

DOI: 10.11779/CJGE2020S1016

基于 Akima 插值理论的水平试桩数据处理方法研究

竺明星^{1,2}, 尹倩^{*1,2}, 龚维明^{1,2}, 戴国亮^{1,2}, 卢红前³

(1. 东南大学混凝土及预应力混凝土教育部重点实验室, 江苏 南京 211189; 2. 东南大学土木工程学院, 江苏 南京 211189;

3. 中国能源建设集团江苏省电力设计院有限公司, 江苏 南京 211102)

摘要: 在水平试桩数据处理过程中, 经常会遇到低阶多项式拟合精度差、高阶多项式拟合不收敛以及五点滑移法数据点非等间距等问题, 严重制约了试桩成果数据的进一步应用。针对上述难题, 以 Akima 非线性插值理论为基础, 对实测数据点进行分段拟合 Akima 非线性多项式, 并推导得出相应的积分与微分表达式, 进而建立基于 Akima 非线性插值理论的水平试桩数据处理方法。针对数据处理结果振荡问题, 采用滤波方式予以解决。最后, 通过柔性桩案例详细阐述了该数据处理方法的应用过程, 结果表明该方法所得结果与理论计算结果几乎一致, 验证了该数据处理方法的可靠性和实用性。该方法可为水平试桩数据处理难题提供新的解决途径。

关键词: 水平试桩; 多项式拟合; 五点滑移法; Akima 非线性插值

中图分类号: TU473.1 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2020)S1-0080-05

作者简介: 竺明星(1985—), 男, 副研究员, 博士(后), 主要从事深水基础承载性能研究工作。E-mail: zhumingxing@seu.edu.cn。

Data processing method for laterally loaded trial piles based on Akima interpolation theory

ZHU Ming-xing^{1,2}, YIN Qian^{1,2}, GONG Wei-ming^{1,2}, DAI Guo-liang^{1,2}, LU Hong-qian³

(1. Key Laboratory of Concrete and Prestressed Concrete Structures of Ministry of Education, Nanjing 211189, China; 2. School of Civil Engineering, Southeast University, 211189, China; 3. China Energy Engineering Group Jiangsu Electric Power Design Institute Co., Ltd., Nanjing 211102, China)

Abstract: A series of problems, such as low-order polynomial fitting with lower accuracy, high-order polynomial fitting with no convergence, five-point smoothing method countering unequally spaced data and so on, may occur in the data processing for laterally loaded trial piles, which impedes the application of the test data. To overcome the difficulties as discussed above, firstly, this work obtains Akima nonlinear polynomials for the measured data by the piecewise polynomial fitting technology on the basis of Akima nonlinear interpolation theory. Moreover, integral and difference expressions for the corresponding nonlinear polynomials are derived to establish the data processing method for laterally loaded trial piles based on the Akima interpolation theory. For the results oscillating from the data processing, the filtering method will be employed to deal with this issue. Finally, one case study for flexible piles is performed to illustrate the application of the proposed data processing method. Comparison shows that the results from proposed method are almost identical to those of theoretical calculation, which verifies the reliability and practicability of this new method. This study may provide a new approach to solve the difficulties in data processing for laterally loaded trial piles.

Key words: laterally loaded trial pile; polynomial fitting; five-point smoothing method; Akima nonlinear interpolation

0 引言

为研究水平受荷桩承载性能及桩土相互作用特性, 通常需开展基桩水平加载试验研究。对于室内模型试验而言, 通常采用在模型桩身粘贴应变片的方式测得桩身应变, 并根据应变值计算出截面弯矩响应, 进而根据 Winkler 弹性地基梁模型推导出桩身变形、转角、剪力和土抗力沿深度变化规律。对于钢管桩而

言, 由于施工过程存在挤土效应而无法埋设测斜管, 因此钢管桩主要通过在钢管桩外侧壁焊接钢板计或光

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目(51808112); 江苏省自然科学基金青年基金项目(BK20180155); 国家自然科学基金项目(51878160, 51678145)

收稿日期: 2020-06-04

*通讯作者(E-mail: 230198808@seu.edu.cn)

纤光栅传感器方式测得桩身截面弯矩响应, 并进一步推导桩身其他响应量。对于灌注桩而言, 常用的水平测试元件主要有测斜管、钢筋计、光纤光栅传感器等, 可同时测得桩身水平变形和截面弯矩。此时不但可推导得出桩身转角、剪力、土抗力, 还可得出桩身截面抗弯刚度沿深度分布特性, 进一步校核桩身截面特性。

在基桩水平承载试验过程中, 根据实测数据推导其他桩身响应量时一般有两种方式: 一是将离散的数据点拟合得到光滑曲线方程, 并进行积分和微分操作; 二是在离散数据点基础上首先采用五点滑移法进行数据点“光滑”处理, 随后采用五点差分格式进行微分求解。针对第一种数据处理方式, 目前使用较多的是将数据点拟合成多项式。Soares 等根据桩身变形的实测数据点, 采用 9 次多项式拟合得出桩身连续的变形方程^[1]。朱斌等^[2]采用最小二乘法结合桩顶、桩端边界条件的方法进行了多项式的拟合, 并认为 8 次多项式拟合效果较好。Sinnreich 等^[3]通过形状调整系数结合多项式的方法, 实现了较好地任意桩身变形形态的拟合。Yun 等^[4]根据边界条件建立了 5 次多项式拟合实测弯矩数据点; Guo 等^[5]对多项式拟合实测弯矩方程进行了改进, 使其更好地反映实际桩身承载特性变化规律。上述方法对数据处理技术起到了推进作用, 但同时存在应用技术门槛较高的缺点, 特别是考虑曲线形态参数及边界条件等影响, 不利于工程推广应用。第二种数据处理方法在工程中应用较多, 但该方法严格要求数据点必须等间距, 一旦数据缺点则需通过线性差值方式进行补点, 从而影响分析结果; 同时该方法无法对桩顶、桩端进行计算。

针对上述常用的数据处理方法所存在的不足, 本文基于 Akima 非线性插值理论对桩顶、桩端以及缺点数据进行补点和数据点扩充操作, 随后分段拟合得到 Akima 多项式并推导该多项式的积分与微分表达式, 进而开展桩身变形与内力的推导计算。针对土抗力求解过程中结果振荡问题, 本文进一步提出“滤波”操作以消除振荡。最后, 通过柔性桩案例详细地阐述了该数据处理方法的应用过程, 结果表明该方法所得结果与理论计算结果几乎一致, 验证了该数据处理方法的可靠性和实用性。

1 Akima 非线性插值理论

基桩水平承载试验过程中, 桩身部分断面测试元件受试验环境等因素影响而无法正常工作, 此时常采用线性插值方法进行补点操作。但线性插值只考虑相邻两断面处的数据点, 往往会使得补点结果与实际情况差异较大。为克服线性插值的缺陷, 很多学者开展了多项式拟合法、样条函数插值法、Akima 插值理论

等非线性插值方法研究。其中, Akima 非线性插值理论^[6]是由 Akima 教授于 1970 年建立的一种全新的光滑非线性插值方法, 该方法所建立的曲线更光滑, 过渡更自然, 目前已被国内外广泛应用于测绘、遥感等领域。

1.1 基于 Akima 插值理论的中间补点方法

已知数据点 A, B, D 和 E , 预在点 B 和点 D 之间确定任意数据点 C , 则根据 Akima 等理论^[6], 需基于已知数据点建立具有一阶导数的三次多项式曲线, 如图 1 所示。

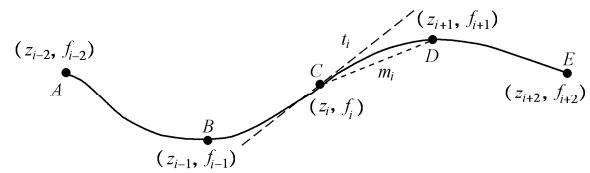


图 1 Akima 插值方法示意图

Fig. 1 Schematic graph of Akima interpolation method

则点 C 和 D 之间的 Akima 多项式为

$$f = a_0 + a_1(z - z_i) + a_2(z - z_i)^2 + a_3(z - z_i)^3 \quad (1)$$

式中 z 为介于 z_i 和 z_{i+1} 之间的值; f 为插值点因变量 z 对应的结果值; a_0, a_1, a_2 和 a_3 为多项式系数。采用下式计算多项式系数 a_0, a_1, a_2 和 a_3 :

$$\begin{cases} a_0 = f_i, \\ a_1 = t_i, \\ a_2 = \frac{3m_i - 2t_i - t_{i+1}}{z_{i+1} - z_i}, \\ a_3 = \frac{t_{i+1} + t_i - 2m_i}{(z_{i+1} - z_i)^2}, \end{cases} \quad (2)$$

式中 t_i 为曲线方程在数据点 C 处的一阶导数; m_i 为点 C —点 D 之间斜率。根据 Akima 几何条件^[6]可知:

$$\begin{cases} t_i = \frac{|m_{i+1} - m_i|m_{i-1} + |m_{i-1} - m_{i-2}|m_i}{|m_{i+1} - m_i| + |m_{i-1} - m_{i-2}|}, \\ m_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{z_{i+1} - z_i}, \end{cases} \quad (3)$$

式中, m_{i-2}, m_{i-1} 和 m_{i+1} 分别为点 A —点 B 、点 B —点 C 以及点 D —点 E 的斜率。需要注意: 当 $|m_{i+1} - m_i| + |m_{i-1} - m_{i-2}| = 0$ 时, 公式 (3) 中的 t_i 计算公式不成立, 此时取 $t_i = m_i$ 或 $(m_{i-1} + m_i)/2$; 当 $m_{i-1} = m_{i+1} \neq m_i \neq m_{i-2}$ 时, 取 $t_i = m_{i+1}$; 当 $m_{i-2} = m_i \neq m_{i-1} \neq m_{i+1}$ 时, 取 $t_i = m_i$ 。

根据公式 (1) 即可得出相邻任意间距数据点之间的非线性光滑曲线方程, 从而根据需要进行任意位置插值计算。然而公式 (1) 的计算只适用于计算中间部位数据点, 当计算端点部位数据时, 由于数据点数量缺少, 需要对端部进行补点处理。

1.2 基于 Akima 插值理论的端部补点方法

一般情况下很少在桩顶和桩端位置处理设测试

元件, 使得试桩两端点无实测数据可用。针对这种情况, Akima 非线性光滑插值理论^[6]提出了如图 2 所示的端部补点算法。

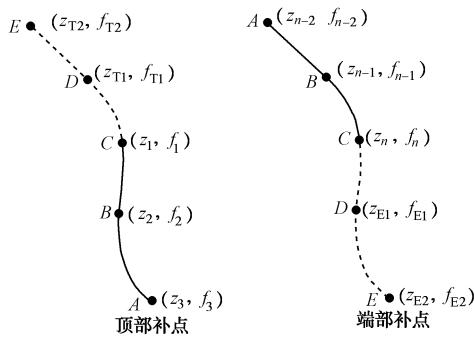


图 2 Akima 桩顶和桩端插值示意图

Fig. 2 Schematic graph of Akima interpolation at pile head and toe

根据图 2 中顶部补点示意图可知数据点 A 、 B 和 C 为已知, 点 D 和点 E 为补充数据点, Akima 等^[6]规定点 $A \sim C$ 和补点 D 和 E 之间自变量需满足下式要求:

$$z_3 - z_1 = z_2 - z_{T1} = z_1 - z_{T2} \quad (4)$$

同时, Akima 假定补充的两个数据点均在如下所示二次多项式曲线上:

$$f = b_{T0} + b_{T1}(z - z_1) + b_{T2}(z - z_2)^2 \quad (5)$$

式中, b_{T0} , b_{T1} 和 b_{T2} 为多项式系数。根据公式 (4) 以及数据点 $A \sim C$ 的值可解得:

$$\begin{cases} b_{T0} = f_1, \\ b_{T1} = \frac{\Delta f_{21} \Delta z_{31}^2 - \Delta f_{31} \Delta z_{21}^2}{\Delta z_{21} \Delta z_{31} (\Delta z_{31} - \Delta z_{21})}, \\ b_{T2} = \frac{\Delta f_{21} \Delta z_{31} - \Delta f_{31} \Delta z_{21}}{\Delta z_{21} \Delta z_{31} (\Delta z_{21} - \Delta z_{31})}, \end{cases} \quad (6)$$

式中 $\Delta z_{21} = z_2 - z_1$; $\Delta z_{31} = z_3 - z_1$; $\Delta f_{21} = f_2 - f_1$; $\Delta f_{31} = f_3 - f_1$ 。

类似地, 根据图 2 中端部补点示意图可知图中数据点 A 、 B 和 C 为已知, 点 D 和点 E 为额外补充的数据点, Akima 等^[6]规定点 $A \sim C$ 和补点 D 和 E 之间的自变量满足下式要求:

$$z_{E2} - z_n = z_{E1} - z_{n-1} = z_n - z_{n-2} \quad (7)$$

Akima 亦假定补充的两个数据点均在如下所示二次多项式曲线上:

$$f = b_{E0} + b_{E1}(z - z_n) + b_{E2}(z - z_n)^2 \quad (8)$$

式中, b_{E0} , b_{E1} 和 b_{E2} 为多项式系数。根据公式 (7) 以及数据点 A , B 和 C 的值可解得:

$$\begin{cases} b_{E0} = f_n, \\ b_{E1} = \frac{\Delta f_{(n-1)n} \Delta z_{(n-2)n}^2 - \Delta f_{(n-2)n} \Delta z_{(n-1)n}^2}{\Delta z_{(n-1)n} \Delta z_{(n-2)n} (\Delta z_{(n-2)n} - \Delta z_{(n-1)n})}, \\ b_{E2} = \frac{\Delta f_{(n-1)n} \Delta z_{(n-2)n} - \Delta f_{(n-2)n} \Delta z_{(n-1)n}}{\Delta z_{(n-1)n} \Delta z_{(n-2)n} (\Delta z_{(n-1)n} - \Delta z_{(n-2)n})}, \end{cases} \quad (9)$$

式中 $\Delta z_{(n-2)n} = z_{n-2} - z_n$; $\Delta z_{(n-1)n} = z_{n-1} - z_n$; $\Delta f_{(n-2)n} =$

$$f_{n-2} - f_n; \quad \Delta f_{(n-1)n} = f_{n-1} - f_n.$$

在得出顶部和端部补充的数据点之后, 即可解得补充点的斜率和一阶导数, 如下所示:

$$\begin{cases} m_{T1} = 2m_1 - m_2, \\ m_{T2} = 2m_{T1} - m_1, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} m_n = 2m_{n-1} - m_{n-2}, \\ m_{E1} = 2m_n - m_{n-1}, \end{cases} \quad (11)$$

式中 m_{T1} 为点 z_{T1} 和 z_1 之间的斜率; m_{T2} 为点 z_{T2} 和 z_{T1} 之间的斜率; m_n 为点 z_n 和 z_{E1} 之间的斜率; m_{E1} 为点 z_{E1} 和 z_{E2} 之间的斜率。

2 桩身响应量计算方法

2.1 基于 Akima 多项式的微分计算

根据公式(1)设任意两个实测数据点 (z_i, f_i) 和 (z_{i+1}, f_{i+1}) 之间的 Akima 多项式为 $f(z)$, 则该多项式的一阶导数为

$$\frac{df(z)}{dz} = a_1 + 2a_2(z - z_i) + 3a_3(z - z_i)^2, \quad (12)$$

式中, 多项式系数 a_1 , a_2 和 a_3 根据公式 (2) 计算得出。

为更好阐述上式的应用, 以实测数据点桩身弯矩 $M(z)$ 为例, 具体操作步骤如下:

(1) 根据 1.1 节方法对有限的数据点进行等间距扩充即可得出更为连续的弯矩分布;

(2) 然后根据公式 (12) 计算得出桩身剪力分布;

(3) 为提高土抗力的计算精度, 此时需对计算所得的剪力再次采用 1.1 节方法得出一系列任意相邻两点剪力的 Akima 三次多项式;

(4) 在剪力数据点分布基础上再次根据公式 (12) 计算得出土抗力值。

对于实测数据点为桩身变形 $y(z)$ 时, 采用上述方法即可得出桩身转角、弯矩、剪力和土抗力的推算结果, 此处不再重复叙述。

2.2 基于 Akima 多项式的积分计算

当实测数据点为桩身弯矩 $M(z)$ 时, 为求得桩身转角和桩身变形值, 需要对桩身弯矩进行积分处理。设实测数据为 $f(z)$, 则根据公式 (1) 可得任意两数据点 (z_i, f_i) 和 (z_{i+1}, f_{i+1}) 之间的曲线方程的一重积分:

$$\int f(z) dz = a_0(z - z_i) + a_1 \frac{(z - z_i)^2}{2} + a_2 \frac{(z - z_i)^3}{3} + a_3 \frac{(z - z_i)^4}{4} + a_{cs}, \quad (13)$$

式中 系数 a_0 , a_1 , a_2 和 a_3 根据公式 (2) 计算得出; a_{cs} 为积分常数, 需要根据已知的边界条件确定。

以实测数据点为桩身弯矩 $M(z)$ 为例, 首先根据 1.1

节内容对有限的数据点进行等间距扩充即可得出光滑连续的弯矩分布; 然后对测得的第一个数据点(一般为桩顶位置或泥面位置)和第二个数据点进行积分处理并采用公式(13)计算, 将所得结果除以抗弯刚度 EI , 此时的积分常数为第一个数据点断面处的转角值, 该转角值是求解整个桩身转角的关键所在。在试验测试过程中通常在桩顶和泥面处放置两个位移计来测得泥面处的转角值, 将该转角值作为积分常数代入, 即可求解第一段曲线方程。在求解第二段曲线积分时, 将第一段曲线端部值作为第二段曲线初始值代入, 可得到第二段曲线方程, 以此类推, 即可求得整个桩身转角响应量。与前述类似, 在求解桩身转角值后再次采用 1.1 节方法进行光滑处理并得出一系列任意相邻两点转角的三次多项式曲线方程。最后根据实测得到的第一个测点断面处的变形值和公式(13)最终得出整个桩身水平变形响应量。

3 水平受荷柔性桩案例

设桩基础的桩长 L 为 45.9 m, 桩径 d 为 2.4 m, 桩身截面抗弯刚度 EI 为 $4.24 \times 10^7 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$; 地基土共有六层, 相应的土体参数^[7]如表 1 所示。

表 1 土体参数

Table 1 Soil parameters

土层	厚度/m	不排水抗剪强度/kPa	ε_{50}	重度/(kN·m ⁻³)
1	13.5	28	0.007	17.5
2	5.0	42	0.007	17.5
3	5.0	60	0.006	17.8
4	9.5	140	0.005	17.8
5	6.5	213	0.004	20.2
6	6.4	255	0.004	20.5

为更好地演示和对比本文方法, 在 API 规范 $p-y$ 曲线法计算所得的理论桩身弯矩曲线上选取少数点作为已知的实测弯矩, 如图 3 所示。在此基础上, 采用本文方法推导桩身变形、转角、剪力以及土抗力分布, 并与 $p-y$ 曲线法理论计算结果进行对比。

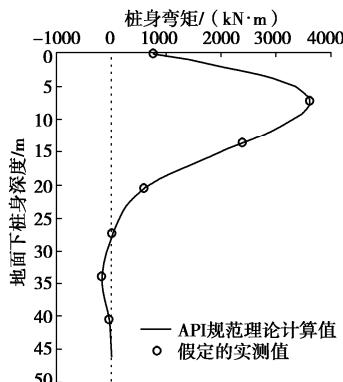


图 3 桩身弯矩分布

Fig. 3 Distribution of bending moment for pile shaft

3.1 积分推导桩身转角和变形

当实测数据为桩身弯矩时, 先采用 Akima 非线性光滑插值方法对数据点插值和扩充, 然后根据公式(13)进行积分计算, 并将结果除以桩身抗弯刚度 EI 即可得出桩身截面转角。积分过程中, 假定泥面处桩身转角实测值等于理论计算值, 为 -0.00118 rad , 则转角结果如图 4 (a) 所示。类似地, 假定泥面处桩身实测变形等于理论计算值, 为 0.011 m , 则变形结果如图 4 (b) 所示。由图 4 可知本文数据处理技术所得结果与理论结果几乎吻合, 证明了本文方法的可靠性。同时也验证了由弯矩积分推导桩身转角的可行性。

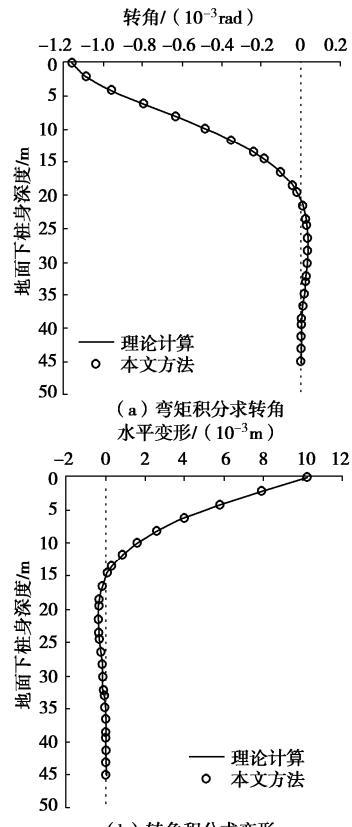


图 4 桩身弯矩求解转角与变形

Fig. 4 Solutions for slope and deflection from moment

3.2 微分推导桩身剪力和土抗力

首先根据 1.1 节方法对图 3 中少量的桩身“实测”数据点进行补点和扩充, 然后根据公式(12)对数据点进行微分计算进而得到如图 5 所示的桩身剪力分布。然后在图 5 基础上采用公式(13)对数据点进行微分计算, 得出如图 6 所示的桩身土抗力分布图。

从图 6 (a) 可发现滤波前本文方法所得土抗力分布出现振荡, 因为扩充数据点较多且对分段拟合多项式进行微分使得相邻两条 Akima 多项式在同一个数据点导数不连续。此时采用 Matlab 的滤波方法对结果进行处理, 得出图 6 (b) 所示曲线, 可知滤波处理后土抗力与理论计算结果吻合, 证明了“滤波”方式的有效性。

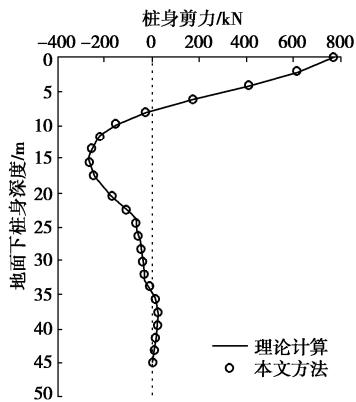


图 5 桩身弯矩求解剪力

Fig. 5 Solution for shear force from moment

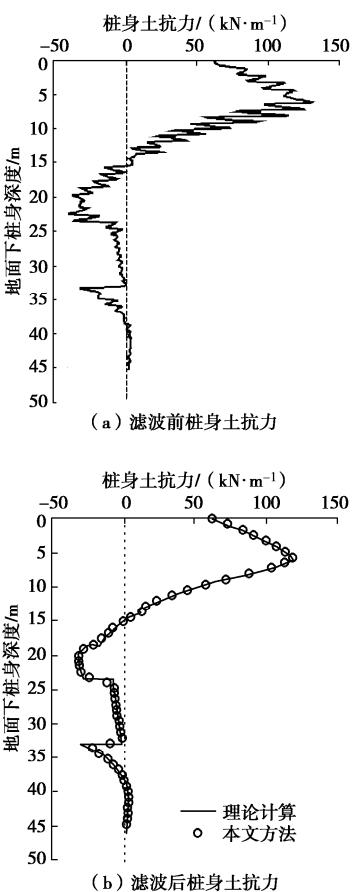


图 6 桩身剪力求解土抗力

Fig. 6 Solution for soil resistance from shear force

4 结 论

本文以 Akima 非线性光滑插值理论为基础, 开展实测数据点任意间距插值和扩充研究; 随后基于

Akima 多项式分别推导其积分与微分表达式, 进而建立根据实测数据点推测桩身响应量的方法。并通过案例分析验证了该方法的有效性。主要得出以下结论:

- (1) 当实测数据点较少时, 可以采用本文所阐述的方法进行任意间距的数据点扩充操作。
- (2) Akima 多项式属于低阶次多项式, 桩身响应求解过程中不宜对其进行高阶次求导。
- (3) 当桩身土抗力分布存在明显振荡时, 可采用 Matlab 软件进行滤波处理, 所得结果较为理想。

参考文献:

- [1] 罗军. 船舶撞击下高桩大变形性状及柔性护墩桩式防撞系统研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2008. (LUO Jun. Study on Large Deformation Characteristics of Elevated Pile Subjected to Ship Impact and Flexible Piled Anti-Collision System[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2008. (in Chinese))
- [2] 朱斌, 朱瑞燕, 罗军, 等. 海洋高桩基础水平大变位性状模型试验研究[J]. 岩土工程学报, 2010, 32(4): 521-530. (ZHU Bin, ZHU Rui-yan, LUO Jun, et al. Model tests on characteristics of ocean and offshore elevated piles with large lateral deflection[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 32(4): 521-530. (in Chinese))
- [3] SINNREICH J, AYITHI A. Derivation of $p-y$ curves from lateral pile load test instrument data[J]. Geotechnical Testing Journal, 2014, 37(6): 1-12.
- [4] YUN W C, KIM D. Experimental development of the $p-y$ relationship for large-diameter offshore monopiles in sands: centrifuge tests[J]. Journal of Geotechnical & Geoenvironmental Engineering, 2016, 142(1): 04015058.
- [5] GUO F, LEHANE B M, JU J. Experimentally derived CPT-based $p-y$ curves for soft clay[C]// Proceedings of the 3rd international symposium on cone penetration testing, Las Vegas, NV, USA, 2014.
- [6] AKIMA H. A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures[J]. Journal of Association for Computing Machinery, 1970, 17(4): 589-602.
- [7] KIM Y, JEONG S, LEE S. Wedge failure analysis of soil resistance on laterally loaded piles in clay[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2011, 137(7): 678-694.

(编校: 明经平)