DOI：10.11779/CJGE202010016

超固结土中排水圆孔扩张弹塑性 UH 解

武孝天，徐永福*
（上海交通大学土木工程系，上海 200240）

摘 要：目前超固结土中圆孔扩张排水解无法合理考虑超固结土的应力－应变关系和三维强度效应，因而其解答与实际情况存在一定偏差。现有研究表明三维统一硬化（UH）本构模型可以合理描述超固结土的力学特性，基于该模型推导了超固结土中柱孔和球孔扩张的排水半解析解。为得出该问题的精确解答，通过引入辅助变量并联合 UH 模型、应力转换法和大应变理论等，将弹塑性圆孔扩张问题归结为非线性微分方程组的初值问题。解答中孔周无弹性区，所需的岩土参数与剑桥模型相同。通过与基于修正剑桥模型的解答相对比，详细研究了圆孔扩张过程中孔周超固结土应力场和体积的变化规律。结果表明，预测结果合理模拟了超固结土的剪缩和剪胀、峰值强度、超固结比和潜在强度的衰化以及三维强度效应等特性，因此可以广泛应用于超固结土地区的扩孔工程分析。

关键词：柱（球）孔扩张；超固结土；UH 模型；三维强度；排水
中图分类号：TU473 **文献标识码**：A **文章编号**：1000－4548(2020)10－1903－11

作者简介：武孝天(1994—)，男，安徽淮北人，硕士研究生，主要从事岩土力学等方面的研究工作。E-mail: wuxiaotian@sjtu.edu.cn。

Elasto-plastic solution for drained cavity expansion in over-consolidated soil incorporating three-dimensional unified hardening model

WU Xiao-tian, XU Yong-fu
(Department of Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: The current solutions to cavity expansion cannot properly consider the stress-strain relationship and three-dimensional strength of the over-consolidated soil, thus there is some discrepancy between the solution and the practical situation. The existing researches show that the three-dimensional unified hardening (UH) model can well describe the mechanical properties of over-consolidated soil. Therefore, the model is used to develop a rigorous semi-analytical approach for drained cylindrical and spherical cavity expansion problems in over-consolidated soil. By introducing an auxiliary variable and combining the UH model, stress transform method and large strain theory, the cavity expansion problem is converted to solving a system of nonlinear differential equations as an initial value problem. There is no elastic zone around the cavity in the solution and the geomaterial parameters needed for the solution process are the same as for the Cam clay model. Compared with the modified Cam clay model-based solutions, the predicted results capture the stress–strain relationships, shear dilatancy, attenuation of over-consolidated ratio and potential failure stress ratio and three-dimensional stress states of the over-consolidated soil surrounding the cavity reasonably. Therefore, the proposed solution can be widely applied to the geotechnical problems in over-consolidated soil areas, such as the cone penetration tests and the pile installation.

Key words: cavity expansion; over-consolidated soil; UH model; three-dimensional strength; drainage

0 引 言

圆孔扩张理论从理论上分析了孔周围的应力和应变场。该理论已成为分析压力计测试[1-2]、贯入桩的承载力和对桩周土的扰动[3-4]、注浆劈裂[5]和地下隧道施工扰动[6]等问题的基本工具。然而，受理论及本构模型的限制，早期解答大多基于理想弹塑性本构关系[7-10]，这些解答可以在一定程度上模拟扩孔过程中土的剪胀性，但无法合理描述土体的应变硬化或软化行为。随后，以修正剑桥模型为代表的临界状态模型被广泛应用于圆孔扩张解答[11-15]。基于该模型的解答可以合理模拟正常固结土的剪切硬化，也可以在一定程度上模拟超固结土的剪胀特性。然而，这些解答不能合理考

基金项目：国家自然科学基金重点项目（41630633）；江苏省交通工程建设局科研项目
收稿日期：2020－01－14
*通信作者（E-mail: yongfuxu@sjtu.edu.cn）

虑扩孔时超固结土的峰值强度、特征状态和超固结比衰减特性，同时对超固结土剪胀和剪缩的大小计算存在较大偏差。近几年，为了考虑天然沉积环境下土体的各向异性，许多学者基于各向异性改进的修正剑桥模型分析孔周土体的应力场和应变场[16-18]。该模型可以较好地模拟正常固结土在扩孔时的各向异性特性，但在模拟超固结土中扩孔时依然存在 MCC 解答的上述问题。可以看出，这些解答具有较大的理论意义，但目前专门针对超固结土，可以合理考虑超固结土剪缩和剪胀、特征状态、峰值强度、超固结比的衰减和三维强度等特征的圆孔扩张解答很少。尤其在考虑排水情况下，体变与应力互相影响，使得严格基于临界状态模型的弹塑性解答更加难以得出，因此理论解答与实际情况存在一定程度的偏差。

本文针对超固结土中的柱/球孔排水扩张问题，采用 Yao 等[19-21]提出的 UH 模型描述孔周土体的弹塑性力学行为。现有研究表明 UH 模型对超固结土的应力－应变关系有很好的预测能力，可以合理考虑超固结土剪缩和剪胀、特征状态、峰值强度、超固结比的衰化和三维强度效应等特征。本文通过引入辅助变量并结合大变形理论，推导了孔周超固结土的弹塑性矩阵和控制方程组，并通过数值解法得到了方程组的半数值半解析解。本文解答为弹塑性模型求解圆孔扩张理论提供了新思路、新方法，可广泛应用于超固结土或正常固结土地区的排水扩孔工程问题。

1 圆孔扩张计算模型

本文考虑柱孔和球孔两种扩张形式，扩孔模型如图 1 所示。在 UH 本构模型中，一旦开始加载，土体立即屈服，因此孔周无弹性区，塑性区延伸到无限远处。土体初始孔径为 a_0，扩孔后至 a 半径处，此时扩孔压力为 σ_a。孔周土体单元的径向应力表示为 σ_r，切向应力表示为 σ_θ；无限远处土体的应力状态为原位应力状态。在柱孔扩张中，径向和切向应力大小均为 σ_{h0}，竖直方向应力为 σ_{v0}。在球孔扩张中，径向应力为 σ_{r0}，两小主应力均为 $\sigma_{\theta 0}$。由于孔周土体无临界状态区（详见下文），因此孔周只存在塑性区。

在排水情况下，孔周土体中总应力与有效应力相同，因此在孔扩张的任意阶段，根据力学平衡原理，孔壁土单元体都满足如下平衡方程：

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + m\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad , \tag{1}$$

式中，σ_r 和 σ_θ 分别为土单元的径向、切向有效应力；m=1 表示在柱孔中扩张，m=2 表示在球孔中扩张。

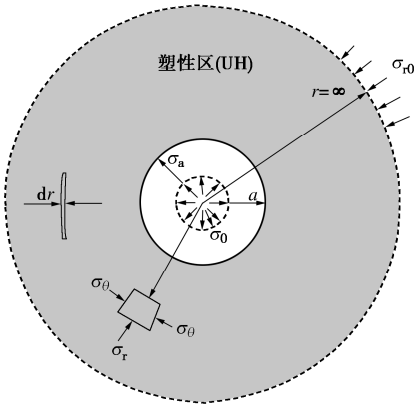


图 1 圆孔扩张模型

Fig. 1 Expansion of a cavity

2 应力变换和本构关系

2.1 应力空间变换

SMP 准则可以同时考虑 3 个剪应力的共同作用，能够合理地考虑中主应力对土体三维强度特性的影响，因此可以准确预测土体在三维应力状态下的屈服与破坏[22]。空间滑动面准则表示为

$$\frac{\tau_{SMP}}{\sigma_{SMP}} = \sqrt{\frac{I_1 I_2 - 9I_3}{9I_3}} \quad , \tag{2}$$

式中，I_1，I_2 和 I_3 分别为第一、二和三应力不变量。

SMP 准则改进的屈服面模型在 π 平面上的形状为曲边三角形，其半径随罗德角变化，而广义 Mises 准则在不同罗德角下半径相同，如图 2 所示。因此，若要将 SMP 准则引入模型中，需做应力空间变换，即将原应力空间在 π 平面上的曲边三角形转换为转换应力空间中 Mises 准则的圆。原应力空间 σ_{ij} 与转换应力空间 $\tilde{\sigma}_{ij}$ 的关系为[23]

$$\sigma_{ij} = \tilde{p}\delta_{ij} + \frac{q}{\tilde{q}}(\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{p}\delta_{ij}) \quad , \tag{3}$$

式中，$\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 分别为转换应力空间的平均主应力和偏应力，q 为原应力空间中的偏应力，计算式为

$$q = \frac{3\sqrt{2}\sin\varphi}{2\sqrt{2+\sin^2\varphi}}\frac{\tilde{p}}{\cos\psi} \quad 。 \tag{4}$$

式（4）中，φ和ψ为应力转换参数，可表示为

$$\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\tilde{\eta}}{\sqrt{9+3\tilde{\eta}}}\right) \quad , \tag{5}$$

$$\psi = \frac{1}{3}\cos^{-1}\left\{-\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3}{2+\sin^2\varphi}\right)^{3/2}\frac{\tilde{J}_3}{\tilde{J}_2^{3/2}}\sin\varphi\right\}, \tag{6}$$

式中，$\tilde{J}_2$ 和 $\tilde{J}_3$ 分别为转换应力空间的第二和第三偏应力不变量。

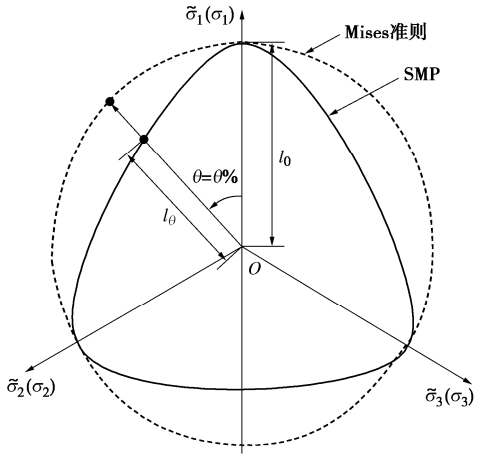


图 2 SMP 与 Mises 准则在 π 平面上的形状

Fig. 2 Shape of SMP and Mises criterion on π plane

2.2　UH 模型当前屈服面和参考屈服面

UH 本构模型使用当前屈服面与参考屈服面之间的关系来描述土硬化规律和超固结度衰化等特性，如图 3。当前屈服面在转换应力空间中表示为[20]

$$F=F(\tilde{\sigma}_{ij},\tilde{H})=\ln\frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_{x0}}+\ln\left(1+\frac{\tilde{q}^2}{M^2\tilde{p}^2}\right)-\frac{1}{c_{\mathrm{p}}}\tilde{H}=0\text{，}\tag{7}$$

式中，$c_{\mathrm{p}}=(\lambda-\kappa)/(1+e_0)$，$\lambda$ 和 κ 分别为等向压缩和回弹线的斜率，e_0 为土体的初始孔隙比，M 为临界状态应力比，H 称为统一硬化参数[20]，计算式为

$$\tilde{H}=\int\mathrm{d}\tilde{H}=\int\frac{\tilde{M}_{\mathrm{f}}^4-\tilde{\eta}^4}{M^4-\tilde{\eta}^4}\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}}\quad,\tag{8}$$

式中，$\tilde{M}_{\mathrm{f}}$ 为潜在强度，表示当前孔隙比和应力条件下土所具有的潜在抵抗破坏的能力[19]，表示为

$$\tilde{M}_{\mathrm{f}}=6\left[\sqrt{\frac{\vartheta}{\tilde{R}}\left(1+\frac{\vartheta}{\tilde{R}}\right)}-\frac{\vartheta}{\tilde{R}}\right]\quad,\tag{9}$$

式中，$\vartheta=M^2/\left[12(3-M)\right]$，$\tilde{R}$ 为超固结参数，该参数反映了扩孔过程中扩孔应力的变化引起的上下屈服面相似比的变化，表征土的超固结程度，表示为

$$\tilde{R}=\frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_{r0}}\left(1+\frac{\tilde{q}^2}{M^2\tilde{p}^2}\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon_{\mathrm{v}}^{p}}{c_{\mathrm{p}}}\right)\quad。\tag{10}$$

通过对式（8）变换有

$$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}}=\frac{M^4-\tilde{\eta}^4}{\tilde{M}_{\mathrm{f}}^4-\tilde{\eta}^4}\mathrm{d}\tilde{H}\quad,\tag{11}$$

由于在加载时增量满足 $\mathrm{d}\tilde{H}\geqslant 0$，故从式（11）可知：当 $0<\tilde{\eta}<M$ 时，塑性体应变 $\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}}>0$，此时土体剪缩硬化；当 $\tilde{\eta}=M$ 时 $\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}}=0$，土体处于特征状态，是剪缩与剪胀的分界点；当 $M<\tilde{\eta}<\tilde{M}_{\mathrm{f}}$ 时，有 $\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}}<0$，土体发生剪胀；当 $\tilde{\eta}=M=\tilde{M}_{\mathrm{f}}$ 时，土体达到临界状态，此时 $\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}}=\mathrm{d}H=0$，当前屈服面与参考屈服面重合，UH 模型退化为修正剑桥模型。

参考屈服面对应正常固结土的屈服面，表示为

$$\bar{F}=\ln\frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_r}+\ln\left(1+\frac{\tilde{q}^2}{M^2\tilde{p}^2}\right)=0\quad,\tag{12}$$

显然，参考屈服面的大小由硬化参数 $\tilde{p}_r$ 控制：

$$\ln\frac{\tilde{p}_r}{\tilde{p}_{r0}}=-\frac{1+e_0}{\lambda-\kappa}\varepsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}}\quad,\tag{13}$$

式中，$\tilde{p}_{r0}$ 为超固结土的先期固结压力，

$$\tilde{p}_{r0}=\mathrm{OCR}\cdot\tilde{p}_0\left(1+\frac{\tilde{q}_0^2}{M^2\tilde{p}_0^2}\right)\quad,\tag{14}$$

式中，$\tilde{p}_0$ 和 $\tilde{q}_0$ 为超固结土在未加载时的初始平均主应力和偏应力，OCR 为土体的超固结度。

可以看出，UH 模型以当前和参考屈服面的关系表示剪切时超固结土的塑性应变和超固结比的变化；以当前应力比与临界状态应力比的关系来表示土体剪缩与剪胀之间的转化；以潜在强度及其衰减来表示峰值强度和软化现象；以转换应力空间考虑土体的三维强度效应。此外，UH 模型与剑桥模型参数相同，可通过常规固结和三轴等试验确定。

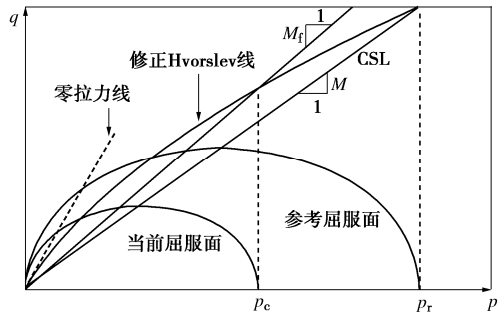


图 3 $p-q$ 平面上的当前屈服面和参考屈服面

Fig. 3 Current surface and reference surface on p-q plane

2.3　超固结土本构关系

UH 模型在转换应力空间中采用相关联的流动法则，因此有

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}=\mathrm{d}\tilde{\lambda}\frac{\partial F}{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}\quad,\tag{15}$$

式中，$\mathrm{d}\tilde{\lambda}$ 为塑性算子。结合一致性条件（$\mathrm{d}F=0$）和当前屈服面方程（7）有

$$\mathrm{d}\tilde{\lambda}=\frac{1}{A}\frac{\partial F}{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}\mathrm{d}\tilde{\sigma}_{ij}\quad,\tag{16}$$

式中，

$$A=-\frac{\partial F}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial\varepsilon_{kl}^{p}}\frac{\partial F}{\partial\tilde{\sigma}_{kl}}=c_{\mathrm{p}}\frac{\tilde{M}_{\mathrm{f}}^4-\tilde{\eta}^4}{\tilde{p}(M^2+\tilde{\eta}^2)^2}\quad,\tag{17}$$

$$\frac{\partial F}{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}=\frac{1}{M^2\tilde{p}^2+\tilde{q}^2}\left[\frac{M^2\tilde{p}^2-\tilde{q}^2}{3\tilde{p}}\delta_{ij}+3(\tilde{\sigma}_{ij}-\tilde{p}\delta_{ij})\right]\text{。}\tag{18}$$

将式（17），（18）代入式（16）中，塑性算子表示为

$$\mathrm{d}\tilde{\lambda}=c_{\mathrm{p}}\frac{M^2+\tilde{\eta}^2}{\tilde{M}_{\mathrm{f}}^4-\tilde{\eta}^4}\left[(M^2-\tilde{\eta}^2)\mathrm{d}\tilde{p}+2\tilde{\eta}\mathrm{d}\tilde{q}\right]。\quad(19)$$

将式（19）代入式（15）中，塑性应变增量以张量的形式可以表示为

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}=\frac{c_{\mathrm{p}}}{\tilde{p}^3}\frac{(M^2+\tilde{\eta}^2)^2}{\tilde{M}_{\mathrm{f}}^4-\tilde{\eta}^4}\left(\frac{\delta_{ij}}{3}+\frac{3\eta_{ij}-\eta_{kl}\eta_{kl}\delta_{ij}}{M^2+\tilde{\eta}^2}\right)^2\mathrm{d}\sigma_{ij}，\quad(20)$$

式中，$\eta_{ij}=(\sigma_{ij}-p\delta_{ij})/p$。由于土体为弹塑性体，总应变可分解为

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}=\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{e}}+\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}\quad。\quad(21)$$

在柱孔扩张中，联合式（20）和胡克定律，应力与总应变关系在 3 个主应力方向表示为

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}\varepsilon_r\\ \mathrm{d}\varepsilon_\theta\\ \mathrm{d}\varepsilon_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{E}+\xi\alpha_1^2 & -\frac{\nu}{E}+\xi\alpha_1\alpha_2 & -\frac{\nu}{E}+\xi\alpha_1\alpha_3\\ -\frac{\nu}{E}+\xi\alpha_2\alpha_1 & \frac{1}{E}+\xi\alpha_2^2 & -\frac{\nu}{E}+\xi\alpha_2\alpha_3\\ -\frac{\nu}{E}+\xi\alpha_3\alpha_1 & -\frac{\nu}{E}+\xi\alpha_3\alpha_2 & \frac{1}{E}+\xi\alpha_3^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}\tilde{\sigma}_r\\ \mathrm{d}\tilde{\sigma}_\theta\\ \mathrm{d}\tilde{\sigma}_z\end{bmatrix},\quad(22)$$

式中 $\mathrm{d}\varepsilon_r$，$\mathrm{d}\varepsilon_\theta$ 和 $\mathrm{d}\varepsilon_z$ 分别为柱孔扩张时孔壁单元土体在径向、切向和竖直方向上的应变增量；α_1，α_2，α_3 和 ξ 变量为

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=\frac{1}{3}\tilde{p}'(M^2-\tilde{\eta}^2)+3(\tilde{\sigma}_r'-\tilde{p}')，\\ \alpha_2&=\frac{1}{3}\tilde{p}'(M^2-\tilde{\eta}^2)+3(\tilde{\sigma}_\theta'-\tilde{p}')，\\ \alpha_3&=\frac{1}{3}\tilde{p}'(M^2-\tilde{\eta}^2)+3(\tilde{\sigma}_z'-\tilde{p}')，\\ \xi&=\frac{c_{\mathrm{p}}}{\tilde{p}'^3(\tilde{M}_{\mathrm{f}}^4-\tilde{\eta}^4)}\quad。\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

土体弹性模量采用非线性形式：

$$E=\frac{3(1-2\nu)\upsilon\tilde{p}'}{\kappa}\quad，\quad(24)$$

式中，υ为土体的比体积（$\upsilon=1+e$）。

在球孔扩张中，应力与总应变关系表示为

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}\varepsilon_r\\ \mathrm{d}\varepsilon_\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{E}+\xi\alpha_1^2 & -\frac{2\nu}{E}+2\xi\alpha_1\alpha_2\\ -\frac{\nu}{E}+\xi\alpha_1\alpha_2 & \frac{1-\nu}{E}+2\xi\alpha_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}\tilde{\sigma}_r\\ \mathrm{d}\tilde{\sigma}_\theta\end{bmatrix}\quad，\quad(25)$$

式（22）和式（25）即为超固结土中柱孔和球孔扩张时孔周土体的本构关系。由于应力始终位于当前屈服面上，一旦加载 $\mathrm{d}\tilde{\lambda}\geqslant 0$，进而产生塑性应变，因此孔周无弹性区，本构关系式适用于孔周任意一点。

3 柱孔扩张解答

3.1 应变分析及控制方程

在孔周的塑性区内，土体发生大应变变形，应变采用对数表达，即

$$\varepsilon_r=-\ln\left(\frac{\partial r}{\partial r_0}\right)\quad，\quad(26)$$

$$\varepsilon_\theta=-\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\quad，\quad(27)$$

式中，r 为 r_0 处土体发生径向的位移 u_r 后所在位置的半径（$r=r_0+u_r$）。因此，对式（26），（27）变换：

$$\mathrm{e}^{\varepsilon_\theta}=\frac{r_0}{r}=1-\frac{u_r}{r}\quad，\quad(28)$$

$$\mathrm{e}^{-\varepsilon_r}=\frac{\partial r}{\partial r_0}=\frac{\partial(r_0+u_r)}{\partial r_0}=1+\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial r_0}=1+\frac{\partial u_r}{\partial r}\mathrm{e}^{-\varepsilon_r}，\quad(29)$$

将式（28）代入式（29）中，可得孔周径向与环向应变之间的关系：

$$\varepsilon_r=\varepsilon_\theta+\ln\left(r\frac{\mathrm{d}\varepsilon_\theta}{\mathrm{d}r}+1\right)\quad，\quad(30)$$

由式（30）可知 ε_r 是 ε_θ 的函数，同时由式（27）可以知，ε_θ 是 r_0/r 的函数，因此 ε_r 也是 r_0/r 的函数。在此，引入辅助变量 ϑ，令 $\vartheta=r_0/r$，对数切向和径向应变可以表示为

$$\varepsilon_\theta=\ln(\vartheta)\quad，\quad(31)$$

$$\varepsilon_r=\varepsilon_v-\varepsilon_\theta=\ln\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon}\right)-\ln(\vartheta)=\ln\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon\vartheta}\right)\quad，\quad(32)$$

式中，υ为土体的比体积，由于考虑体积的变化，因此在扩孔时其值随应力状态的改变而改变。对于柱孔扩张来说，扩孔假定为平面应变问题（$\mathrm{d}\varepsilon_z=0$）。将式（31），（32）代入式（22），则方程组表示为

$$\mathrm{d}\tilde{\sigma}_r=-\frac{\beta_{11}}{\omega}\frac{d\upsilon}{\upsilon}+\frac{(\beta_{12}-\beta_{11})}{\omega}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\vartheta}\quad，\quad(33a)$$

$$\mathrm{d}\tilde{\sigma}_\theta=-\frac{\beta_{21}}{\omega}\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\upsilon}+\frac{(\beta_{22}-\beta_{21})}{\omega}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\vartheta}\quad，\quad(33b)$$

$$\mathrm{d}\tilde{\sigma}_z=-\frac{\beta_{31}}{\omega}\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\upsilon}+\frac{(\beta_{32}-\beta_{31})}{\omega}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\vartheta}\quad，\quad(33c)$$

式中，

$$\beta_{11}=1-\nu^2+E\alpha_2^2\xi+2E\nu\alpha_2\alpha_3\xi+E\alpha_3^2\xi\quad，\quad(34a)$$

$$\beta_{12}=\beta_{21}=-E\alpha_1(\alpha_2+\nu\alpha_3)\xi+\nu(1+\nu-E\alpha_2\alpha_3\xi+E\alpha_3^2\xi),\quad(34b)$$

$$\beta_{13}=\beta_{31}=-E\alpha_1(\nu\alpha_2+\alpha_3)\xi+\nu(1+\nu+E\alpha_2^2\xi-E\alpha_2\alpha_3\xi),\quad(34c)$$

$$\beta_{22}=1-\nu^2+E\alpha_1^2\xi+2E\nu\alpha_1a_3\xi+E\alpha_3^2\xi\quad，\quad(34d)$$

$$\beta_{23}=\beta_{32}=\nu+\nu^2+E\nu\alpha_1^2\xi-E\alpha_2\alpha_3\xi-E\nu\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)\xi,\quad(34e)$$

$$\omega=-\frac{1+\nu}{E}[-1+\nu+2\nu^2+E(-1+\nu)(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)\xi]+2\nu(1+\nu)(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1a_3+\alpha_2\alpha_3)\xi\quad。\quad(34f)$$

结合式（26），（32），有如下微分关系：

$$\frac{\mathrm{d}r_0}{\mathrm{d}r}=\frac{\upsilon_0}{\upsilon\vartheta}\quad，\quad(35)$$

对辅助变量 ϑ 微分，有

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}r}=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r_0}{\mathrm{d}r}-\frac{r_0}{r^2}=\frac{1}{r}\frac{\upsilon_0}{\upsilon\vartheta}-\frac{1}{r}\vartheta \quad , \tag{36}$$

将式（36）代入平衡方程式（1）可得

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}_r}{\mathrm{d}\vartheta}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}r}+\frac{\tilde{\sigma}_r-\tilde{\sigma}_\theta}{r}=\frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}_r}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\frac{1}{r}\frac{\upsilon_0}{\upsilon\vartheta}-\frac{1}{r}\vartheta\right)+\frac{\tilde{\sigma}_r-\tilde{\sigma}_\theta}{r}=0 \text{。} \tag{37}$$

将式（37）代入式（33a）～（33c）得到控制方程组：

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}_r}{\mathrm{d}\vartheta}=-\frac{\tilde{\sigma}_r-\tilde{\sigma}_\theta}{\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon\vartheta}-\vartheta\right)} \quad , \tag{38a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}_\theta}{\mathrm{d}\vartheta}=-\frac{\beta_{21}}{\beta_{11}}\left(\frac{\beta_{12}-\beta_{11}}{\omega\vartheta}+\frac{\tilde{\sigma}_r-\tilde{\sigma}_\theta}{\frac{\upsilon_0}{\upsilon\vartheta}-\vartheta}\right)+\frac{\beta_{22}-\beta_{21}}{\omega\vartheta} \text{，} \tag{38b}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}_z}{\mathrm{d}\vartheta}=-\frac{\beta_{31}}{\beta_{11}}\left(\frac{\beta_{12}-\beta_{11}}{\omega\vartheta}+\frac{\tilde{\sigma}_r-\tilde{\sigma}_\theta}{\frac{\upsilon_0}{\upsilon\vartheta}-\vartheta}\right)+\frac{\beta_{32}-\beta_{31}}{\omega\vartheta} \text{，} \tag{38c}$$

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\vartheta}=\frac{\omega\upsilon}{\beta_{11}}\left(\frac{\beta_{12}-\beta_{11}}{\omega\vartheta}+\frac{\tilde{\sigma}_r-\tilde{\sigma}_\theta}{\frac{\upsilon_0}{\upsilon\vartheta}-\vartheta}\right) \text{。} \tag{38d}$$

式（38a）～（38b）即为排水柱孔扩张应力分量和比体积的控制方程。由于当前屈服面的假设，孔周只有塑性区，控制方程适用于桩周土的任意一点。可以看出，通过辅助变量ϑ变换，将排水性土中柱孔扩张问题归结为含 4 个变量一阶微分方程组的初值问题。但需在此注意的是：以上求解均是在转换应力空间中进行，因此式（38）中的应力还需通过式（3）还原到原应力空间，才可获得真实应力解答。得到柱孔扩张的完整解答还需 3 个条件：①控制方程组的边界条件；②如何将方程中各变量与辅助变量的关系转化为与半径 r 的关系；③扩孔比 a/a_0 的取值。

3.2　定解条件

由于在孔周任意点均发生塑性形变，无扰动区域的位移边界条件为

$$\vartheta_0=1 \quad \text{。} \tag{39}$$

应力分量和比体积边界条件可表示为

$$\sigma_r(1)=\tilde{\sigma}'_{r0},\ \sigma_\theta(1)=\tilde{\sigma}'_{\theta 0},\ \sigma_z(1)=\tilde{\sigma}'_{z0},\ \upsilon(1)=1+e_0 \text{，} \tag{40}$$

由式（40）知，初始真实原位应力应先通过式（3）转换到转换应力空间，才是控制方程组（38）的应力边界条件。对式（36）变换，可得

$$\frac{1}{r}\mathrm{d}r=\frac{1}{\frac{\upsilon_0}{\upsilon\vartheta}-\vartheta}\mathrm{d}\vartheta \quad , \tag{41}$$

对式（41）两边积分，即可得到辅助变量ϑ与相应半径 r 处的关系：

$$\frac{r}{a}=\exp\left(\int_{\vartheta(a)}^{\vartheta}\frac{1}{\frac{\upsilon_0}{\upsilon\vartheta}-\vartheta}d\vartheta\right) \quad , \tag{42}$$

式中，$\vartheta(a)=a_0/a$ 为孔壁处ϑ的大小。

3.3　应力比与剪应变的关系

通过数值方法求解出控制方程中应力分量和体变与半径比ϑ的一一对应的关系后，结合

$$\eta=\frac{3\left[(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+(\sigma_r-\sigma_z)^2+(\sigma_\theta-\sigma_z)^2\right]^{1/2}}{\sqrt{2}(\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_z)} \text{，} \tag{43}$$

即可确定应力比 η 与ϑ的一一对应关系。结合式（19）和（20），柱孔周土体的剪切应变可表示为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\varepsilon_\mathrm{s}}{\mathrm{d}\vartheta}&=\mathrm{d}\lambda\frac{\partial F}{\partial q}/\mathrm{d}\vartheta=2\eta\xi\left(\alpha_1\frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}_r}{\mathrm{d}\vartheta}+\alpha_2\frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}_\theta}{\mathrm{d}\vartheta}+\alpha_3\frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}_z}{\mathrm{d}\vartheta}\right)\\&=-2\eta\xi\left\{\alpha_1\frac{\tilde{\sigma}_r-\tilde{\sigma}_\theta}{\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon\vartheta}-\vartheta\right)}+\right.\\&\alpha_2\left[\frac{\beta_{21}}{\beta_{11}}\left(\frac{\beta_{12}-\beta_{11}}{\omega\vartheta}+\frac{\tilde{\sigma}_r-\tilde{\sigma}_\theta}{\frac{\upsilon_0}{\upsilon\vartheta}-\vartheta}\right)+\frac{\beta_{22}-\beta_{21}}{\omega\vartheta}\right]+\\&\left.\alpha_3\left[\frac{\beta_{31}}{\beta_{11}}\left(\frac{\beta_{12}-\beta_{11}}{\omega\vartheta}+\frac{\tilde{\sigma}_r-\tilde{\sigma}_\theta}{\frac{\upsilon_0}{\upsilon\vartheta}-\vartheta}\right)+\frac{\beta_{32}-\beta_{31}}{\omega\vartheta}\right]\right\} \text{。}\end{aligned} \tag{44}$$

通过式（44）计算出每一步长下的ε_s，即可确定ε_s与ϑ的对应关系。因此，每一步中同一ϑ对应的 η 与ε_s的关系即为柱孔扩张的 η - ε_s 应力应变关系。

4　球孔扩张解答

4.1　应变分析及控制方程

在球孔扩张的应变中，通过辅助变量变换，切向应变与式（27）相同，对数应变表示为

$$\varepsilon_r=\varepsilon_\mathrm{v}-2\varepsilon_\theta=\ln\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon}\right)-2\ln(\vartheta)=\ln\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon\vartheta^2}\right) \quad , \tag{45}$$

将式（27），（45）代入式（25），方程组表示为

$$\mathrm{d}\sigma_r=-\frac{A_{11}}{A}\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\upsilon}+\frac{A_{12}-2A_{11}}{A}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\vartheta} \quad , \tag{46a}$$

$$\mathrm{d}\sigma_\theta=-\frac{A_{21}}{A}\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\upsilon}+\frac{A_{22}-2A_{21}}{A}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\vartheta} \quad , \tag{46b}$$

式中各变量为

$$A_{11}=1-\nu+2E\alpha_2^2\xi \quad , \tag{47a}$$

$$A_{12}=2\nu-2E\alpha_1\alpha_2\xi \quad , \tag{47b}$$

$$A_{21}=\nu-E\alpha_1\alpha_2\xi \quad , \tag{47c}$$

$$A_{22}=1+E\alpha_1^2\xi \quad , \tag{47d}$$

$$A=\frac{1}{E}(1-\nu-2\nu^2)+(1-\nu)\alpha_1^2\xi+2\alpha_2^2\xi+4\nu\alpha_1\alpha_2\xi\text{，}\tag{47e}$$

将式（45）代入平衡方程式（1）有

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}\vartheta}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}r}+2\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\frac{1}{r}\frac{\upsilon_0}{\upsilon\vartheta^2}-\frac{1}{r}\vartheta\right)+2\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0,\tag{48}$$

变换式（48），并代入式（46a）和（46b），可得

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}\vartheta}=-\frac{2(\sigma_r-\sigma_\theta)}{\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon\vartheta^2}-\vartheta\right)}\quad,\tag{49a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\theta}{\mathrm{d}\vartheta}=-\frac{A_{21}}{A_{11}}\left(\frac{2(\sigma_r-\sigma_\theta)}{\frac{\upsilon_0}{\upsilon\vartheta^2}-\vartheta}+\frac{A_{12}-2A_{11}}{A\vartheta}\right)+\frac{A_{22}-2A_{21}}{A\vartheta},\tag{49b}$$

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\vartheta}=\frac{A\upsilon}{A_{11}}\left(\frac{2(\sigma_r-\sigma_\theta)}{\frac{\upsilon_0}{\upsilon\vartheta^2}-\vartheta}+\frac{A_{12}-2A_{11}}{A\vartheta}\right)\quad,\tag{49c}$$

式（49a）～（49b）即排水球孔扩张应力分量和比体积的控制方程。

4.2 定解条件

由于在孔周任意点均发生塑性形变，无扰动区域的位移初始条件与式（39）相同。应力和比体积初始条件可表示为

$$\sigma_r(1)=\tilde{\sigma}'_{r0},\ \sigma_\theta(1)=\tilde{\sigma}'_{\theta0},\ \upsilon(1)==1+e_0\quad。\tag{50}$$

类似柱孔扩张，构造微分：

$$\frac{1}{r}\mathrm{d}r=\frac{1}{\frac{\upsilon_0}{\upsilon\vartheta^2}-\vartheta}\mathrm{d}\vartheta\quad,\tag{51}$$

对上式两边积分，得到辅助变量ϑ与半径 r 的关系：

$$\frac{r}{a}=\exp\left(\int_{\vartheta(a)}^{\vartheta}\frac{1}{\frac{\upsilon_0}{\upsilon\vartheta^2}-\vartheta}\mathrm{d}\vartheta\right)\quad。\tag{52}$$

4.3 剪应力与剪应变的关系

与柱孔扩张求解方法类似，但球孔周土体的剪切应变计算式为

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_\mathrm{s}}{\mathrm{d}\vartheta}=2\eta\xi\left(\alpha_1\frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}_r}{\mathrm{d}\vartheta}+2\alpha_2\frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}_\theta}{\mathrm{d}\vartheta}\right)$$

$$=-2\eta\xi\left\{\alpha_1\frac{\tilde{\sigma}_r-\tilde{\sigma}_\theta}{\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon\vartheta}-\vartheta\right)}+\right.$$

$$\left.2\alpha_2\left[\frac{A_{21}}{A_{11}}\left(\frac{2(\sigma_r-\sigma_\theta)}{\frac{\upsilon_0}{\upsilon\vartheta^2}-\vartheta}+\frac{A_{12}-2A_{11}}{A\vartheta}\right)-\frac{A_{22}-2A_{21}}{A\vartheta}\right]\right\}。\tag{53}$$

联合式（53）和（43），与柱孔扩张类似，每一步同一ϑ对应的η与ε_s的关系即为球孔扩张的$\eta-\varepsilon_\mathrm{s}$应力应变关系。

5 UH 控制方程中应力、应变、超固结参数$\tilde{R}$和潜在强度$\tilde{M}_\mathrm{f}$的关系

圆孔扩张过程中产生塑性体变，从而影响了超固结参数$\tilde{R}$，进而影响潜在强度$\tilde{M}_\mathrm{f}$的大小，在控制方程中包含了潜在强度，所以$\tilde{M}_\mathrm{f}$的变化又对应力产生影响。同时，由于应力的变化又产生了塑性体变，反过来又影响了超固结参数$\tilde{R}$的演化规律。因此，四者之间形成了一种动态循环的关系，相互影响、相互制约，如图 4 所示。

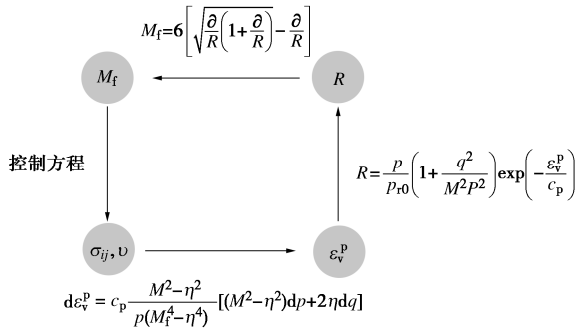


图 4 UH 控制方程内变量计算演化

Fig.4 Internal variables evolution in UH governing equation

因此这里需将潜在强度转换为一种显式的表达。考虑体积变化，体变表示为

$$\Delta\upsilon=\Delta\upsilon^\mathrm{e}+\Delta\upsilon^\mathrm{p}=-(\upsilon-\upsilon_0)\quad,\tag{54}$$

式中，弹性体变为

$$\Delta\upsilon^\mathrm{e}=\int_0^{e^\mathrm{e}}-\upsilon\mathrm{d}\varepsilon_\mathrm{v}^e=\int_0^{e^\mathrm{e}}-\upsilon\frac{\kappa}{\upsilon\tilde{p}}\mathrm{d}\tilde{p}=-\kappa\ln\frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_0}\quad,\tag{55}$$

将式（13）改写为

$$\ln\frac{\tilde{p}_r}{\tilde{p}_{r0}}=-\frac{1}{\lambda-\kappa}\Delta\upsilon^p\quad,\tag{56}$$

联合式（54）～（56），参考屈服面硬化参数表示为

$$\tilde{p}_r=\tilde{p}_{r0}\mathrm{e}^{-\frac{\upsilon-\upsilon_0}{\lambda-\kappa}}\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_0}\right)^{-\frac{\kappa}{\lambda-\kappa}}\quad,\tag{57}$$

联合式（9）和（10）并将式（57）代入，将潜在强度表示为

$$\tilde{M}_\mathrm{f}^i=6\left[\sqrt{\frac{12(3-M)\tilde{p}_i}{M^2\tilde{p}_r^{(i-1)}}\left(1+\frac{\tilde{q}_i^2}{M^2\tilde{p}_i^2}\right)\exp\left(\frac{\upsilon_i-\upsilon_{i-1}}{\lambda-\kappa}+\frac{\kappa}{\lambda-\kappa}\ln\frac{\tilde{p}_i}{\tilde{p}_{i-1}}\right)}+1+1\right]^{-1},\tag{58}$$

式中，i 表示当前步，i-1 表示前一步。控制方程（38）和（49）计算过程为：由初始超固结度 OCR 值算得初始潜在强度$\tilde{M}_\mathrm{f}^0$：

$$\tilde{M}_\mathrm{f}^0=6\left[\sqrt{\frac{12(3-M)}{M^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{OCR}}+1}+1\right]^{-1}\quad。\tag{59}$$

根据式（59）计算出第一步应力分量和比体积并储存。之后 $\tilde{M}_{\mathrm{f}}$ 依式（58）更新，计算该步应力分量和比体积，其中 $\tilde{p}_{i-1}$，υ_{i-1} 和 $\tilde{p}_r^{(i-1)}$ 为上一步储存结果。如此循环计算下去，其中一阶常微分方程组的计算可通过 Mathematica 软件编写 Runge-Kutta 法实现。至此，基于 UH 本构模型的超固结土圆孔扩张排水解答已完整得出。

6　算例分析与讨论

本文所采用的超固结土本构模型当 $M_{\mathrm{f}}=M$ 时退化为 SMP 准则改进的修正剑桥模型（SMP-MCC）。若 $M=M_{\mathrm{f}}$ 时本文解答与基于 SMP-MCC 模型的解答相同，则可间接验证本文解答的正确性。同时，通过对比 $M\neq M_{\mathrm{f}}$ 时本文解答与基于 MCC 模型解答的异同，可体现本文解答考虑超固结土剪缩和剪胀、特征状态、峰值强度、超固结比的衰化和三维强度效应特性的优点。

为比较和讨论本文结果的创新性，选取参照文献[12]中黏土(Boston blue clay)的参数计算，表 1 总结了本次计算所需参数。表中 υ_{cs} 为 CSL 线在 $e-\ln p$ 空间上 1 kPa 处与 e 轴的交点。

表 1　柱孔黏土参数

Table 1 Material properties for cylindrical cavity

OCR	σ'_{r0} /kPa	$\sigma'_{\theta 0}$ /kPa	σ'_{z0} /kPa	K_0	υ_0	E_0/MPa
1	100	100	160	0.625	2.09	1.10
3	120	120	120	1	1.97	1.05
10	144	144	72	2	1.80	0.96

注：λ =0.15，κ =0.03，ν =0.278，M=1.2，υ_{cs} =2.74。

对于球孔扩张的情况，黏土的 λ，κ 和 ν 参数不变，但球孔的两小主应力相同，因此初始应力和初始孔隙比需重新取值。初始孔隙比计算式为

$$\upsilon_0=\upsilon_{\mathrm{cs}}+(\lambda-\kappa)\ln 2-\lambda\ln p'_0+\ln\left[\mathrm{OCR}\cdot\left(1+\frac{q_0^2}{M^2p_0^2}\right)\right]^{\kappa-\lambda}。\tag{60}$$

由圆孔扩张的自相似性[24]可知，扩孔比 a/a_0 取某值时孔壁土体单元的各应力分量与辅助变量取相同值时所对应的孔外某位置处土单元的应力分量相同。根据表 1 和表 2 参数，通过控制方程计算柱/球孔扩张半径与扩张压力之间的关系曲线如图 5 所示。

表 2　球孔黏土参数

Table 2 Material properties for spherical cavity

OCR	σ'_{r0} /kPa	$\sigma'_{\theta 0}$ /kPa	K_0	υ_0	E_0/MPa
1	120	120	1	2.105	1.120
3	120	120	1	1.970	1.050
10	120	120	1	1.830	0.975

从图 5 看出，孔壁径向压力随孔径比的增加而迅速增大，其中球孔孔壁的扩张压力大于柱孔，随后压力缓慢增长并逐步趋于定值，说明孔壁处土体逐渐接近临界状态。然而计算结果中显示，随着扩孔比的增大，孔壁土体无限接近但没有达到临界状态，因此孔周无临界状态区，该结论与 Chen 等[13]相同。此外，超固结比对扩张压力有明显的影响，压力值随超固结比增大而明显增大。但当孔径比大于 2 时，不同超固结比的土体径向应力都变化很小。为了与 Chen 等[13]的解答对比，正常固结和弱超固结土中的孔径比 a/a_0 取为 2，强超固结土中当孔径比大于 2 时应力还有少许变化，为了观察其完整的变化，孔径比取值 8。

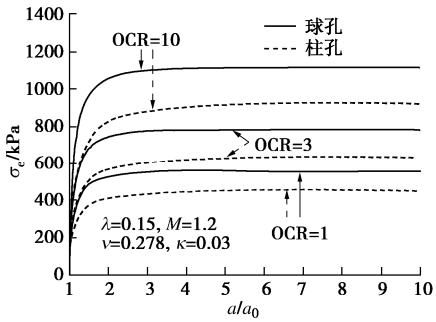
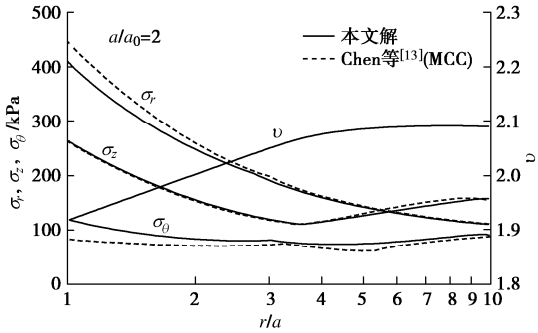


图 5　扩孔压力与孔径比的关系

Fig. 5 Variation of internal cavity pressure with cavity radius ratio

6.1　柱孔扩张

图 6 表示不同超固结比土中柱孔扩张后，应力分量和体变的分布规律。图中横坐标是底数为 10 的对数坐标。对于正常固结土（OCR=1），潜在强度 $M_{\mathrm{f}}=M$，本文解答退化为 SMP 准则改进的修正剑桥模型（SMP-MCC）解答。由图可知，基于 MCC 的解答高估了孔壁的径向应力同时低估了切向应力。对于轻超固结土（OCR=3），扩张过程中土体依然表现为剪缩，本文解体积变化量小于 MCC 解。在强超固结土（OCR=10）中，扩孔过程中孔壁土体先剪缩，随后呈剪胀趋势，最后再次剪缩，直至孔壁土体逐渐达到临界状态。同样，基于 MCC 的解答高估了孔壁的径向应力、竖直方向应力和体积变化量。



（a）OCR=1

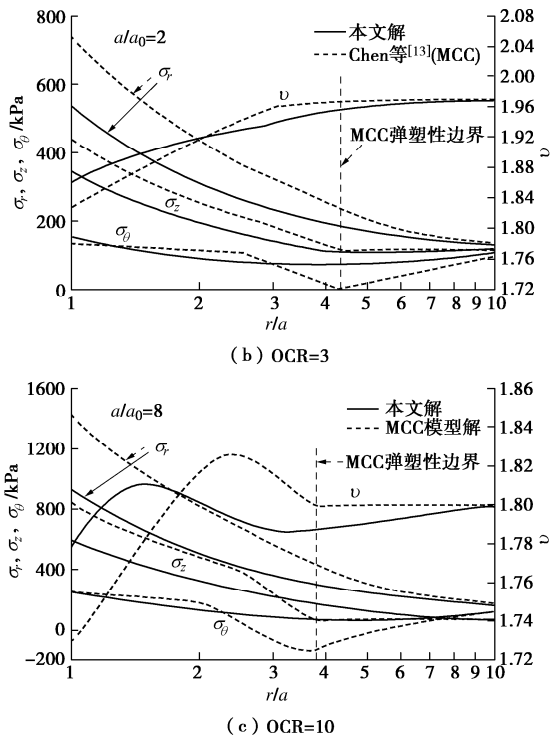


图 6 应力分量和比体积的分布

Fig. 6 Stress components and volume distributions

图 7 表示孔壁土体的应力路径 SP 和屈服面在 $p-q$ 平面上的变化。图中，Y（Y'）和 F（F'）分别表示 UH 屈服点（MCC 屈服点）和 UH 破坏点（MCC 破坏点）。在柱孔扩张中，不同初始状态土体的应力 Lode 角最终均收敛于 30°，而在该角度上的 SMP 强度低于 Mises 强度，因此土体破坏时，基于 UH 解答的临界破坏线位于 MCC 临界状态线的下方，应力比 M_θ=0.96。此外，由于剪切过程中土体 Lode 在不断变化，经过应力空间转换后当前屈服面的形状随罗德角不断改变。对于 OCR=1 的正常固结土，柱孔扩张过程中孔壁土体应力路径向右移动并伴随初始屈服面（IYS）扩张，当扩张至最终屈服面（FYS）时土体达到临界状态。对于 OCR=3 的超固结土，初始应力各向同性，同时初始应力点也是屈服点 Y，位于初始当前屈服面上。柱孔扩张时孔壁土体的初始当前屈服面（ICYS）和初始参考屈服面（IRYS）同时向外扩张，而当前屈服面扩张速度更快，两屈服面接近，超固结比不断衰减，直至两屈服面重合，土体达到临界状态。由式（13）知，参考屈服面与 p 轴的交点向右移动表明该过程孔壁土体表现为塑性剪缩。对于 OCR=10 的强超固结土，剪切过程中孔壁土体应力比先 $\tilde{\eta}<M$，随着应力比增大，应力路径穿过 CSL 时 $\tilde{\eta}=M$，此时柱孔扩张为中性加载，参考屈服面位于扩大和收缩的转换界限上并以 TYS 表示，土体由塑性剪缩转换为塑性剪胀。随后 SP 右移并从 CSL 的上方向下再次穿过 CSL，孔壁土体再一次经历中性加载，土体由塑性剪胀转换为塑性剪缩，最后 SP 从下方与 CSL 相交，破坏点 F'位于 F 的右上方，土体在这一过程中当前屈服面一直扩大而参考屈服面先扩大再缩小最后再扩大，两屈服面不断接近，超固结比衰减。

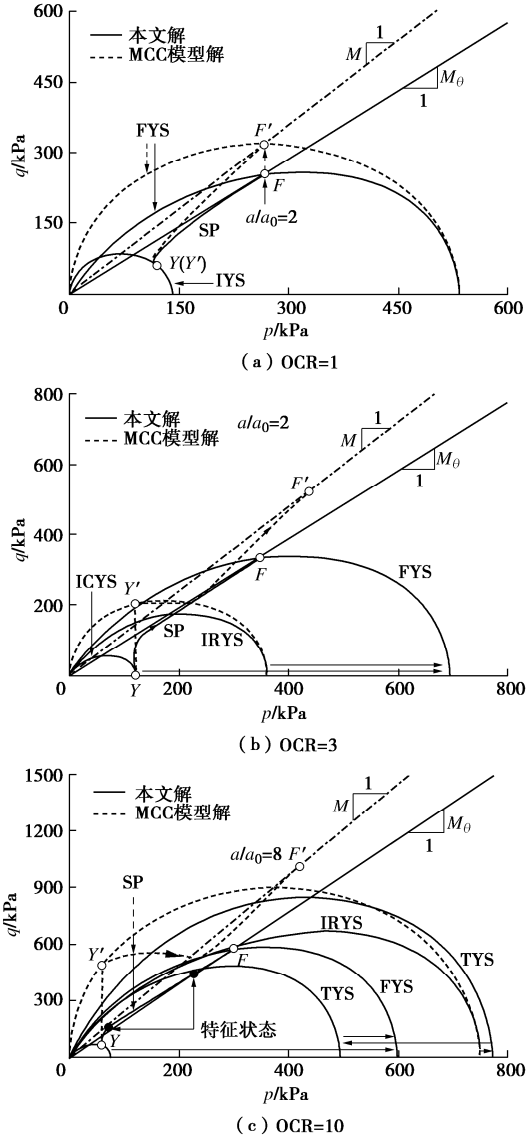


图 7 应力路径和屈服面

Fig. 7 Stress paths and yield surfaces

综合以上分析，基于 MCC 的解答低估了初始加载阶段孔壁超固结土的体变，高估了初始阶段应力分量的变化，同时高估了弹塑性应变过程中超固结土的剪缩、剪胀和径向应力以及临界状态时平均主应力和偏应力。

6.2 球孔扩张

图 8 表示球孔扩张后应力分量和体变的分布规律。图 9 表示扩张过程中孔壁土体的应力路径 SP 以及当前和参考屈服面在 $p-q$ 平面上的演化规律。由于两小主应力大小相同，因此扩孔过程的应力罗德角始终为 0 度，该角度上 SMP 强度与 Mises 强度相同。在

应力空间变换中，应力分量变化前与变化后相同，因此土体屈服面始终为椭圆。

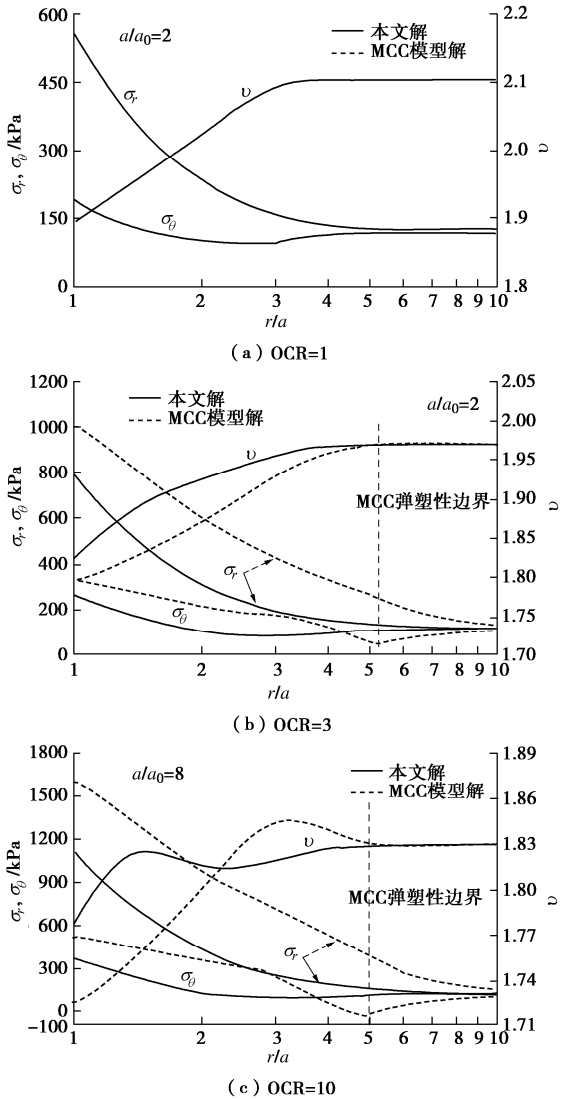


图 8 应力分量和比体积的分布

Fig. 8 Stress components and volume distributions

对于正常固结土，本文解答与 MCC 解完全相同，间接验证了本文解答的正确性。正常固结土和轻超固结土的参考屈服面扩大，土体应变硬化，其中 MCC 解答中屈服点 Y' 恰好位于本文解的初始参考屈服面上（IRYS）。强超固结土的塑性体变变化趋势与柱孔扩张中变化趋势一致，先剪缩后剪胀最后再剪缩直至孔壁土体逐渐达到临界状态。然而，在三维强度相同的情况下，MCC 模型对加载过程中土体的剪胀和剪缩，以及对临界状态时的径向应力、偏应力和平均主应力估计依然偏大。

6.3　超固结比和潜在强度的衰化

由上文分析知，在剪切的过程中超固结土的当前和参考屈服面不断接近，根据式（10）求出超固结比沿半径的衰化曲线，如图 10 所示。从图中看出，由远及近沿径向 OCR 的变化先慢后快再逐渐减缓，剪切过程中土体应力状态不断向正常固结土接近，当土体达到临界状态时，超固结比均减小至 1。

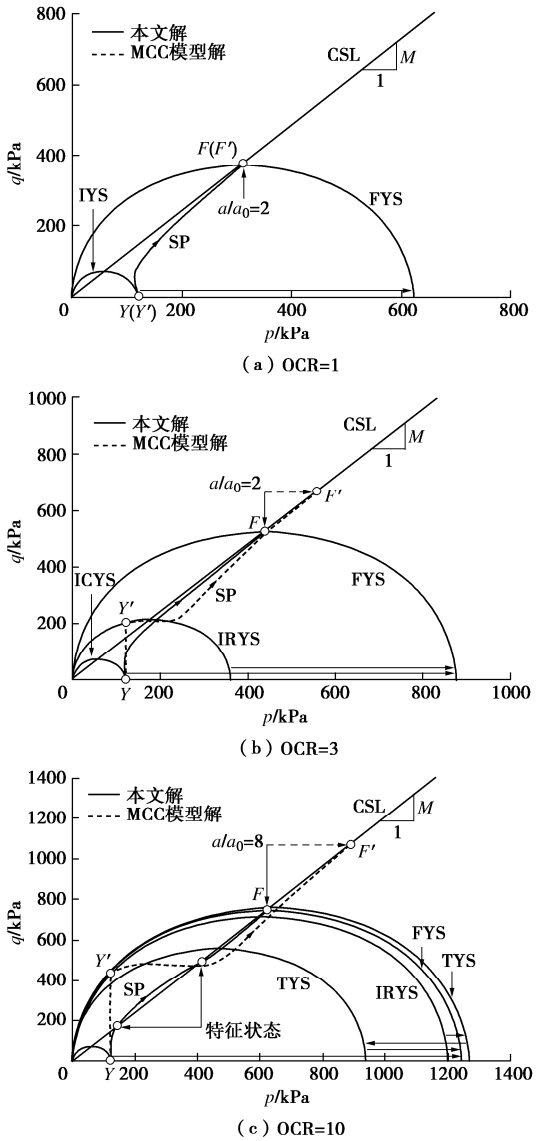


图 9 应力路径和屈服面

公 ig. 9 Stress paths and yield surfaces

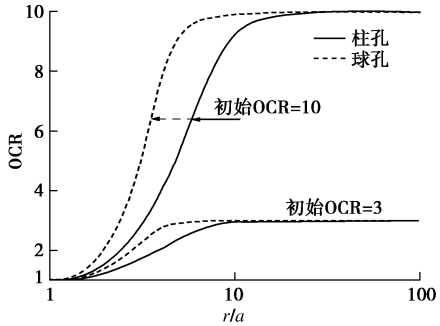


图 10 超固结比的衰减

Fig. 10 Attenuation rule for OCR

UH 模型中潜在强度表征超固结土抵抗剪切应变的能力，由于剪切过程中超固结土应力状态逐渐向正

常固结土接近，因此抵抗剪切的能力不断衰减，根据式（53）和（57）计算出剪切强度与剪切应变的关系曲线，如图 11 所示。从图中看出，随着超固结比不断增大，土体初始潜在强度增加，抵抗破坏能力增强。孔扩张过程中潜在强度随剪应变增加不断衰减，直至土体达到临界破坏状态，M_f=M。

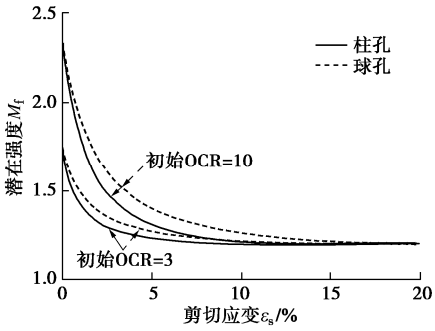


图 11 潜在强度随剪切应变的衰减

Fig. 11 Attenuation rule for potential failure stress ratio

7 结 论

基于 UH 本构模型和应力空间变换，通过引入辅助变量并结合大变形理论推导了超固结土中的柱（球）孔扩张的排水半解析解，解答考虑了孔周土体的剪缩和剪胀、峰值强度、超固结比和潜在强度的衰化、三维强度等特性，因而可以合理模拟超固结土中的圆孔扩张过程。

（1）圆孔扩张过程中孔周围只有塑性区，而基于 MCC 的解答中超固结土弹性区的假设低估了初始加载阶段土体体变，高估了初始阶段应力分量的变化，同时高估了弹塑性应变过程中超固结土的剪缩、剪胀、径向应力以及临界状态时平均主应力和偏应力。

（2）超固结比对孔周土体应力及体变的影响较为明显，对于正常固结土和轻超固结土，孔扩张过程中土体剪缩；对于强超固结土，土体在扩孔过程中先剪缩后剪胀最后再次剪缩。

（3）土的超固结比越大，其潜在强度越大，抵抗剪切应变能力越强，因此强超固结土中扩孔剪切过程中孔壁出现明显的峰值强度。

（4）圆孔扩张过程中超固结比衰减，进而潜在强度不断衰减。计算超固结土中圆孔扩张的应力场和应变场时，须考虑超固结比和潜在强度的衰化特性，否则难以合理反映超固结土的软化，导致较大误差。

（5）球孔扩张中应力罗德角不变，但柱孔扩张过程中罗德角在不断改变，因此柱孔扩张需采用应力空间转换方法以合理考虑孔周土体的三维强度效应。

参考文献：

[1] WROTH C P, WINDLE D. Analysis of the pressuremeter test allowing for volume change[J]. Géotechnique, 1975, **25**(3): 598－604.

[2] CHANG M F, TEH C I, CAO L F. Undrained cavity expansion in modified Cam clay II: application to the interpretation of the piezocone test[J]. Géotechnique, 2001, **51**(4): 335－350.

[3] RANDOLPH M F, CARTER J P, WROTH C P. Driven piles in clay-the effects of installation and subsequent consolidation[J]. Géotechnique, 1979, **29**(4): 361－393.

[4] LI L, LI J, SUN D A, and Gong W. Analysis of time-dependent bearing capacity of a driven pile in clayey soils by total stress method[J]. Inter J Geomech, 2017, **17**(7): 1－10.

[5] ANDERSEN K H, RAWLINGS C G, LUNNE T A, et al. Estimation of hydraulic fracture pressure in clay[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1994, **31**(6): 817－828.

[6] MARSHALL A M. Tunnel-pile interaction analysis using cavity expansion methods[J]. J Geotech Geoenviron Eng, 2012, **138**(10): 1237－1246.

[7] VESIC A S. Expansion of cavities in infinite soil mass[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1972, **98**(SM3): 265－269.

[8] YU H S, HOULSBY G T. Finite cavity expansion in dilatants soils: loading analysis[J]. Géotechnique, 1991, **41**(2): 173－183.

[9] MANTARAS F M, SCHNAID F. Cylindrical cavity expansion in dilatant cohesive-frictional materials[J]. Géotechnique, 2002, **52**(5): 337－348.

[10] YU H S, CARTER J P, Rigorous similarity solutions for cavity expansion in cohesive-frictional soils[J]. The International Journal of Geomechanics, 2002, **2**(2): 233－258.

[11] CAO L F, TEH CI, CHANG M F. Undrained cavity expansion in modified Cam clay I: theoretical analysis[J]. Géotechnique, 2001, **51**(4):323－334.

[12] CHEN S L, ABOUSLEIMAN Y N. Exact undrained elasto-plastic solution for cylindrical cavity expansion in modified Cam clay soil[J]. Géotechnique, 2012, **62**(5): 447－456.

[13] CHEN S L, ABOUSLEIMAN Y N. Exact drained solution for cylindrical cavity expansion in modified Cam clay soil[J]. Géotechnique, 2013, **63**(6):510－517.

[14] ZHOU H, LIU H L, KONG G Q. Analytical solution of

undrained cylindrical cavity expansion in saturated soil under anisotropic initial stress[J]. Comput and Geotech, 2014, **55**(1): 232－239.

[15] 李镜培, 唐剑华, 李　林, 等. 饱和黏土中柱孔三维弹塑性扩张机制研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2016, **35**(2): 378－386. (LI Jing-pei, TANG Jian-hua, LI Lin, et al. Mechanism of three dimensional elastic-plastic expansion of cylindrical cavity in saturated clay [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2016, **35**(2): 378－386. (in Chinese))

[16] LI L, LI J P, SUN D A. Anisotropically elasto-plastic solution to undrained cylindrical cavity expansion in K_0-consolidated clay[J]. Comput and Geotech, 2016, **73**(3): 83－90.

[17] CHEN S L, LIU K. Undrained cylindrical cavity expansion in anisotropic critical state soils[J]. Géotechnique, 2019, **69**(3): 189－202.

[18] Liu K, Chen S L. Analysis of cylindrical cavity expansion in anisotropic critical state soils under drained conditions [J]. Can Geotech J, 2019, **56**(5): 675－686.

[19] 姚仰平, 侯　伟, 周安楠. 基于 Hvorslev 面的超固结土本构模型[J]. 中国科学(E 辑), 2007, **37**(11): 1417－1429. (YAO Yang-ping, HOU Wei, ZHOU An-nan. A constitutive model for overconsolidated clays based on the Hvorslev envelope[J]. Science in China(Series E), 2007, **37**(11): 1417－1429.(in Chinese))

[20] YAO Y P, HOU W, ZHOU A N. UH model: three-dimensional unified hardening model for over- consolidated clays[J]. Géotechnique, 2009, **59**(5): 451－469.

[21] YAO Y P, GAO Z W, ZHAO J D, et al. Modified UH model: constitutive modeling of overconsolidated clays based on a parabolic Hvorslev envelope[J]. J Geotech Geoenviron Eng, 2012, **138**(7): 860－868.

[22] MATSUOKA H, SUN D A. The SMP Concept-Based 3D Constitutive Models for Geomaterials[M]. Taylor and Francis: CRC Press, 2006.

[23] MATSUOKA H, YAO Y P, SUN D A. The Cam-clay model revised by the SMP criterion[J]. Soils Found 1999, **39**(1):81－95.

[24] COLLINS I F, PENDER M J, WANG Y. Cavity expansion in sands under drained loading conditions[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1992, **16**(1): 3－23.

《岩土工程学报》征订启事

《岩土工程学报》创办于 1979 年，是我国水利、土木、力学、建筑、水电、振动等六个全国性学会联合主办的学术性科技期刊。由南京水利科学研究院承办，国内外公开发行。主要刊登土力学、岩石力学领域中能代表当今先进理论和实践水平的科学研究和工程实践成果等。报道新理论、新技术、新仪器、新材料的研究和应用。欢迎国家自然科学基金项目及其他重要项目的研究成果向本刊投稿，倡导和鼓励有实践经验的作者撰稿，并优先刊用这些稿件。主要栏目有黄文熙讲座、综述、论文、短文、工程实录、焦点论坛、讨论和简讯等。

本刊被《中文核心期刊要目总览》连续多年确认为核心期刊，并在建筑类核心期刊中位于前列；本刊被科技部“中国科技论文统计源期刊”（中国科技核心期刊）及“中国科技论文与引文数据库”收录；本刊被中国科学院“中国科学引文数据库”收录；本刊被“中国知网”全文收录及“中国学术期刊综合评价数据库”收录；本刊被“工程索引 Ei Compendex 数据库”和“日本科学技术振兴机构数据库 JST”等国际数据库收录。本刊网址（www.cgejournal.com）全文发布本刊所有刊载文章。

本刊读者对象为土木建筑、水利电力、交通运输、矿山冶金、工程地质等领域中从事岩土工程及相关专业的科研人员、设计人员、施工人员、监理人员和大专院校师生。

本刊为月刊，A4 开，双栏排版，192 页，每月中旬出版，每期定价 40 元，全年定价 480 元。

本刊国际标准刊号 ISSN 1000－4548，国内统一刊号 CN 32－1124/TU，国内发行代号 28－62，国外发行代号 MO 0520。欢迎广大读者在全国各地邮局订购，也可在编辑部订购（不另收邮费）。编辑部订购地址：南京虎踞关 34 号《岩土工程学报》编辑部；邮编：210024；联系电话：025-85829534，85829543，85829553，85829556；传真：025-85829555；E-mail: ge@nhri.cn。

《岩土工程学报》编辑部