面内与传统的相似解方法^[11]进行对比。在此基础上, 取不同的初始吸力和比体积, 讨论吸力效应对不同初始比体积非饱和土中扩孔引起的应力分布及扩孔压力等的影响。

3.1 退化解答

当土体吸力为 0 时, 土体呈饱和状态, 则控制微分方程(式(24))中, 反映吸力与比体积关系的液相本构关系式(24d)不再需要; 同时 $s=0$ 使得式(23)中 $Ds=0$, 式(24)中的 b_{14} , b_{24} 和 b_{34} 均为 0; 此时该解答退化至文献[13]中的饱和排水解。图 2 为退化后计算的扩孔压力随孔径的变化, 随着孔径的增大, 扩孔压力先快速增大, 当圆柱孔扩大至约 3 倍初始孔径时, 扩孔压力逐渐趋于一稳定值。

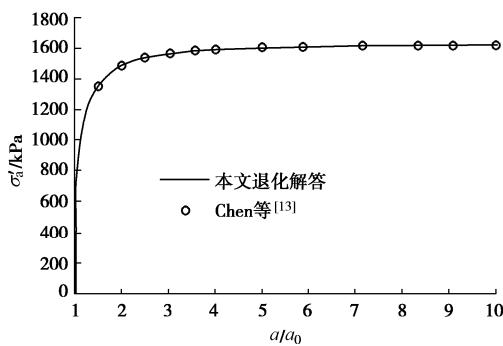


图 2 扩孔压力随孔径的变化

Fig. 2 Variation of cavity pressure with cavity radius

图 3 为圆孔周围土体应力分量 σ'_r , σ'_θ 和 σ'_z 及比体积 v 的径向变化。在弹性区, v 为常数, 弹性区内应力分量 σ'_r , σ'_θ 和 σ'_z 三者之和为常数 $p'_0 p'_0$ 。在塑性区, 由于受扩孔挤压作用, v 随土体水分排出而减小, σ'_r 随

着径向距离的增加呈单调递减, σ'_θ 和 σ'_z 则呈非单调的变化特征。由图 2 和 3 可见, 本文的解答可以完全退化至文献[13]饱和土中圆孔扩张排水解答。

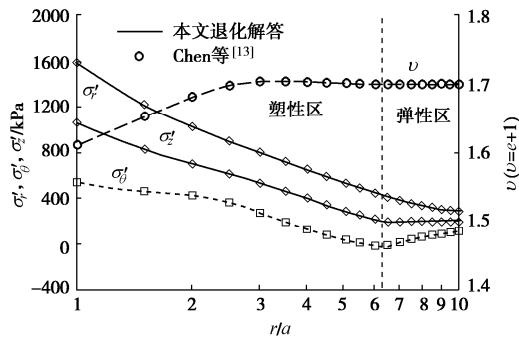


图 3 圆孔周围土体应力及比体积的径向变化

Fig. 3 Radial variation of soil stress components and void ratio in surrounding soil

3.2 与已有方法对比

为了进一步验证本文方法的可靠性, 在 $p'-q$ 平面内将本文方法计算的非饱和土圆柱孔不排水扩张引起的应力路径与传统相似解法进行对比。由图 4 可见, 在弹性区内, p' 始终为常数, 应力路径为平行于 q 轴的直线。对于初始比体积 $v_0=1.70$ 的非饱和土, 跟重超固结土类似, 土体先从“干”侧到达屈服面, 之后随着 p' 的增大, 应力路径近似地平行于 p' 轴, 在靠近屈服面位置平移, 之后快速增大至临界状态线。

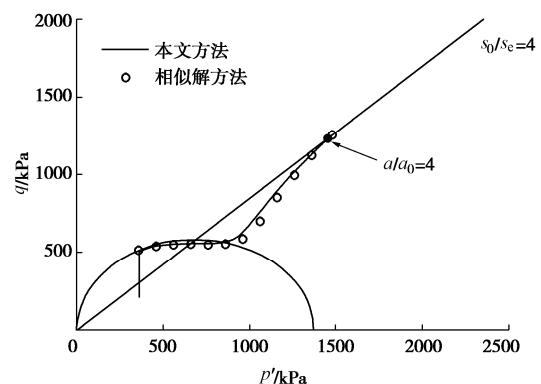


图 4 $p'-q$ 平面内的应力路径

Fig. 4 Stress paths in $p'-q$ plane

对比两种方法可见, 在 $p'-q$ 平面内, 两种方法确定的应力路径接近, 这一定程度上说明本文的计算方法是可靠的。但需要注意的是, 与已有相似解方法相比, 本文方法还能够计算圆孔周围各应力分量的大小(见图 5~7), 且能直接确定扩孔压力随孔径的变化(见图 10)。

3.3 吸力效应的影响分析

将初始吸力 s_0 分别取 340, 680 kPa, 初始比体积

v_0 取1.85, 1.70和1.55, 通过对初始条件的正交组合, 分析吸力对不同初始比体积的非饱和土中圆孔周围应力及扩孔压力等的影响。

图5为 $v_0=1.85$ 时, 扩张圆孔引起的周围土体应力分量、比体积及吸力沿径向的变化。由图5(a)可以看出, 在非饱和土塑性区, 由于受扩孔挤压作用, v 随土体中气体的排出而减小。在不排水的情况, 土体饱和度 S_r 随着 v 的减小而增大, 根据SWCC曲线可知, 吸力 s 会随之减小; 这也是塑性区内越靠近圆孔, v 和 s 越小的原因。此外, 在塑性区, σ'_r 和 σ'_z 随着径向距离的增加呈单调递减, σ'_θ 则呈先减小后增大到再减小的变化过程。对比图5(a)和(b)可见, 随着吸力增大, 圆孔周围应力增大, 说明土体出现了吸力硬化现象。

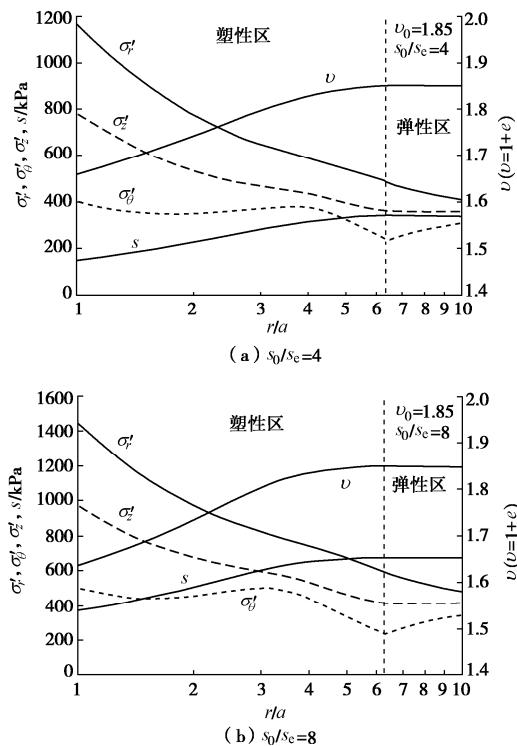


图5 $v_0=1.85$ 的孔周土体应力、比体积及吸力的径向变化

Fig. 5 Radial variation of soil stress, void ratio and suction in surrounding soil with $v_0=1.85$

图6为 $v_0=1.70$ 时圆孔周围各应力分量、比体积及吸力沿径向的变化。与图3相比, v_0 较小, 土体较为致密; 因此, 当圆孔扩张到相同孔径 a 时, 孔壁处的应力较图3中有显著增大。对比图6(a)和6(b)可见, 孔壁处应力随着 s 的增大而增大。

图7为 $v_0=1.55$ 的情况。与图5和图6不同的是, 比体积在塑性区随着 r/a 的增大, 呈先增大后减小的变化趋势。这说明周围土体在扩孔挤土过程中, 局部出现了剪胀现象。而且 s 越大, 剪胀效应越明显。

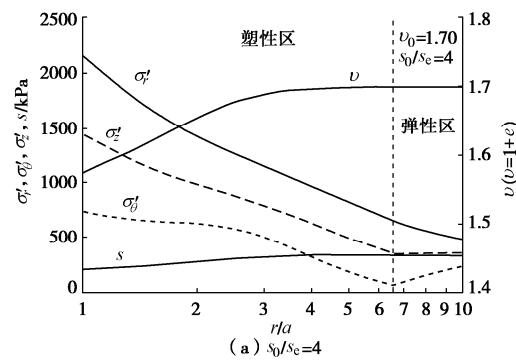


图6 $v_0=1.70$ 的孔周土体应力、比体积及吸力的径向变化

Fig. 6 Radial variation of soil stress, void ratio and suction in surrounding soil with $v_0=1.70$

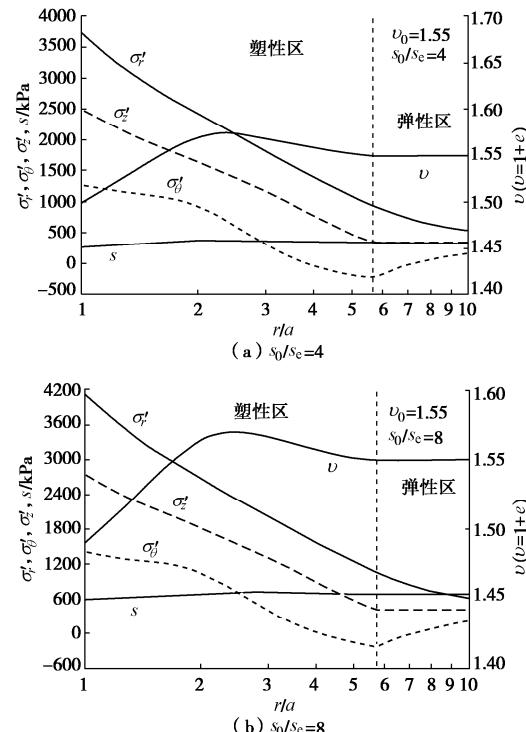


图7 $v_0=1.55$ 的孔周土体应力、比体积及吸力的径向变化

Fig. 7 Radial variation of soil stress, void ratio and suction in surrounding soil with $v_0=1.55$

图8为扩孔过程中 $e - \ln p'$ 平面内的应力路径。在弹性区, 平均有效应力 p' 和 e 均为常数, 因此, 在塑性区的应力路径为初始值对应的一个点。在塑性区,

土单元比体积 v 将随着 p' 变化。由图 8 可见, 当初始比体积 v_0 较大时 ($v_0=1.85, 1.70$), 随着 p' 的增大, v 先缓慢减小, 之后快速减小至临界状态线 (CSL); 当 v_0 较小时 ($v_0=1.55$), 随着 p' 的增大, v 先增大, 后逐渐减小至临界状态线 (CSL) 上。这说明对于 v_0 较大的土体 (土体疏松), 在不排水扩孔过程中, 土体比体积随着平均有效应力的增大而减小 (压密); 但对于 v_0 较小的土体 (土体致密), 在扩孔初始阶段, 土体比体积随着 p' 的增大而增大, 说明土体出现了剪胀的现象。

对比不同初始吸力 s_0 下的应力路径可知, 随着吸力的增大, 临界状态线向右发生了偏移, 而土体达到临界状态时所对应的平均有效应力 p' 随 s_0 增大而增大, 这说明土体出现了吸力硬化现象。

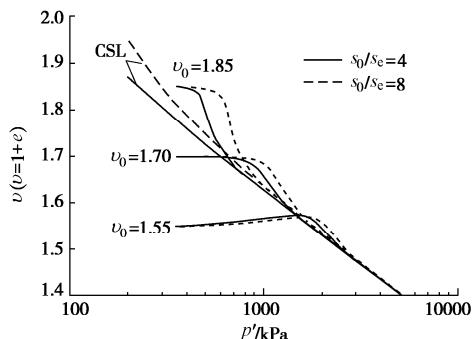


图 8 $e - \ln p'$ 平面内的应力路径
Fig. 8 Stress paths in $e - \ln p'$ plane

图 9 反映的是圆孔周围土体吸力增量 Δs 随径向位置的变化。通过对 Δs 除以 p'_{\lim} (将孔壁应力分量代入式 (5) 中可得) 进行无量纲化。由图 9 可见, 随着距圆孔距离的减小, 吸力逐步减小 (Δs 为负值), 这是由于非饱和土中孔隙压缩, 饱和度增大所致。然而, 对于初始比体积为 1.55 的致密土体, 在扩孔过程中, Δs 出现正值, 说明该位置的吸力有所增大。根据非饱和土 SWCC 可知, 该位置对应的饱和度应减小。对于不排水的情况, 只有土体体积增大才能引起饱和度减小, 这进一步说明了圆孔周围土体局部发生剪胀现象。

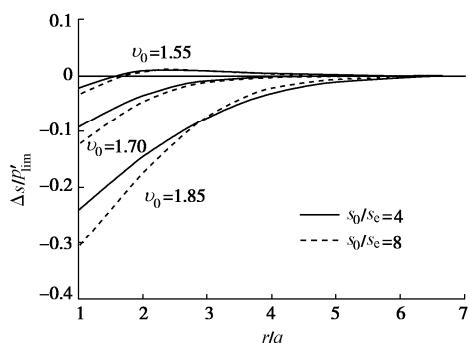


图 9 圆孔周围吸力增量随径向位置的变化
Fig. 9 Variation of suction increment with radial positions

图 10 为扩孔压力随着孔径的变化曲线。由图 10 可见, 在圆柱孔扩张初始阶段, 扩孔压力快速增大, 随后逐渐趋于一定值。当土体初始比体积 v_0 较大时, 土体较为疏松, 对应的扩孔压力较小; 当土体 v_0 较小时, 对应的扩孔压力明显增大。对于同一初始比体积 v_0 , 扩孔压力随着吸力的增大而增大。

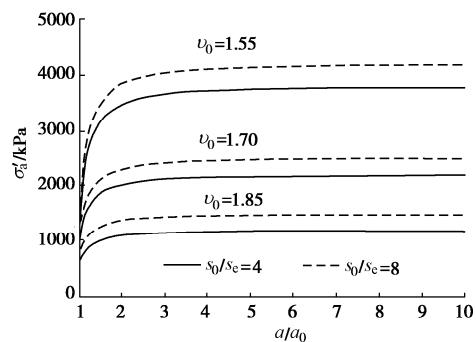


图 10 扩孔压力随孔径的变化
Fig. 10 Variation of cavity pressure with cavity radius

4 结 论

本文在已有的饱和土圆孔扩张理论基础上, 通过引入反映吸力和比体积之间关系的液相本构方程, 求解了不排水条件下非饱和土中圆柱孔扩张问题。通过与传统相似解方法对比, 验证了本文方法的可靠性。主要得出以下结论:

(1) 对于同一初始孔隙比 (比体积) 的非饱和土, 当吸力增大时, 圆柱孔周围应力、扩孔压力以及临界状态压力均随之增大, 而比体积降幅减小; 这说明非饱和土出现了吸力硬化现象。

(2) 对于初始孔隙比较小的非饱和土, 随着有效平均应力的增大, 其比体积并非单调减小, 而是在圆孔周围塑性区出现先增大后减小的变化特征, 其对应的吸力也呈同样变化趋势, 这说明对于较为密实非饱和土, 在不排水扩孔过程中出现了剪胀现象。

(3) 与传统相似解方法相比, 本文方法没有对平均有效应力和偏应力作任何简化, 因而能够确定扩孔过程中周围土体的各应力分量, 且能够合理计算扩孔压力随孔径的变化, 这为非饱和土中沉桩挤土及旁压试验等分析提供了理论依据。

此外, 本文方法中非饱和土前期固结压力表达采用的是吸力解耦的形式, 即假定吸力使临界状态线在 $v - p'$ 平面上发生了平移; 对应吸力耦合情况下的解析, 将在后续研究中进一步分析。

参 考 文 献:

- [1] RANDOLPH M F, CARTER J P, WROTH C P. Driven piles in

- clay—the effects of installation and subsequent consolidation [J]. *Géotechnique*, 1979, **29**(4): 361 – 393.
- [2] LEE F H, JUNEJA A, TAN T S. Stress and pore pressure changes due to sand compaction pile installation in soft clay [J]. *Géotechnique*, 2004, **54**:1 – 16.
- [3] SCHNAID F, OLIVEIRA L A K, GEHLING W Y Y. Unsaturated constitutive surfaces from pressuremeter tests[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2004, **130**(2): 174 – 185.
- [4] MARSHALL A M. Tunnel-pile interaction analysis using cavity expansion methods[J]. *J Geotech Geoenviron Eng*, 2012, **138**(10): 1237 – 1246.
- [5] 梁发云, 陈龙珠. 应变软化 Tresca 材料中扩孔问题解答及其应用[J]. 岩土力学, 2004, **25**(2): 261 – 265. (LIANG Fa-yun, CHEN Long-zhu. Analytical solution to cavity expansion in strain-softening soils with Tresca yield criterion and its applications[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2004, **25**(2): 261 – 265. (in Chinese))
- [6] CHEN S L, ABOUSLEIMAN N Y. Exact undrained elastoplastic solution for cylindrical cavity expansion in modified Cam Clay soil[J]. *Géotechnique*, 2012, **62**(5): 447 – 456.
- [7] LI L, LI J P, SUN D A. Anisotropically elasto-plastic solution to undrained cylindrical cavity expansion in K_0 -consolidated clay[J]. *Comput Geotech*, 2016, **73**: 83 – 90.
- [8] 胡伟, 刘明振. 非饱和土中球形孔扩张的弹塑性分析[J]. 岩土工程学报, 2006, **28**(10): 1292 – 1297. (HU Wei, LIU Ming-zhen. Elastic-plastic solution of expansion of sphere cavity in unsaturated soils[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2006, **28**(10): 1292 – 1297. (in Chinese))
- [9] RUSSELL A R, KHALILY N. On the problem of cavity expansion in unsaturated soils[J]. *Comput Mech*, 2006, **37**(4): 311 – 330.
- [10] YANG H W, RUSSELL A R. Cavity expansion in unsaturated soils exhibiting hydraulic hysteresis considering three drainage conditions[J]. *Int J Numer Anal Meth Geomech*, 2015, **39**: 1975 – 2016.
- [11] COLLINS I F, STIMPSON J R. Similarity solutions for drained and undrained cavity expansion in soils[J]. *Géotechnique*, 1994, **44**(1): 21 – 34.
- [12] CHENG Y, YANG H W, SUN D A. Cavity expansion in unsaturated soils of finite radial extent[J]. *Computers and Geotechnics*, 2018, **102**: 216 – 228.
- [13] CHEN S L, ABOUSLEIMAN N Y. Exact drained solution for cylindrical cavity expansion in modified cam clay soil[J]. *Géotechnique*, 2013, **63**(6): 510 – 517.
- [14] 翟张辉, 张亚国, 李同录, 等. 考虑非饱和土吸力效应的圆柱孔扩张有效应力解析[J]. 工程科学与技术, 2020, **52**(3): 1 – 7. (Zhai Zhang-hui, ZHANG Ya-guo, LI Tong-lu, et al. effective stress solution for the cylindrical cavity expansion in unsaturated soil considering suction effect[J]. *Advanced Engineering Sciences*, 2020, **52**(3): 1 – 7. (in Chinese))
- [15] CHEN H H, LI L, LI J P, SUN D A. Elastoplastic solution for cylindrical cavity expansion in unsaturated soils[J]. *Comput Geotech*, 2020, **123**: 103569.
- [16] BISHOP A W. The principle of effective stress[J]. *Teknisk Ukeblad*, 1959, **106**(39): 859 – 863.
- [17] WOOD D M. Soil Behaviour and Critical State Soil Mechanics[M]. Cambridge U K: Cambridge University Press, 1990.
- [18] RUSSELL A R, KHALILY N. Cavity expansion in unsaturated soils[C]// Proceedings of the 3rd International Conference on Unsaturated soils, Edited by Juca JFT, de Campos and Marinho FAM, 2002, Recife: 233 – 238.

附录:

根据式 (12), dp'_c 可以写成

$$dp'_c = \frac{1}{M^2} \left[(M^2 - \eta^2) dp' + 2\eta dq \right] \quad (A1)$$

根据式 (14), Dp'_c 还可以表示为

$$\begin{aligned} Dp'_c &= \frac{\partial p'_c}{\partial \varepsilon_p^p} d\varepsilon_p^p + \frac{\partial p'_c}{\partial s} ds \\ &= \frac{\nu [p'_c - \gamma(s)]}{\lambda - \kappa} d\varepsilon_p^p + \frac{\partial \gamma(s)}{\partial s} ds \end{aligned} \quad (A2)$$

联立式 (A1) 和 (A2), 塑性区体应变 $d\varepsilon_p^p$ 可表示为

$$\begin{aligned} d\varepsilon_p^p &= \frac{\lambda - \kappa}{\nu [p'_c - \gamma(s)] p' M^2} \cdot \\ &\quad \left\{ [p'(M^2 - \eta^2)] dp' + \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2} [p'(M^2 - \eta^2)] dq - M^2 p' \frac{\partial \gamma(s)}{\partial s} ds \right\}, \end{aligned} \quad (A3)$$

由于 $d\varepsilon_p^p = d\varepsilon_r^p + d\varepsilon_\theta^p + d\varepsilon_z^p$, 根据 15 (a) ~ 15 (c) 和式 (A3), 可得塑性乘子:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{\lambda - \kappa}{\nu p' (p'_c - \gamma(s)) M^2} \cdot \\ &\quad \left[dp' + \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2} dq - \frac{M^2}{M^2 - \eta^2} \frac{\partial \gamma(s)}{\partial s} ds \right] \quad (A4) \end{aligned}$$

将式 (A4) 代入式 (15a) ~ (15c) 中, 并利用

$$dp' = \frac{d\sigma'_r + d\sigma'_\theta + d\sigma'_z}{3} , \quad (A5a)$$

$$dq = \frac{\partial q}{\partial \sigma'_r} d\sigma'_r + \frac{\partial q}{\partial \sigma'_\theta} d\sigma'_\theta + \frac{\partial q}{\partial \sigma'_z} d\sigma'_z , \quad (A5b)$$

至此, 可将塑性区内的本构关系(式(15)和(17))表示为

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_r^p \\ d\epsilon_\theta^p \\ d\epsilon_z^p \\ dv \end{Bmatrix} = y \begin{bmatrix} a_r^2 & a_r a_\theta & a_r a_z & a_r h \\ a_\theta a_r & a_\theta^2 & a_\theta a_z & a_\theta h \\ a_z a_r & a_z a_\theta & a_z^2 & a_z h \\ 0 & 0 & 0 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma'_r \\ d\sigma'_\theta \\ d\sigma'_z \\ ds \end{Bmatrix} , \quad (A6)$$

式中,

$$a_r = \frac{p'(M^2 - \eta^2)}{3} + 3(\sigma'_r - p') , \quad (A7a)$$

$$a_\theta = \frac{p'(M^2 - \eta^2)}{3} + 3(\sigma'_\theta - p') , \quad (A7b)$$

$$a_z = \frac{p'(M^2 - \eta^2)}{3} + 3(\sigma'_z - p') , \quad (A7c)$$

$$y = \frac{\lambda - \kappa}{\nu M^2 p'^2 [p'_c - \gamma(s)] (M^2 - \eta^2)} , \quad (A7d)$$

$$h = -M^2 p' \frac{\partial \gamma(s)}{\partial s} , \quad (A7e)$$

$$l = \frac{\nu(c'_m - \psi^2 c)}{\psi y} . \quad (A7f)$$

由于弹性区吸力增量为 0, 因此弹性阶段由吸力引起的应变和比体积均为 0; 这样, 弹塑性应变和比体积增量可表示为

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_r \\ d\epsilon_\theta \\ d\epsilon_z \\ dv \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} + ya_r^2 & -\frac{\nu}{E} + ya_r a_\theta & -\frac{\nu}{E} + ya_r a_z & ya_r h \\ -\frac{\nu}{E} + ya_\theta a_r & \frac{1}{E} + ya_\theta^2 & -\frac{\nu}{E} + ya_\theta a_z & ya_\theta h \\ -\frac{\nu}{E} + ya_z a_r & -\frac{\nu}{E} + ya_z a_\theta & \frac{1}{E} + ya_z^2 & ya_z h \\ 0 & 0 & 0 & yl \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma'_r \\ d\sigma'_\theta \\ d\sigma'_z \\ ds \end{Bmatrix} . \quad (A8)$$

反过来, 弹塑性应力和吸力增量可表示为

$$\begin{Bmatrix} D\sigma'_r \\ D\sigma'_\theta \\ D\sigma'_z \\ Ds \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D\epsilon_r \\ D\epsilon_\theta \\ D\epsilon_z \\ Dv \end{Bmatrix} . \quad (18)$$

这里 $D\sigma'_r$, $D\sigma'_\theta$, $D\sigma'_z$ 和 $D\epsilon_r$, $D\epsilon_\theta$, $D\epsilon_z$ 分别表示的是某一土单元的应力和应变增量, Ds 和 Dv 为吸力和比体积增量^[13]。式中,

$$b_{11} = \frac{1}{E^2} (1 - \nu^2 + E a_\theta^2 y + 2Eva_\theta a_z y + E a_z^2 y) , \quad (A9a)$$

$$b_{12} = \frac{1}{E^2} [-Ea_r(a_\theta + va_z)y + \nu(1 + \nu - E a_\theta a_z y + E a_z^2 y)] , \quad (A9b)$$

$$b_{13} = \frac{1}{E^2} [-Ea_r(va_\theta + a_z)y + \nu(1 + \nu + E a_\theta^2 y - E a_\theta a_z y)] , \quad (A9c)$$

$$b_{14} = \frac{(1 + \nu)h}{E^2 l} [(v - 1)a_r - \nu(a_\theta + a_z)] , \quad (A9d)$$

$$b_{22} = \frac{1}{E^2} [1 - \nu^2 + E a_r^2 y + 2Eva_r a_z y + E a_z^2 y] , \quad (A9e)$$

$$b_{23} = \frac{1}{E^2} [\nu + \nu^2 + Eva_r^2 y - E a_\theta a_z y - Eva_r(a_\theta + a_z)y] , \quad (A9f)$$

$$b_{24} = \frac{(1 + \nu)h}{E^2 l} [(v - 1)a_\theta - \nu(a_r + a_\theta)] , \quad (A9g)$$

$$b_{33} = \frac{1}{E^2} [1 - \nu^2 + E a_\theta^2 y + 2Eva_r a_\theta y + E a_\theta^2 y] , \quad (A9h)$$

$$b_{34} = \frac{(1 + \nu)h}{E^2 l} [(v - 1)a_z - \nu(a_r + a_\theta)] , \quad (A9i)$$

$$b_{44} = \frac{\Delta}{yl} , \quad (A9j)$$

$$b_{21} = b_{12} , \quad (A9k)$$

$$b_{31} = b_{13} , \quad (A9l)$$

$$b_{32} = b_{23} , \quad (A9m)$$

$$\Delta = -\frac{1 + \nu}{E^3} \times [(-1 + \nu + 2\nu^2) + E(-1 + \nu)a_r^2 y + E(-1 + \nu)a_\theta^2 y - 2Eva_\theta a_z y - E a_z^2 y + Eva_z^2 y - 2Eva_r(a_\theta + a_z)y] . \quad (A9n)$$