

DOI: 10.11779/CJGE202101002

# 复杂应力路径下饱和砂土静态液化失稳预测

黄茂松<sup>1, 2</sup>, 童森杰<sup>1, 2</sup>, 时振昊<sup>\*1, 2</sup>, 吕玺琳<sup>1, 2</sup>

(1. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092; 2. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092)

**摘要:** 饱和砂土应力-应变关系具有各向异性和状态相关特性, 因此其静态液化的触发与应力路径密切相关。现有文献已提出多种静态液化判别准则, 但其准确性往往仅在三轴应力路径下被进行校验。对于涉及主应力方向旋转和不同中主应力比的复杂应力路径, 现有判别准则是否可以准确预测静态液化的触发有待进一步验证。为此, 基于状态相关各向异性砂土本构模型, 结合前人的空心圆柱扭剪单元体试验, 比较了二阶功、弹塑性刚度矩阵对称部分和失稳模量 3 种准则对复杂应力路径下砂土静态液化失稳预测的效果。发现包括: 基于弹塑性刚度矩阵对称部分的失稳触发表达式不依赖于加载路径, 具有更好的通用性, 其预测的失稳点早于或与实际失稳点吻合; 失稳模量理论可预测实际液化失稳的位置, 但判定表达式因加载条件不同而变化。获得了复杂应力路径下的失稳线, 分析了静态液化触发前砂土可发挥峰值摩擦角受中主应力、主应力方向等因素的影响。

**关键词:** 砂土; 静态液化; 各向异性; 中主应力比; 液化判别; 失稳线

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2021)01-0019-08

**作者简介:** 黄茂松(1965—), 男, 浙江玉环人, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事岩土工程的科研和教学工作。E-mail: mshuang@tongji.edu.cn。

## Prediction initiation of static liquefaction of saturated sand under complex stress paths

HUANG Mao-song<sup>1, 2</sup>, TONG Sen-jie<sup>1, 2</sup>, SHI Zhen-hao<sup>1, 2</sup>, LÜ Xi-lin<sup>1, 2</sup>

(1. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** The stress-strain relations of saturated sand are anisotropic and state-dependent, thus the initiation of its static liquefaction relies on stress paths. While various criteria have been proposed to predict the triggering of static liquefaction, their accuracy is normally examined under triaxial stress paths. When subjected to complex stress paths that involve the rotation of the principal stress directions and different relative magnitudes of the intermediate principal stress, the accuracy of these criteria remains to be an open question. Here the capacity of three criteria is evaluated, including the second-order work, symmetric part of the elastoplastic stiffness matrix and instability modulus, for predicting the static liquefaction under complex stress paths, by employing a state-dependent, anisotropic constitutive model and comparing against the hollow cylindrical torsional shear tests on Toyoura sand. It is found that: (1) The instability condition derived from the elastoplastic stiffness matrix does not depend on the stress paths, thus being more general, and the predicted liquefaction initiation is earlier than or coincident with the actual instability point. (2) The instability modulus approach can predict the initiation of static liquefaction, however, the instability conditions vary across different loading paths. The instability line is obtained, through which the influences of factors like the intermediate principal stress and the principal stress directions on the peak mobilized friction angle before liquefaction are studied.

**Key words:** sand; static liquefaction; anisotropy; intermediate principal stress ratio; liquefaction criterion; instability line

## 0 引言

饱和松砂在静力作用下由孔隙水压上升而诱发的抗剪强度在临界状态前就出现软化甚至趋向于零的现象称为静态液化。松砂地层中的工程施工易引起液化失稳现象(如海底长缓坡流滑<sup>[1]</sup>和松砂地层中盾构开

挖面失稳破坏<sup>[2]</sup>)。静态液化失稳具有明显的整体性和扩散性, 有别于岩土材料的其他失稳模式(如应变局

基金项目: 国家自然科学基金项目(11972260, 41672270)

收稿日期: 2020-02-05

\*通信作者(E-mail: 1018tjzhenhao@tongji.edu.cn)

部化)<sup>[3]</sup>。以边坡静态液化失稳为例,液化一般开始于土体表面,随即因超孔隙水压力无法立即消散,导致液化区快速向四周扩散,故也被称为扩散性失稳<sup>[4]</sup>。区别于应变局部化,静态液化时无明显滑动面,不易被察觉,破坏具有突发性。而且,静态液化一旦触发,土体强度会迅速丧失并可导致范围巨大的土体流滑,对邻近基础设施和人身安全构造重大威胁。因此,准确判别与预测静态液化具有重要意义。

Hill 的二阶功理论是最早的材料稳定性通用判定准则之一,认为当材料处于稳定状态时其应力增量所对应的二阶功是非负的。大量学者研究了二阶功理论对判别砂土静态液化的适用性<sup>[4-5]</sup>,发现广义剪应力达到峰值时二阶功为零。然而,二阶功判别具有一定滞后性,因其值由正转负发生在静态液化触发后一增量步。因此,严格意义上二阶功判别无法预测静态液化的触发,但可用于识别已发生液化的区域。如黄茂松等<sup>[4]</sup>将二阶功理论应用于边值问题,分析了海底长缓坡的砂土液化范围。吕玺琳等<sup>[6]</sup>等基于二阶功理论推导了弹塑性刚度矩阵数学特征与砂土稳定性的关系,发现弹塑性刚度矩阵对称部分行列式为零发生在静态液化触发之前,从而将此条件定义为潜在失稳条件。Andrade<sup>[7]</sup>和 Lashkari<sup>[8]</sup>基于材料失稳时应力应变增量响应解不唯一的条件推导了液化失稳触发时所对应的塑性模量的临界值,即当材料塑性模量等于该临界值时即判定静态液化触发。但上述临界塑性模量只适用于三轴应力空间。Buscarnera 等<sup>[9]</sup>基于 Nova 的控制理论<sup>[10]</sup>,得到了与加载控制条件相关的材料失稳临界塑性模量的广义表达式,并应用于三轴应力路径下饱和砂土的静态液化的判定<sup>[11]</sup>。

室内单元体试验(平面应变试验<sup>[12]</sup>及空心圆柱扭剪试验<sup>[13]</sup>)表明,静态液化的触发及其液化程度除了受砂土初始密实度、应力水平的影响外,与中主应力比和主应力方向旋转密切相关。然而,针对上述现有判定准则的检验往往仅是在简单三轴应力路径下进行的,关于复杂应力路径下砂土静态液化判别和预测的研究工作较为有限。其中,吕玺琳等<sup>[14-15]</sup>基于状态相关本构模型研究了  $K_0$  固结和平面应变条件下的砂土静态液化失稳特性,发现松砂中弹塑性刚度矩阵对称部分等于零对应广义剪应力达到峰值,而随着砂土密实度的增加前者会先于后者出现。Lü 等<sup>[16]</sup>进一步研究了中主应力比和主应力方向对砂土液化特性的影响,发现中主应力比  $b$  (即  $b = (\sigma_2 - \sigma_3)/(\sigma_1 - \sigma_3)$ ) 和主应力方向与沉积方向的夹角  $\alpha$  (在下文中简称为中主应力旋转角) 的增大会使二阶功极小值降低,液化更易发生。

针对上述研究现状,本文的目标是探究现有准则对涉及主应力旋转和不同中主应力水平的复杂应力路径下砂土静态液化判别的适用性。为此,结合陈洲泉等<sup>[17]</sup>提出的砂土状态相关各向异性本构模型和笔者提出的判别准则,通过与空心圆柱扭剪单元体试验对比,验证该模型模拟复杂应力路径下静态液化现象的能力。基于此模型,本文比较了二阶功、弹塑性刚度矩阵对称部分行列式和失稳模量三种判别准则预测复杂应力路径下静态液化的准确性。最后,应用失稳模量方法获得了有效平均应力-广义剪应力空间的失稳线,分析了主应力旋转、中主应力水平等因素对静态液化触发应力状态和砂土可发挥最大摩擦角的影响。

## 1 砂土状态相关各向异性本构模型

本文使用的本构模型以陈洲泉等<sup>[17]</sup>提出的砂土状态相关各向异性模型为基础并加以改进,现将上述基础模型的核心部分和本工作提出的改进做简要介绍。

基础模型通过黄茂松等<sup>[3]</sup>提出的各向异性状态变量来考虑砂土固有各向异性:

$$A = \frac{\hat{R}}{M_{cs}g(\hat{\theta})} - \left( \frac{\hat{R}}{M_{cs}g(\hat{\theta})} \right)_c, \quad (1)$$

式中,  $M_{cs}$  为三轴压缩应力路径下的临界状态应力比,  $\hat{\theta}$  为组合应力张量的 Lode 角,  $\hat{R} = \sqrt{3\hat{r}_{ij}\hat{r}_{ij}}/2$  为组合应力比偏量的第二不变量,  $g(\hat{\theta})$  为关于 Lode 角的椭圆插值函数<sup>[18]</sup>:

$$g(\hat{\theta}) = \frac{4c}{1+c+(1-c)\sin(3\hat{\theta})} - \frac{1+c-(1-c)\sin(3\hat{\theta})}{2}. \quad (2)$$

组合应力张量采用 Li 等<sup>[19]</sup>给出的定义:

$$\hat{T}_{ij} = \frac{1}{6}(\hat{\sigma}_{ik}F_{kj}^{-1} + F_{ik}^{-1}\hat{\sigma}_{kj}), \quad (3)$$

式中,  $\hat{\sigma}_{ij}$  为归一化应力张量,  $F_{ij}$  为组构张量,  $\hat{r}_{ij} = \hat{s}_{ij}/\hat{p}$  为组合应力比偏量,  $\hat{p} = \hat{T}_{ii}/3$  为组合应力第一不变量,  $\hat{s}_{ij} = \hat{T}_{ij} - \hat{p}\delta_{ij}$  为组合偏应力张量。归一化应力张量  $\hat{\sigma}_{ij}$  定义为

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{M_{cs}g(\theta)}{\eta}r_{ij} + \delta_{ij}, \quad (4)$$

式中,  $\delta_{ij}$  为 Kronecker 张量,  $\theta$  为应力张量的 Lode 角,  $\eta$  为应力张量对应的应力比, 组构张量  $F_{ij}$  在其主应力空间下可采用 Oda 等<sup>[20]</sup>给出的定义:

$$F_{ij} = \frac{1}{3+\Delta} \begin{bmatrix} 1-\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 1+\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 1+\Delta \end{bmatrix}, \quad (5)$$

式中,  $\Delta$  为各向异性参量, 不同制样方法下所对应的

$\Delta$  取值可参见文献[21]。式(1)中  $\left(\frac{\hat{R}}{M_{cs}g(\hat{\theta})}\right)_c$  表示三轴压缩状态下的  $\frac{\hat{R}}{M_{cs}g(\hat{\theta})}$  值。

为考虑砂土临界状态各向异性<sup>[19]</sup>, 将临界状态线定义为各向异性状态参数  $A$  的函数:

$$e_c = e_r(A) - \lambda \left( \frac{p}{p_a} \right)^\xi, \quad (6)$$

式中,  $\lambda$  和  $\xi$  为材料参数,  $p$  为有效平均应力,  $p_a$  为标准大气压,  $e_r(A)$  表示  $p$  为零时的临界状态孔隙比。根据 Verdugo 等<sup>[22]</sup>和 Yoshimine 等<sup>[13]</sup>通过试验测得的临界状态数据 (见图 1), 本文建议  $e_r(A)$  采用以下表达式:

$$e_r(A) = e_r(0) - k_r |A|^x, \quad (7)$$

式中,  $k_r$  和  $x$  为材料参数,  $e_r(0)$  为三轴压缩路径下 (即  $A=0$ )  $e_r$  的取值。基础模型的剪胀和硬化法则均是各向异性状态变量  $A$  的函数<sup>[17]</sup>:

$$D = \frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_s^p} = \frac{d(A)}{M_{cs}} \left( M_d - \frac{q}{pg(\theta)} \right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \varepsilon_s^p} = \frac{h(A)G M_p - M}{p M}. \quad (9)$$

式中  $M_d$  和  $M_p$  分别为相变应力比和峰值应力比, 两者均为关于 Been 等<sup>[23]</sup>提出的状态参数  $\psi$  的函数;  $h(A)$ ,  $d(A)$  的具体表达式为

$$d(A) = d_0(1 - k_d A), \quad (10)$$

$$h(A) = (h_1 - h_2 e)(1 + k_h A), \quad (11)$$

式中,  $d_0$ ,  $k_d$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  和  $k_h$  为模型参数。

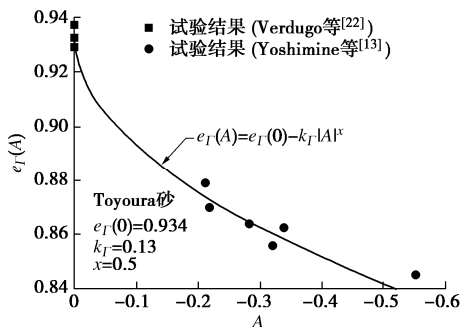


图 1 有效平均应力为零时的临界状态孔隙比随各向异性状态参数  $A$  的变化

Fig. 1 Variation of critical state void ratio with anisotropic state-parameter  $A$

## 2 静态液化判定准则

根据 Hill<sup>[24]</sup>给出的稳定性条件, 当材料发生失稳时二阶功需满足

$$d^2 w = d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \leq 0, \quad \exists \|d\varepsilon\| \neq 0, \quad (12)$$

式中,  $d\sigma_{ij}$  和  $d\varepsilon_{ij}$  分别为应力和应变增量。对于饱和砂处于不排水条件时, 式(12)可用以判定静态液化是否已经发生。然而, 当砂土为非饱和或其排水条件为部分排水时, 上述条件仅是静态液化触发的必要条件<sup>[25]</sup>。

### 2.1 弹塑性刚度矩阵对称部分行列式

吕玺琳等<sup>[6, 14-15]</sup>提出了二阶功准则需要两个附加条件, 以全面判别不同饱和度和排水状态下砂土的静态液化:

$$\partial Q / \partial \sigma_{ij} \delta_{ij} > 0, \quad (13a)$$

$$\partial F / \partial \sigma_{ij} \delta_{ij} < 0, \quad (13b)$$

式中,  $F$  为屈服函数,  $Q$  为塑性势函数。上述两个附加条件分别表征了静态液化发生时土体需要处于剪缩状态以及应力状态处屈服面需朝静水压力轴正方向张开。由于二阶功由正转负发生在静态液化触发后一增量步, 滞后于液化点, 因此并不能严格地称其为液化判别准则。

基于二阶功失稳理论, 吕玺琳等<sup>[6, 14-15]</sup>进一步提出了可以根据弹塑性刚度矩阵的数学特性预判静态液化的触发。将应力应变关系代入式(12)可得

$$d^2 w = d\varepsilon_{ij} [D_{ijkl}^{ep}] d\varepsilon_{kl}, \quad (14)$$

式中, 弹塑性刚度矩阵  $D_{ijkl}^{ep}$  可分解成对称部分  $[D_{ijkl}^{ep}]_s$  和反对称部分  $[D_{ijkl}^{ep}]_{sk}$  之和。又因为应变增量  $d\varepsilon_{ij}$  为对称二阶张量, 其与刚度矩阵反对称部分  $[D_{ijkl}^{ep}]_{sk}$  所构成的二次型  $d\varepsilon_{ij} [D_{ijkl}^{ep}]_{sk} d\varepsilon_{kl}$  恒等于零, 因此二阶功可写为

$$d^2 w = d\varepsilon_{ij} [D_{ijkl}^{ep}]_s d\varepsilon_{kl}. \quad (15)$$

式(15)表明当弹塑性刚度矩阵对称部分为半正定矩阵时, 则必然能找到一条应变路径 (其方向为  $[D_{ijkl}^{ep}]_s$  的一个特征向量) 使得二阶功等于零。进一步, 由于半正定矩阵必为非满秩矩阵, 故可将行列式

$$\det([D_{ijkl}^{ep}]_s) = 0 \quad (16)$$

作为砂土进入潜在失稳状态的判定条件<sup>[6]</sup>。

笔者已经成功地应用式(16)对饱和砂土在三轴应力路径下<sup>[6, 15]</sup>和平面应变路径下<sup>[14]</sup>以及高饱和和含气砂在三轴应力路径<sup>[26]</sup>下的静态液化现象进行了研究。本文将进一步分析上述判定准则对复杂应力路径下静态液化失稳的预测效果。

### 2.2 失稳模量

当利用弹塑性刚度矩阵特性进行静态液化失稳判定时, 失稳条件的具体表达式不依赖特定的应力-应

变路径或加载控制条件,因此该方法具有良好的通用性。另一方面,这种通适的判定准则因没有考虑静态液化现象所蕴含的力学特征(如材料无体变)而造成对失稳触发的过于严判<sup>[6]</sup>。另一类判定理论则显式地考虑静态液化触发时的应力-应变控制条件,进而获得了静态液化触发时弹塑性本构关系中塑性模量的临界值,即当塑性模量  $K_p$  达到这一临界值时,即判定静态液化失稳。

Andrade<sup>[27]</sup>从应力应变增量响应解不唯一出发,推导了三轴应力路径下静态液化触发时塑性模量的临界值:

$$H_\chi = -\frac{\partial F}{\partial p} K \frac{\partial Q}{\partial p}, \quad (17)$$

式中,  $H_\chi$  为临界塑性模量,  $K$  为体变模量。当土体的塑性模量达到上述临界值时,在不排水条件下对应于任意广义剪应力增量  $dq$  的解不唯一或不存在,即判定静态液化触发。值得注意的是,式(17)成立同时对应于 Nova<sup>[10]</sup>给出的三轴应力下不排水剪切加载路径可控性丧失的条件。

同样从加载路径是否可控的角度,Buscarnera 等<sup>[9]</sup>推导了复杂加载控制条件下岩土材料发生失稳时塑性模量所需满足的临界值的广义形式:

$$H_\chi = -\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_\beta}\right)^T (D_{\beta\beta}^e - D_{\beta\alpha}^e (D_{\alpha\alpha}^e)^{-1} D_{\alpha\beta}^e) \frac{\partial Q}{\partial \sigma_\beta}. \quad (18)$$

式中  $F$  为屈服函数;  $Q$  为塑性势函数;  $D_{ij}^e$  为弹性刚度矩阵的子矩阵( $i, j = \alpha, \beta$ ),  $D_{\alpha\beta}^e$  联系应变增量  $d\epsilon_\beta$  与应力增量  $d\sigma_\alpha$ ,  $D_{\beta\alpha}^e$  联系应变增量  $d\epsilon_\alpha$  与应力增量  $d\sigma_\beta$ , 其中  $\sigma_\alpha$  和  $\epsilon_\beta$  作为加载时所控制的应力和应变分量,  $\sigma_\beta$  和  $\epsilon_\alpha$  为对应的响应应力和应变分量。当塑性模量等于式(18)给出的临界值时,则在给定的加载控制路径下塑性乘子的取值不唯一或不存在。当以体应变为零和广义剪应力(或某一特定剪应力分量)单调递增作为控制条件时,式(18)具体化为静态液化触发时塑性模量的临界值。三轴条件下,以广义剪应力  $q$  和体应变  $\epsilon_v$  为控制变量,对应的广义剪应变  $\epsilon_q$  和有效平均应力  $p$  为响应变量,相应的失稳模量就退化为式(17)的形式。对于常中主应力比和常主应力旋转角扭剪试验,其所控制的剪应力分量  $\tau_{z\theta}$  与  $q$  同时达到峰值,因此可以继续使用式(17)判定静态液化的触发。对单剪路径判定静态液化时,由于  $b$  不是常数, Lode 角变化的影响不能忽略,因此需要直接以剪应力  $\tau_{z\theta}$  和体应变为控制变量,此时失稳模量可表示为

$$H_\chi = -\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\partial F}{\partial \tau_{z\theta}} 2G \frac{\partial Q}{\partial \tau_{z\theta}}, \quad (19)$$

式中,  $G$  为弹性剪切模量,  $D_{ijkl}^e$  为弹性刚度矩阵。

下文中,笔者将具体分析基于塑性模量临界值的判定方法对复杂路径下静态液化失稳的预测效果,以及其与笔者提出的基于弹塑性刚度矩阵对称部分行列式进行判定的异同。

### 3 Toyoura 砂静态液化模拟及判别

本文使用 Toyoura 砂单元体试验的数据来验证本构模型重现复杂应力路径下砂土静态液化的能力。为此需要标定两类材料参数。前一类描述水平沉积砂土在三轴压缩路径下的基础力学特性(表1中左侧四列),而后一类则控制主应力方向偏离沉积方向时以及中主应力比变化时土体力学特征的改变(表1中第五列)。对于前一类参数,本文采用了 Li 等<sup>[28]</sup>基于 Verdugo 等<sup>[22]</sup>进行的三轴试验所标定的参数。Toyourea 砂各向异性材料参数则基于 Yoshimine 等<sup>[13]</sup>进行的空心圆柱扭剪试验获得(如图1所示)。具体标定过程可参考文献<sup>[17, 28]</sup>。

表1 Toyoura 砂模型参数

Table 1 Model parameters of Toyoura sand

弹性 参数	临界状态 参数	剪胀 参数	硬化 参数	各向异性 参数
$G_0=125,$ $\nu=0.05$	$M_{cs}=1.25,$ $e_r=0.934,$ $\lambda_c=0.019,$ $\zeta=0.7$	$d_0=0.88,$ $m=3.5$	$h_1=3.15,$ $h_2=3.05,$ $n=1.1$	$A=0.214,$ $K_r=0.13,$ $k_d=1.8,$ $k_h=0.9,$ $c=0.75,$ $x=0.5,$

#### 3.1 常规不排水三轴压缩试验

不排水三轴压缩试验下,实测与模拟的 Toyoura 砂的有效应力路径和应力-应变关系如图2(a)和图2(b)所示。从图2中可见,模拟曲线与试验曲线吻合较好。初始有效平均应力  $p_0$  较大的两组试样均出现静态液化现象,但  $p_0$  为 100 kPa 的试样的不排水强度单调上升。其原因是降低初始围压导致砂土初始状态在  $e-p$  平面上向临界状态线靠近,抑制了液化现象发生。图2(a), (b)还表明当塑性模量等于失稳模量时(即  $K_p = H_\chi$ ),广义剪应力达到峰值,即静态液化触发。而且,静态液化触发后下一增量步对应的二阶功非正。另一方面,弹塑性刚度矩阵对称部分行列式等于零要早于(见  $p_0$  为 1000 kPa 的试样)或同于(参见  $p_0$  为 2000 kPa 的试样)静态液化触发。当液化现象越弱时(峰值强度后的强度软化越弱时),两者的差别趋于增大。对  $p_0$  为 100 kPa 的试样,弹塑性刚度矩阵方法判定存在潜在失稳的可能性。即吕玺琳等<sup>[6]</sup>定义

的潜在失稳区。这意味着在当前应力状态下存在一条潜在的应变路径使得土体丧失稳定性, 但这条路径并非试验控制条件下的路径。

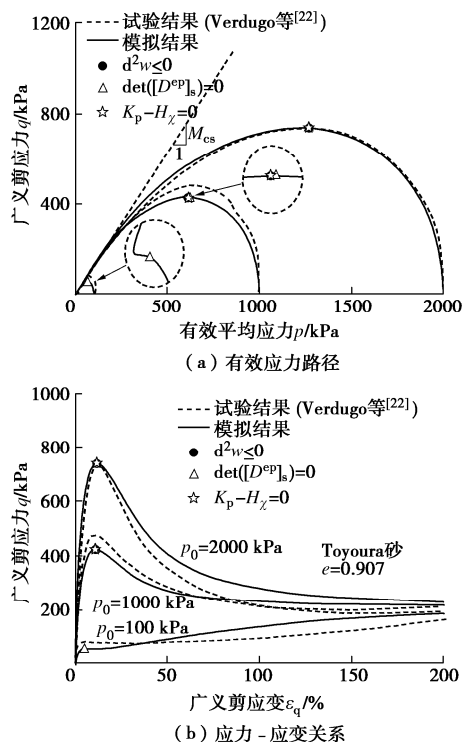


图 2 不排水三轴压缩路径下试验与模拟结果对比

Fig. 2 Comparison between measured and simulated responses in undrained triaxial compression tests

### 3.2 定中主应力比或定主应力方向的不排水空心圆柱试验

不排水定主应力方向剪切试验的实测与模拟结果如图 3 所示。不排水定中主应力比剪切试验的实测与模拟结果如图 4 所示。上述对比表明所使用的本构模型可以较好反映主应力方向和中主应力比对砂土静态液化的影响, 具体表现为随着主应力方向逐渐偏离沉积方向和中主应力比的增大, 静态液化更易被触发。从不同判定准则的应用效果看, 失稳模量方法可以预测广义剪应力峰值 (即静态液化触发点), 且失稳点后一增量步的二阶功非正。然而, 弹塑性刚度矩阵对称部分行列式取值为零或同于 ( $\alpha=60^\circ$ ,  $b=0.5$ ,  $e=0.828$ ;  $\alpha=45^\circ$ ,  $b=0.5$ ,  $e=0.855$  和  $\alpha=45^\circ$ ,  $b=0.75$ ,  $e=0.849$  的试样) 或早于 ( $\alpha=75^\circ$ ,  $b=0.5$ ,  $e=0.823$ ;  $\alpha=45^\circ$ ,  $b=0$ ,  $e=0.853$  和  $\alpha=45^\circ$ ,  $b=1$ ,  $e=0.861$  的试样) 广义剪应力峰值点, 且预判早于实际失稳的倾向随着液化现象的减弱而加强。另外, 对于未出现静态液化的三组试验 ( $\alpha=15^\circ$ ,  $b=0.5$ ,  $e=0.825$ ;  $\alpha=30^\circ$ ,  $b=0.5$ ,  $e=0.824$  和  $\alpha=45^\circ$ ,  $b=0.5$ ,  $e=0.821$ ), 行列式方法也判定出有失稳的可能。

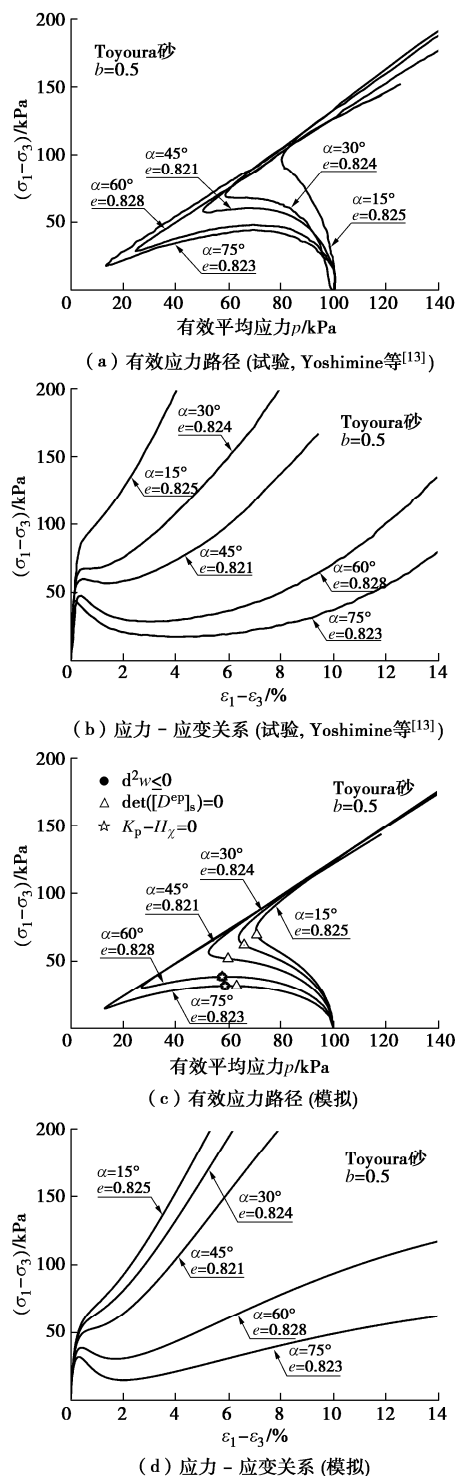


图 3 不排水定主应力方向剪切试验的试验与模拟结果对比

Fig. 3 Comparison between measured and simulated responses in undrained shear tests with fixed directions of principal stresses

### 3.3 空心圆柱单剪试验

图 5, 6 分别表示本构模型针对等向固结和  $K_0$  固结 ( $K_0=0.5$ ) 不排水单剪试验的模拟和试验结果。不同判定方法对静态液化触发预测的效果与之前分析的剪切路径大致相同。需要特别注意的是在单剪试验中  $\sigma_1 - \sigma_3$  的峰值与判别的失稳点不再重合, 这种不重合现象在  $K_0$  固结单剪中更为明显。这是因为单剪路径所

控制的是剪应力分量 $\tau_{z\theta}$ （定义见图5），因此该路径下静态液化触发的标志是 $\tau_{z\theta}$ 达到峰值，而非最大主应力差 $\sigma_1 - \sigma_3$ 。后者是剪应力 $\tau_{z\theta}$ 和中主应力比 $b$ 的函数，因而只有当 $b$ 固定时， $\tau_{z\theta}$ 与 $\sigma_1 - \sigma_3$ 才同时取到峰值。在等向固结单剪试验中 $\tau_{z\theta}$ 达到峰值之前中主应力比基本稳定，所以静态液化失稳点与 $\sigma_1 - \sigma_3$ 峰值近似重合。但在 $K_0$ 固结单剪试验中 $\tau_{z\theta}$ 在加载初期即达到峰值，此时中主应力比还在快速下降，因此判定失稳点与 $\sigma_1 - \sigma_3$ 峰值有显著差异。

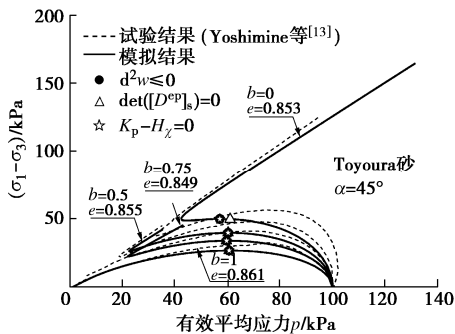


图4 不排水定中主应力比剪切试验的试验与模拟结果对比

Fig. 4 Comparison between measured and simulated stress paths in undrained shear tests with fixed intermediate principal stress ratios

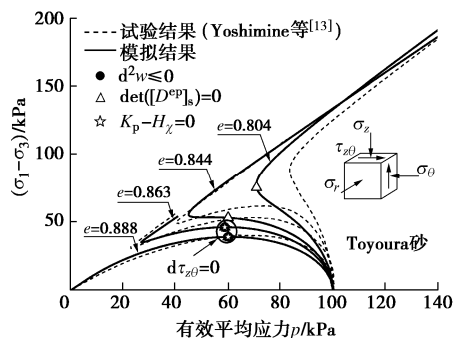


图5 等向固结单剪试验与模拟结果

Fig. 5 Comparison between measured and simulated stress paths in undrained hollow cylindrical simple shear tests following isotropic consolidation

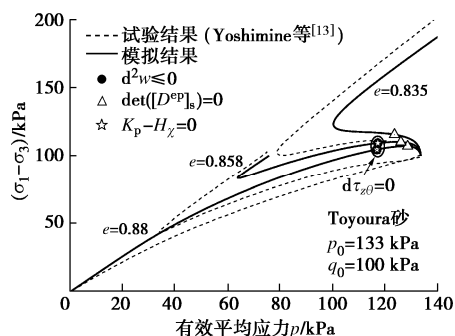


图6  $K_0$ 固结单剪试验与模拟结果 ( $K_0=0.5$ )

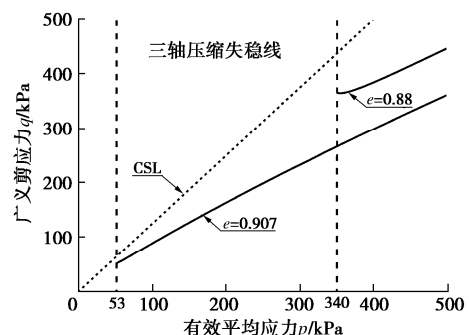
Fig. 6 Comparison between measured and simulated stress paths in undrained hollow cylindrical simple shear tests following  $K_0$  consolidation

上述结果表明，复杂应力路径下二阶功和失稳模量方法判定的静态液化触发对应于由加载控制条件所决定的某一特定剪应力分量达到峰值。这是因为二阶功和失稳模量的取值都是控制条件相关的，即二阶功理论内含了当前的应变路径，而失稳模量理论则是基于特定的控制条件推导得到的。相比之下，弹塑性刚度矩阵对称部分行列式判定结果则与控制条件无关，其考量的不是特定加载路径，而是是否存在任意一种加载路径使土体丧失稳定性。

## 4 静态液化失稳线

失稳线作为 $p-q$ 应力空间内静态液化触发所对应应力状态的集合，定义了饱和砂土（特别是松砂）在不排水状态下可发挥抗剪强度的上限。松砂剪缩特性引起的不排水剪切下孔压的急剧上升，使砂土在发挥出临界状态摩擦角之前便出现不排水强度下降，即静态液化触发（见图2(a)）。因此，基于失稳线的稳定性分析较传统的基于摩擦角的稳定性分析可更准确地预判实际工程中岩土构筑物的失稳与破坏<sup>[25]</sup>。由第3节的分析可知失稳模量理论因考虑了静态液化现象与加载控制条件的相关性，可较为准确地预测复杂路径下静态液化的触发。本文应用失稳模量理论得到了有效平均应力-广义剪应力空间内的静态液化失稳线，并归纳了砂土密实度、有效平均应力、中主应力比及主应力方向对静态液化失稳线的影响。

静态液化失稳线是通过令塑性模量（可通过式(9)联合屈服面一致性条件得到）等于失稳模量（即式(17)）得到。如图7所示，失稳线在有效平均应力小于一定值时是不存在的（如 $e$ 等于0.88的例子），即因砂土初始状态接近临界状态抑制了静态液化的发生。另外，随着密实度的下降、 $b$ 值或 $\alpha$ 角度的增大，失稳线会发生下移，且失稳线下限边界所对应的有效平均应力降低，导致液化在低围压条件下也可发生。除较难液化的砂的失稳线在起始段有较明显的弯曲之外，失稳线可被近似考虑为直线。因而，失稳线的斜率，即砂土发生液化失稳前可发挥的最大摩擦角，从工程应用角度可考虑为不受有效围压影响，而仅随密实度降低、主应力旋转及中主应力比增大而降低。



(a) 孔隙比的影响

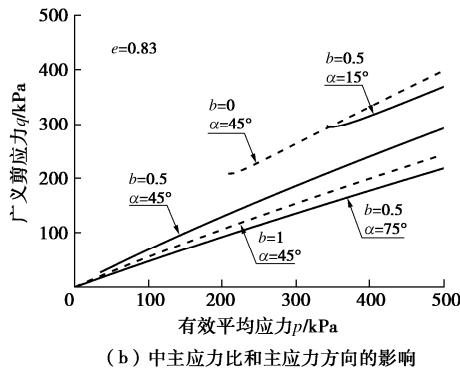


图 7 有效平均应力-广义剪应力空间内静态液化失稳线

Fig. 7 Instability lines in space of effective mean normal stress and deviatoric stress

## 5 结 论

基于状态相关各向异性本构模型, 本文研究了涉及主应力方向旋转和中主应力比变化的复杂应力路径下的砂土静态液化, 重点讨论了现有判定准则对复杂三维应力路径下静态液化的预测效果, 并分析了密实度、围压、主应力方向和中主应力等因素与静态液化触发时应力状态的相关性, 得到以下 4 点结论。

(1) 要真实模拟复杂应力路径下的静态液化现象, 需要在本构模型中考虑砂土状态相关特性和固有各向异性。

(2) 基于二阶功和失稳模量的静态液化判别都显式地考虑了加载过程的控制条件, 因此在复杂应力路径下失稳模量理论判别的液化失稳点与二阶功给出的失稳位置相同, 并与土体真实失稳点一致。

(3) 弹塑性刚度矩阵对称部分行列式判定方法与控制条件无关, 其考量的不是当前的加载路径, 而是是否存在一种加载路径触发失稳。故其判别结果同于或早于真实静态液化失稳点。

(4) 失稳时已发挥的最大土体摩擦角主要受材料密实度、中主应力比和主应力方向影响, 而对有效围压不敏感, 材料密实度越小、中主应力比越大或主应力方向旋转角越大, 液化时土体已发挥的摩擦角越小。

## 参考文献:

[1] SLADEN J A, DHOLLANDER R D, KRAHN J. Back analysis of the Nerlerk berm liquefaction slides[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1985, **22**(4): 579 - 588.

[2] ZENG S, LU X L, HUANG M S. Discrete element modeling of static liquefaction of shield tunnel face in saturated sand[J]. Acta Geotechnica, 2019, **14**: 1643 - 1652.

[3] 黄茂松, 李学丰, 钱建固. 各向异性砂土的应变局部化分析[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(10): 1885 - 1892. (HUANG

Mao-song, LI Xue-feng, QIAN Jian-gu. Strain localization of anisotropic sands[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(10): 1885 - 1892. (in Chinese))

[4] 黄茂松, 曲 颢, 吕玺琳. 基于状态相关本构模型的松砂静态液化失稳数值分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, **33**(7): 1479 - 1487. (HUANG Mao-song, QU Xie, LÜ Xi-lin. Instability and static liquefaction analysis of loose sands with a state-dependent constitutive model[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2014, **33**(7): 1479 - 1487. (in Chinese))

[5] MROZ Z, BOUKPETI N, DRESCHER A. Constitutive model for static liquefaction[J]. International Journal of Geomechanics, 2003, **3**(2): 133 - 144.

[6] 吕玺琳, 赖海波, 黄茂松. 饱和土体静态液化失稳理论预测[J]. 岩土力学, 2014, **35**(5): 1330 - 1333, 1339. (LÜ Xi-lin, LAI Hai-bo, HUANG Mao-song. Theoretically predicting instability of static liquefaction of saturated soils[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, **35**(5): 1330 - 1333, 1339. (in Chinese))

[7] ANDRADE J E. A predictive framework for liquefaction instability[J]. Géotechnique, 2009, **59**(8): 673 - 682.

[8] LASHKARI A. Prediction of flow liquefaction instability of clean and silty sands[J]. Acta Geotechnica, 2016, **11**(5): 987 - 1014.

[9] BUSCARNERA G, DATTOLA G, DI PRISCO C. Controllability, uniqueness and existence of the incremental response: A mathematical criterion for elastoplastic constitutive laws[J]. International Journal of Solids and Structures, 2011, **48**(13): 1867 - 1878.

[10] NOVA R. Controllability of the incremental response of soil specimens subjected to arbitrary loading programmes[J]. Journal of the Mechanical Behavior of Materials, 1994, **5**(2): 193 - 202.

[11] BUSCARNERA G, WHITTLE A J. Model prediction of static liquefaction: influence of the initial state on potential instabilities[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2013, **139**(3): 420 - 432.

[12] WANATOWSKI D, CHU J. Static liquefaction of sand in plane strain[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2007, **44**(3): 299 - 313.

[13] YOSHIMINE M, ISHIHARA K, VARGAS W. Effects of principal stress direction and intermediate principal stress on undrained shear behavior of sand[J]. Soils and Foundations, 1998, **38**(3): 179 - 188.

- [14] 吕玺琳, 钱建固, 黄茂松. 不排水加载条件下  $K_0$  固结饱和砂土失稳预测[J]. 岩土工程学报, 2015, **37**(6): 1010 - 1015. (LÜ Xi-lin, QIAN Jian-gu, HUANG Mao-song. Prediction of instability of  $K_0$ -consolidated saturated sands under undrained loading conditions[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, **37**(6): 1010 - 1015. (in Chinese))
- [15] LÜ X L, HUANG M S. Static liquefaction of sands under isotropically and  $K_0$ -consolidated undrained triaxial conditions[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2015, **141**(1): 04014087.
- [16] LÜ X L, HUANG M S, ANDRADE J E. Predicting the initiation of static liquefaction of cross-anisotropic sands under multiaxial stress conditions[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2017, **41**(17): 1724 - 1740.
- [17] 陈洲泉, 黄茂松. 砂土各向异性与非共轴特性的本构模拟[J]. 岩土工程学报, 2018, **40**(2): 243 - 251. (CHEN Zhou-quan, HUANG Mao-song. Constitutive modeling of anisotropic and non-coaxial behaviors of sand[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2018, **40**(2): 243 - 251 (in Chinese))
- [18] PAPADIMITRIOU A G, BOUCKOVALAS G D. Plasticity model for sand under small and large cyclic strains: A multiaxial formulation[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2002, **22**: 194 - 204.
- [19] LI X S, DAFALIAS Y F. Constitutive modeling of inherently anisotropic sand behavior[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2002, **128**(10): 868 - 880.
- [20] ODA M, NAKAYAMA H. Introduction of inherent anisotropy of soil in the yield function[C]// Micromechanics of Granular Materials, 1988, Amsterdam: 81 - 89.
- [21] YANG Z X, LI X S, YANG J. Quantifying and modelling fabric anisotropy of granular soils[J]. Géotechnique, 2008, **58**(4): 237 - 248.
- [22] VERDUGO R, ISHIHARA K. The steady state of sandy soils[J]. Soils and Foundations, 1996, **36**(2): 81 - 91.
- [23] BEEN K, JEFFERIES M G. A state parameter for sands[J]. Géotechnique, 1985, **35**(2): 99 - 112.
- [24] HILL R. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1958, **6**(3): 236 - 249.
- [25] LADE P V. Static instability and liquefaction of loose fine sandy slopes[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1992, **118**(1): 51 - 71.
- [26] LÜ X L, HUANG M S, ANDRADE J E. Modeling the static liquefaction of unsaturated sand containing gas bubbles[J]. Soils and Foundations, 2018, **58**(1): 122 - 133.
- [27] ANDEADE J E. A predictive framework for liquefaction instability[J]. Géotechnique, 2009, **59**(8): 673 - 682.
- [28] LI X S, DAFALIAS Y F. Dilatancy for cohesionless soils[J]. Géotechnique, 2000, **50**(4): 449 - 460.