

DOI: 10.11779/CJGE202009022

基于 3D 打印研究颗粒形状对砂土宏观力学性质的影响

康 馨¹, 陈植欣^{*1, 2}, 雷 航¹, 胡黎明², 陈仁朋¹

(1. 湖南大学土木工程学院, 湖南 长沙 410082; 2. 清华大学水利水电工程系, 水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084)

摘要: 颗粒形状是影响砂土宏观力学指标的重要因素。提出一种修正的三维形状系数 S' 表征颗粒的三维形状, 通过 3D 打印技术打印特定形状的砂颗粒, 进行相对密度试验以及颗粒材料在不同相对密度与应力状态下的直剪试验, 分别测得不同形状砂颗粒的极限堆积状态和宏观力学响应。试验结果表明: 三维形状系数 S' 可有效克服二维形状指标需确定多参数贡献度的缺陷; 随着 S' 值的增大, 颗粒堆积时的最大、最小孔隙比以及两者间的差值均增大; D_f 相同条件下, S' 值与临界状态摩擦角成正相关, 而由于 S' 值增大时, 相同 D_f 条件下越难达到密实的堆积状态, 使得峰值剪胀角与峰值内摩擦角随 S' 值的增大, 表现出先增大后减小的规律, 即存在一个临界三维形状系数值。基于试验数据建立 S' 值与宏观力学指标之间的关系式, 为工程设计与数值模拟考虑颗粒形状的影响提供理论依据。

关键词: 颗粒形状; 剪切性能; 3D 打印; 砂土; 直剪试验

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2020)09-1765-08

作者简介: 康 馨(1986—), 男, 陕西榆林人, 教授, 博士生导师, 主要从事土的基本性质与土工测试、环境岩土工程、非饱和土力学方面的研究。E-mail: kangxin@hnu.edu.cn。

Effects of particle shape on mechanical performance of sand with 3D printed soil analog

KANG Xin¹, CHEN Zhi-xin^{1, 2}, LEI Hang¹, HU Li-ming², CHEN Ren-peng¹

(1. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China; 2. State Key Laboratory of Hydro-Science and Engineering,

Department of Hydraulic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: At particle scale, the morphological characteristics have a significant effect on the mechanical responses of sand. To analyze such effect, a modified 3D shape factor S' is introduced to quantify the particle shape. The particles with the designed shape are fabricated through the 3D printing technology. The mechanical responses of the particles are obtained in the direct shear tests performed under a range of normal stress levels and relative packing densities. The data analysis shows that the difficulty of estimating the effects of particle shape on strength using 2D shape factors can be effectively overcome by the shape factor S' . The maximum and minimum void ratios have internal correlations with the values of S' . The comparison of the 3D printed soil analog and natural soil particles demonstrates the serviceability of 3D printed particles as substitutes for sandy materials in the laboratory. In addition, the critical state friction angle is found to increase with the increase of value of S' , but both the peak dilation angle and the peak internal friction angle are found to increase initially then decrease after reaching the peak, for the reason that irregularity promotes looser packing. This observation indicates that there exists an optimal particle shape factor of granular materials in nature. Finally, the relationship between S' and mechanical properties is established to provide theoretical basis for considering the effects of particle shape in engineering design and numerical simulations.

Key words: particle shape; mechanical performance; 3D printing; sand; direct-shear test

0 引言

砂土的强度在土木工程中具有重要意义, 它是计算地基承载力、土坡稳定性和挡土墙土压力的关键。砂土作为一种松散多相的颗粒类材料, 其强度往往取决于颗粒间的相互作用。颗粒层面的运动以及相互作用力构成了砂土宏观力学特性的基础。砂土颗粒层面物理要素主要包括颗粒的大小, 级配与形状, 关于前

两者, 已有大量研究表明其对砂土力学性质的重要影响。Miskin 等^[1]指出, 虽然距库仑提出土的强度公式已过去两百多年, 但目前对颗粒材料的形状与其力学性能之间联系的理解仍较浅。然而, 砂土颗粒形状差

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目 (51808207)

收稿日期: 2019-08-20

*通信作者 (E-mail: chenzhinapple@163.com)

异很大,选择特定的颗粒形状往往意味着选择了特定的颗粒排列与力学性能^[1],忽略颗粒的形状特征会对设计结果和工程造价造成较大影响。因此,对砂土这种在自然界中广泛存在的颗粒材料,很有必要深入探究颗粒多层面的形状要素与其物理力学性质之间的关系。

在以往关于颗粒形状的研究中,存在着两个关键的难题需要解决:一是表征颗粒形状时,多是对显微镜获取的二维图像进行傅里叶级数或分形维数等数学描述^[2-3],或是直接构建二维形状系数。前者在实际工程中的应用过于复杂,后者需进行大量的数理统计分析来确定多个二维参数的贡献度^[4-5]。二是室内试验采用天然颗粒时,难以找到形状一致的颗粒,且很难完全消除颗粒级配的影响,使得试验结果存在较大的离散性;而当采用其他材料的颗粒代替时,能研究的颗粒形状局限于单球或是双球等颗粒形状^[6-8]。因此,先前的研究难以将颗粒的形状同砂土的其他颗粒层面的要素独立开来,比如颗粒尺寸、材料等,导致在进行常规室内试验时,难以揭示某一特定的颗粒层面要素对颗粒力学性能所造成的影响^[9]。

近些年来新兴的3D打印技术被初步应用到岩土工程领域的研究中。3D打印技术可以满足自由的、个性化的设计与生产,且具有制备复杂颗粒形状的能力。通过使用该技术打印设计好的具有独立形状的颗粒进行室内试验,为定量研究颗粒形状与其物理性质、宏观力学性能等的联系带来了可能。

本文从颗粒的三维几何特征出发,引用并修正三维形状系数 S ,解决砂土颗粒形状的表征问题;应用3D打印技术制备特定形状,排除其他因素影响,通过室内物理试验,从细观的角度揭示形状对颗粒材料物理性质及宏观力学性能的影响,并建立两者间的联系。

1 试验材料制备

在本次研究中,选用6种不同形状的颗粒,分为3D打印颗粒与天然砂粒。试验颗粒的显微镜图以及级配如图1所示。3D打印的颗粒包括球体(SP),正四面体(TE),正八面体(OC),正六面体(CU),均按等体积原则打印;天然颗粒包括渥太华砂(OT),灵寿砂(DO)。结合以往学者的研究,本次试验中选用熔融沉积型(FDM)技术,采用热塑性材料PLA进行颗粒的打印。3D打印流程如图2所示。对试验颗粒进行表面形貌扫描,如图3所示。3D打印具体流程如下:

(1) 3D打印建模:在CAD三维建模模式中,设计需要打印颗粒的形状,并将该CAD文件导出为

3D打印机可识别的stl文件格式。

(2) 切片处理:在与打印机匹配的切片软件Ultimakercura 3.6.0中,对3D模型进行切片处理,设置打印参数与路径,并传输到3D打印机。3D打印参数为:喷嘴口径0.25 mm,分层厚度0.06 mm,试样填充率100%,打印速度30 mm/s,打印精度小于200 m。

(3) 3D打印及后处理:3D打印机根据设置的参数与路径进行分层打印,完成后将试样多余材料去除。

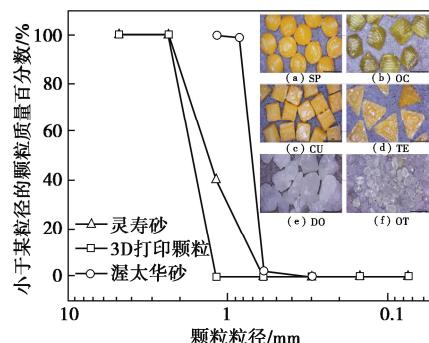


图1 试验颗粒显微镜及颗粒级配图

Fig. 1 Microscopic images and grain-size distribution curves of particles used in study



图2 3D打印流程

Fig. 2 Process of 3D printing

2 构建形状参数并表征颗粒形状

从三维的角度出发,对颗粒的形状特征进行量化,Su等^[10]提出基本几何等效原则,建立颗粒三维尺寸体积 V ,表面积 A ,与粒径 L 之间的关系式,定义为颗粒的形状系数,见式(1)。其中, V 体现相同接触面积下,颗粒堆积的密实程度; A 反映相同体积下,颗粒的伸展程度,其对颗粒间的咬合,转动有较大影响。 A/V 能量化颗粒形状在颗粒间相互作用时的影响,粒径 L 能消除颗粒尺寸变化对比表面积所造成的影响。

$$S = \frac{(A/V) \times L}{6} , \quad (1)$$

式中,Su等^[10]定义最小外接球直径作为颗粒粒径 L ,但如以正八面体与正六面体为例,假设两者的边长分别为 a 和 b ,根据计算形状系数 S 所需的参数,体积 V 分别为 $\sqrt{2}a^3/3$, b^3 ,表面积 A 分别为 $2\sqrt{3}a^2$, $6b^2$,

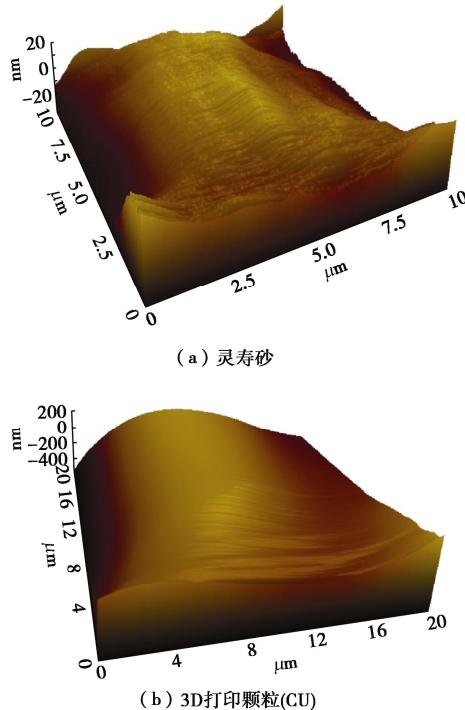


图 3 原子力显微镜表面三维形貌扫描图

Fig. 3 Atomic force microscopy scans of particles

外接圆直径 L 分别为 $\sqrt{2}a$, $\sqrt{3}b$, 由于表面积与最小外接圆的直径并非成比例的关系, 计算所得 S 均为 $\sqrt{3}$, 出现 S 值发生重叠的情况, 不具备普适性。

针对该问题, 本研究采用与颗粒等体积的等效球直径为名义长度 L' 的方法进行修正, 公式推导如下:

假设颗粒的体积为 V_1 , 表面积为 A_1 , 则其等效球的直径为 $L'_1 = 2 \cdot \sqrt[3]{3V_1/(4\pi)}$, 且 $A_1/V_1 = k/L'_1$; 相同形状不同颗粒尺寸的颗粒体积为 V_2 , 表面积为 A_2 , 则其等效球的直径为 $L'_2 = 2 \cdot \sqrt[3]{3V_2/(4\pi)}$, $A_2/V_2 = k/L'_2$, 修正后的形状系数为

$$S' = (A/V \times L')/6 = (k/L'_1 \times L'_1)/6 = (k/L'_2 \times L'_2)/6 = k。 \quad (2)$$

当形状确定时, A/V 值仅与 L' 有关, 可知 k 值仅由颗粒的形状决定。由式(2)可知, 修正后, S' 被无量纲化, 消除了尺寸效应的影响, 综合考虑了颗粒几何参数: 体积、表面积以及长度对砂土颗粒宏观力学性质的影响, 并且具有表征形状的唯一性。 S 与 S' 值可以直接通过式(1), (2)的计算得出, 如表 1 所示。

表 1 3D 打印颗粒的几何尺寸及形状系数值

Table 1 Geometric parameters and shape factors of 3D printed particles

名称	体积 V /mm ³	表面积 S /mm ²	粒径 L /mm	形状 系数 S	修正后形状 系数 S'
SP	4.189	12.566	2	1	1
OC	4.189	14.861	2.929	1.732	1.18
CU1	4.189	15.591	2.792	1.732	1.24
TE	4.189	18.724	3.287	2.449	1.49
CU2	8	24	3.464	1.732	1.24

若直接通过试验测量天然砂粒的比表面积, 进而确定其形状系数, 比表面积值会受到粗糙度的影响, 因此建议采用 Mollon 等^[11]提出的采用傅里叶描述符生成真实 3D 砂颗粒模型的方法, 获取颗粒的三维几何参数, 进而通过公式计算获取形状系数值。但由于砂粒存在不均匀性, 因此在本次试验中, 只将天然砂粒作为对照部分, 仅对其的形状做定性的分析。

当按照 Krumbein 等所整理出的矿物形状分布表进行形状系数计算时^[12], 未修正前 S 值范围为 1~3 之间^[10], 在本文中采用 S' 值的范围为 1~2.449 之间, 所占的比例为 $2.449/3=81.6\%$, 表明研究的范围较大, 能较多涵盖到自然界中可能存在的砂颗粒形状范围。

3 室内试验

为反映颗粒形状对砂土堆积状态的影响, 本研究根据《SL 237—1999 土工试验规程》的要求, 分别对颗粒的最大与最小孔隙比进行测定。试验结果如表 2 所示。为研究土体剪切破坏行为以及测定抗剪强度指标, 在两种相对密实度 $D_f=0.4$, $D_f=0.9$, 以及法向应力分别为 50, 100 和 200 kPa (应力状态编号分别为 1, 2 和 3) 对颗粒进行直剪试验, 本次试验的最大剪切位移为 8 mm, 与试样直径之比为 $8/61.8=12.9\% > 10\%$, 符合规范 D3080M—11^[13], 大于前人试验采用的比值^[7, 14]。

表 2 试验材料的形状参数及极限孔隙比

Table 2 Shape parameters and extreme void ratios of materials

颗粒 名称	球度 S_1	棱角度 A_g	最小 孔隙比	最大 孔隙比	孔隙比 差值 I_e
SP	1	1	0.639	0.796	0.157
OC	0.866	1.104	0.715	0.95	0.235
CU1	0.707	1.129	0.815	1.175	0.36
TE	0.333	1.258	0.867	1.400	0.533
CU2	0.707	1.129	0.68	1.033	0.353

试验可以得到不同形状颗粒剪应力、法向位移与剪切位移间的关系曲线, 剪切应力根据剪切过程中面积的损失进行修正^[15]。本文中给出相对密实度 D_f 为 90%, 法向应力为 50 kPa 时 4 种打印颗粒的试验曲线, 如图 4 所示。其中, SP-1-0.4 表示相对密实度 $D_f=0.4$, 应力状态为 1, 即 50 kPa 下的球体, 其余以此类推。

选取两种相对密实度下, 法向应力为 50 kPa 的灵寿砂与打印的六面体 1 颗粒的试验曲线, 如图 5 所示。可以看出, 打印颗粒的剪切行为与天然颗粒具有相似性, 存在峰值抗剪强度, 达到峰值之后逐渐趋向于稳定, 说明采用 3D 打印颗粒研究砂土宏观力学性能影响机制的可行性。从图 5 (b) 中可以看出, 灵寿砂达到峰值状态所需位移为 2.08 mm, 而正六面体为 4.90 mm。由表 3 所示, 石英的抗压强度与弹性模量均是 PLA

材料的几十倍, 因此, 当其他条件相同时, 天然砂粒达到峰值状态所需位移会明显小于打印颗粒的位移。

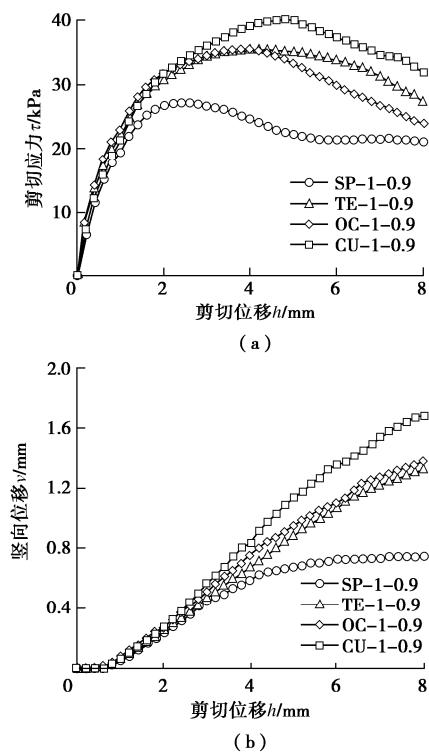


图 4 3D 打印颗粒直剪试验曲线 ($\sigma_n=50$ kPa, $D_r=90\%$)

Fig. 4 Direct shear test curves of 3D particles ($\sigma_n=50$ kPa, $D_r=90\%$)

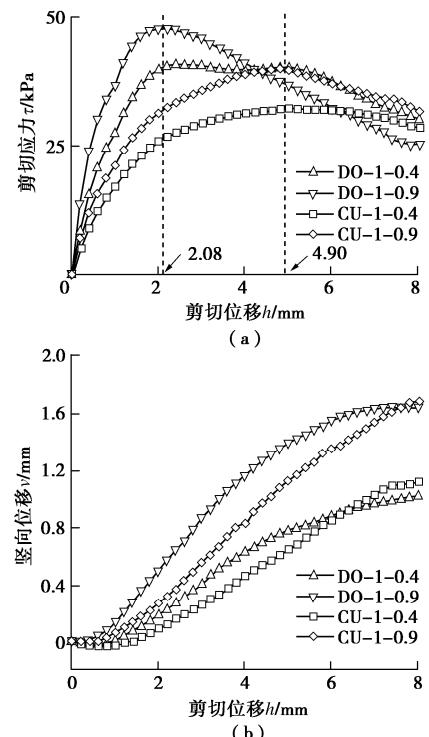


图 5 灵寿砂与正六面体 1 直剪结果对比图 ($\sigma_n=50$ kPa)

Fig. 5 Comparison of direct shear test curves between dolomite sand and cube 1 ($\sigma_n=50$ kPa)

表 3 试验材料的基本力学性质

Table 3 Basic mechanical parameters of test materials

类型	密度 $/\left(10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}\right)$	抗压强度 σ / MPa	弹性模量 E/GPa	泊松比 ν
PLA 材料	0.75	32.44	1.53	—
石英	2.2	1100	72	0.17

4 试验成果讨论

4.1 颗粒堆积状态

在以往基于二维图像的颗粒形状表征中, 主要分为 3 个层次^[5], 分别为颗粒轮廓的整体特征, 颗粒轮廓的凹凸程度以及颗粒表面的粗糙度, 分别用球度 S_1 、棱角度 A_g 以及形状因子 ζ 表示。3D 打印的精度较高, 因此颗粒表面的粗糙度影响可以近似认为相同。从图 1 中可以看出, 由于采用分层打印的方式, 在打印颗粒表面会有层状纹理, 剪切时会增加颗粒间的微咬合, 进而增大颗粒的剪切强度。图 3 为灵寿砂和正六面体的原子力显微镜扫面图, 扫描范围分别为 $10 \mu\text{m} \times 10 \mu\text{m}$ 和 $20 \mu\text{m} \times 20 \mu\text{m}$, 采用的成像模式是非接触式模式。可以看出, 3D 打印材料的扫描区域位于层状纹理的凸起处, 相较于天然砂粒, 其材料表面更加光滑平顺。对比发现, 造成打印颗粒与天然颗粒表面粗糙度不同的因素主要来自于上述两个方面, 但由于目前室内试验的研究中无法定量表征两种颗粒粗糙度的差异, 且其相对于颗粒球度以及棱角度等因素而言对砂土剪切性能的影响较小, 故本次研究忽略表面粗糙度的影响。

表 1 中前 4 种 3D 打印颗粒材料相同、体积相同, 相对密度试验结果如图 6 所示, 可以看出, 随着 S' 值的增大, 颗粒的最大孔隙比 e_{\max} , 最小孔隙比 e_{\min} 以及两者间的差值 I_e 随之增大, 这是由于规则形状的颗粒, 在颗粒间更容易发生相互滑动与转动, 因此更容易形成密实的结构, 且最疏松和最密实的情况下, I_e 不大。反之, 颗粒间的转动受限, 疏松的情况下颗粒间的孔隙体积大, 当对其进行振动击实时, 颗粒间会发生重排列, 因此孔隙变化的范围较大。通过该范围值可以定性判断颗粒形状的规则程度, 进而预估颗粒的形状系数值范围。由表 2 可知, 随着 S' 增大, 球度与圆度均减小, e_{\max} , e_{\min} 及其 I_e 均增大, 该规律与 Cho 等^[4]、Fraser 等^[16]的研究结论相类似, 侧面说明了采用形状系数 S' 可综合反映多个二维形状系数值的复合影响。表中正六面体 2 的 e_{\max} 与 e_{\min} 均比正六面体 1 的小, 说明颗粒的尺寸也会影响到该值的大小, 随着颗粒尺寸增大, 颗粒整体的可压缩性提高, 而能达到的最大孔隙率降低, 这与 Islam 等^[17]所得的结论

是一致的。

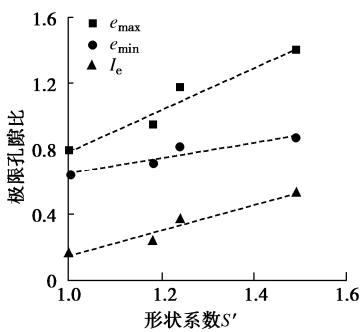


图 6 极限孔隙比随形状系数 S' 的变化规律

Fig. 6 Variation of limit void ratio with particle shape factor S'

4.2 经验应力剪胀关系式

由于采用最大法向应力水平为 200 kPa, 属于较低的应力水平, 剪切后未发现颗粒破碎, 因此砂土颗粒在剪切过程中的抗剪强度主要来源于两部分的贡献, 一是颗粒间的摩擦作用, 二是由于颗粒间产生咬合作用, 剪切过程中, 在克服该作用时会引起体积的变化。

Bolton^[18]通过采用砂样进行平面应变与三轴试验, 认为平面应变的应力剪胀关系满足式(3)。考虑到采用理论推导应力剪胀关系的难度以及 Bolton 所提的经验公式的适用性, 本次分析中采用 Bolton 的经验公式作为框架, 通过 Dai 等^[7]所提的修正经验公式(式(4)), 对试验结果进行处理。

$$\varphi_{d,ps} = 0.8\phi + \varphi_{cs,ps}, \quad (3)$$

$$\varphi_{d,ds} = \zeta\phi + \varphi_{cs}. \quad (4)$$

根据上述的应力剪胀关系式, 由于直剪试验刚开始时, 剪切力所做的部分功会被颗粒的弹性变形所吸收, 而当剪切位移较大时, 剪切试样的应力应变不均匀程度大, 因此, 同一形状颗粒, 在 6 种状态下(D_t 与 σ_n [2×3]), 采用当剪切位移分别等于 2, 3, 4, 5, 6 mm, 以及达到峰值状态下的滑动摩擦角和剪胀角作为纵坐标和横坐标, 对打印颗粒的应力剪胀关系进行拟合, 结果如图 7 所示。其中, 拟合直线的斜率代表关系式中的 ζ 值, 截距代表打印颗粒的临界状态摩擦角 φ_{cs} 的大小。绘制 3D 打印颗粒 $\varphi_d - \varphi_{cs}$ 与剪胀角 ϕ 可以得到 ζ 值的规律, 如图 8(a) 所示, ζ 值并非定值, 而是随颗粒 S' 值的增大, 先增大后减小。对渥太华砂与灵寿砂试验结果进行拟合, 得到的 ζ 值分别为 0.783 与 0.873, 说明不同砂粒间由于颗粒形状, 颗粒尺寸与粒间摩擦系数等不同, 会导致 ζ 值发生变化, 而 Bolton 所取的值可能为该变量的特例^[18]。如图 8(b) 所示, 相对于 Bolton 所提出的定值 0.8, 3D 打印颗粒 ζ 值变化范围较大, 最大值为 0.153, 说明该值对颗粒剪切性能的影响不可忽视。

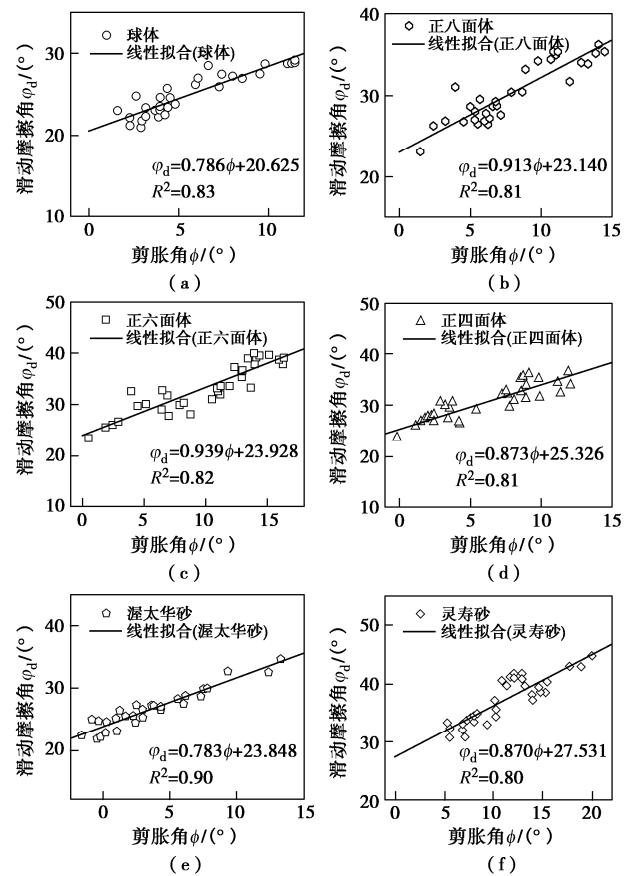


图 7 试验颗粒应力剪胀关系线性拟合图

Fig. 7 Linear fitting of stress-dilatancy relationship of particles

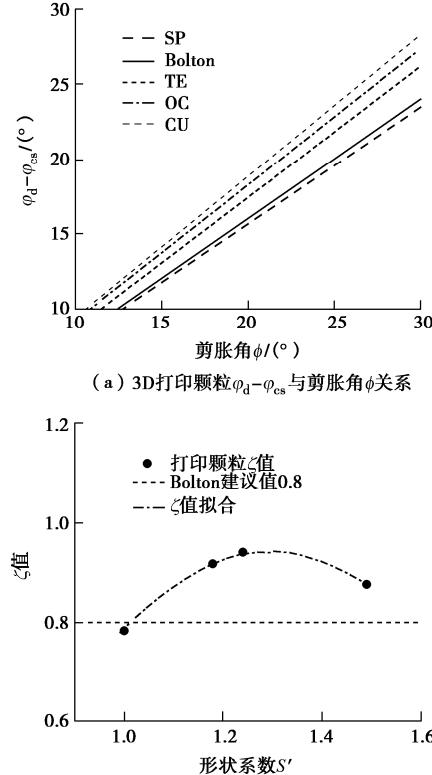


图 8 3D 打印颗粒应力剪胀关系图

Fig. 8 Stress-dilatancy relationship of 3D printed particles with various shapes

4.3 临界状态摩擦角

临界状态摩擦角，表征当砂土颗粒产生大应变的情况下，达到稳定的状态时残余强度大小^[19]。该值与砂土所受的应力路径，试样的制备方式以及初始的孔隙比均无关^[18]。临界状态角反映的是颗粒移动的贡献，从图 8 (a) 中可以看出，该值的变化规律同二维形状系数的变化规律成正相关，这与 Cho 等^[4]、Chan 等^[20]的发现相似。正四面体与球体的临界状态摩擦角之间相差 4.701°，说明颗粒形状对颗粒剪切强度的影响较大。

颗粒的移动主要包括颗粒接触面上的滑动以及颗粒间的转动。颗粒间滑动摩擦力 $T = \mu' N$ ， μ' 值的大小与颗粒间的接触面积及法向应力的大小无关，因此不同形状颗粒的 μ' 值相同。而由于圆球的转动较容易^[21]，说明临界状态摩擦角的差值可以反映的是颗粒形状对颗粒间转动的限制作用。这可以在数值模拟中考虑颗粒形状对转动的影响提供依据。

4.4 峰值剪胀角

为衡量剪切过程中颗粒剪胀性的变化情况，引入剪胀角的概念，当颗粒的抗剪强度达到峰值时，往往对应着峰值剪胀角，其表达式为

$$\phi_{\max} = \tan^{-1} \left(\frac{\delta_v}{\delta_h} \right)_{\max}, \quad (5)$$

式中， δ_v 与 δ_h 分别为剪切位移与法向位移的增量。两种相对密实度下不同颗粒的峰值剪胀角如图 9 所示。

值得注意的是，在相同的相对密实度以及法向应力下，从图 9 可以看出，峰值剪胀角的大小并非随形状系数 S' 的增大而增大，这与 Cho 等^[4]研究所得到的结论并不一致。Afzali 等^[22]采用 3 组具有不同初始孔隙比的砂粒进行直剪试验，结果表明，峰值剪胀角 ϕ_{\max} 随初始孔隙比减小而增大。这说明在本次试验条件下，峰值剪胀角的影响因素中，除了颗粒的规则度外，还与颗粒的初始堆积状态有关。如图 8 (b) 所示，4 种形状所对应的 ζ 值均小于 1，说明剪胀对颗粒抗剪强度的贡献存在折减，衡量该部分影响应考虑 $\zeta\phi$ 的大小。

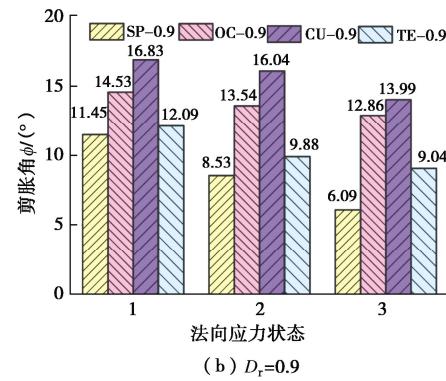
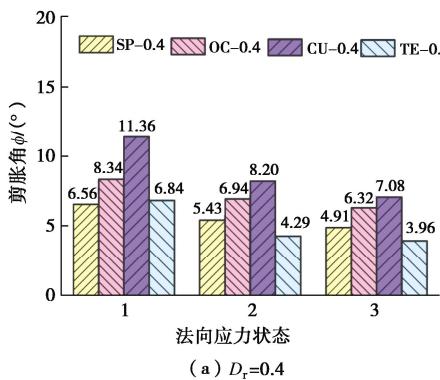


Fig. 9 Histograms of maximum dilation angle for 3D printed particles with various shapes

4.5 峰值内摩擦角

对于每种形状的颗粒，在相同 D_r 条件下，由试验所得的 3 个抗剪强度峰值，根据库仑公式对抗剪强度包线进行拟合。由于砂土本身不存在黏聚力，因此将直线的截距强制归零，所得的直线斜率为峰值内摩擦角，如图 10 所示。该值随着 S' 的增大，表现出先增大后减小的规律，这与峰值剪胀角的变化规律相同。在本次研究中，以 S' 为单一变量时，会同时对颗粒的规则度以及堆积状态造成影响，后两者在影响颗粒的剪胀效果中存在着相互竞争与抑制的关系，导致峰值剪胀角和峰值内摩擦角表现出上述规律，而当控制初始孔隙比相同时，颗粒的峰值抗剪强度与颗粒 S' 值成正相关，这与许多学者研究所得的结论相同^[21, 23]。

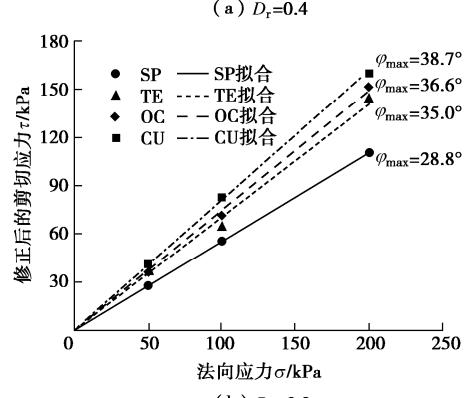
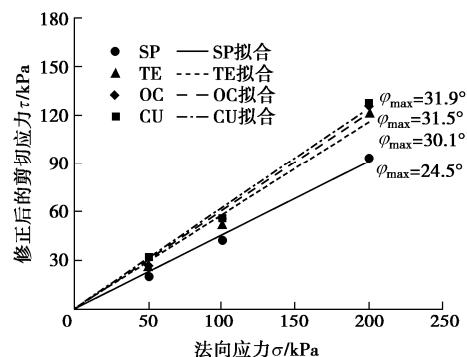


Fig. 10 Maximum internal friction angles of 3D printed particles under different values of D_r

然而, S' 值较大的颗粒难以达到低孔隙比的堆积状态, 说明采用控制初始孔隙比相同来研究颗粒的剪切行为时存在缺陷, 忽略了颗粒形状、颗粒级配等影响颗粒剪切行为的关键因素^[24]。因此, 在研究中, 保持不同形状间的相对密实度相同, 可以更好地反映颗粒形状对整体排列状态与剪切行为的影响, 更能反映实际的变化规律, 具有更高的研究价值。

4.6 考虑颗粒形状的经验公式

由式(4)知, 当建立 S' 值与峰值内摩擦角的关系时, 可通过分别建立 S' 值与临界状态摩擦角以及剪胀程度的关系, 再叠加来实现。

因为临界状态摩擦角与颗粒的相对密实度以及法向应力水平无关, 所以能够直接拟合得到 φ_{cs} 与 S' 的关系, 如图 11(a) 所示, 可以看出其具有较高的相关度 $R^2=0.96$, 表达式为

$$\varphi_{cs} = A \cdot S' + B, \quad (6)$$

式中, $A=10.3$, $B=10.7$, 其中 A , B 与颗粒自身矿物成分以及颗粒的尺寸有关。

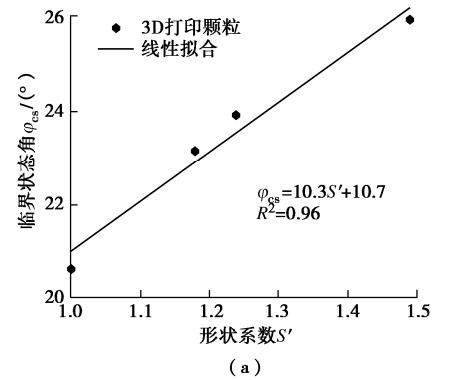
Bolton^[18]提出, 在应力剪胀关系中, $\varphi_{max} - \varphi_{cs}$ 能够有效的反映剪切过程中剪胀部分的贡献, 而该贡献受相对密实度以及法向应力水平的影响, 并基于此提出表达式 $\varphi_{max} - \varphi_{cs} = 0.8\phi_{max} = 5I_R$ 。但由峰值剪胀角的讨论可以得知, 虽然颗粒的相对密实度相同, 然而当具有不同的颗粒形状时, 其峰值剪胀角以及 ζ 值并不相等, 说明 Bolton 的公式中的 I_R 缺乏对由颗粒形状对剪胀部分产生的影响的考虑, 需进行修正。根据剪胀角的变化规律, 采用 origin 内嵌的 holliday1 函数进行拟合, 见下式:

$$\zeta\phi_{max} = \frac{a}{(1-1.48S'+0.585S'^2)}. \quad (7)$$

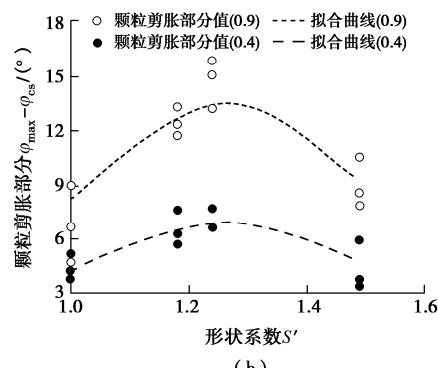
在 $D_r=0.4$ 和 0.9 时, 综合考虑 3 种应力状态, 对 S' 值与剪胀部分之间的关系进行拟合, 结果如图 11(b) 所示。其中, $b=-1.5$, $c=0.585$, a 为与 D_r 有关的参数, 当 $D_r=0.4$ 时, $a=0.456$; 当 $D_r=0.9$ 时, $a=0.882$ 。关于 a 与 D_r 之间的关系, 后续可开展相关研究进行确定。将式(6), (7) 叠加, 可以得到颗粒峰值内摩擦角与 S' 的关系如下所示:

$$\varphi_{max} = \frac{a}{(1-1.48S'+0.585S'^2)} + 10.3S' + 10.7. \quad (8)$$

在很多的堤坝、路堑等填方工程中, 选用粗粒土的物理参数会对工程建设的造价起到重大的影响, 其中颗粒形状是一个极为关键的影响因素。通过测得形状系数 S' , 在颗粒其他要素相同的前提下, 根据式(6), (8) 可分别比较不同形状颗粒临界状态摩擦角与峰值内摩擦角的相对大小。因此, 可以通过该经验公式来指导工程建设中颗粒形状的选择。



(a)



(b)

图 11 3D 打印颗粒经验关系拟合图
Fig. 11 Fitting of empirical relationship for 3D printed particles

5 结 论

本文提出了一种修正的三维形状系数 S' , 表征颗粒形状, 通过对 3D 打印颗粒与天然砂粒进行系统的相对密度试验与直剪试验, 研究了颗粒形状对砂土物理性质及宏观力学性能的影响, 可得到如下结论:

(1) 修正的三维形状指标 S' 能综合反映颗粒的球度与棱角度的二维形状特征, 避免了采用二维形状系数表征时需要考虑多参数贡献度的问题, 采用与颗粒等体积球的直径作为颗粒的名义粒径能够解决先前定义粒径时所出现的表征形状不唯一的问题。

(2) 通过对打印颗粒进行相对密度试验后发现, 随着 S' 值的增大, 最大孔隙比、最小孔隙比以及两者之间的差值均增加, 说明颗粒形状会影响颗粒的堆积状态, 该影响可由 S' 值反映。

(3) 通过比较打印颗粒与天然颗粒的直剪结果可以发现, 两者的剪切行为近似, 说明了采用打印颗粒来研究颗粒形状对剪切性能影响的可行性。

(4) 随着 S' 值的增大, 颗粒的临界状态摩擦角增大, 主要的原因来自于颗粒的规则度对颗粒的转动起到了限制作用; 而由于颗粒形状会同时影响颗粒的规则度以及初始孔隙比, 两者对颗粒的剪胀影响存在竞争关系, 导致峰值剪胀角, 峰值内摩擦角表现出先增大后减小的趋势。采用控制相对密实度相同进行研究更具实用价值。本次研究中所得的最优形状为正六

面体。

(5) 砂土剪切性能实际上受多种因素的复合影响, 本次研究所采用的形状指标能反映砂土整体轮廓和表面凹凸程度的形状特征, 但无法反映表面粗糙度的微观影响。砂土颗粒的性质还取决于颗粒本身矿物成分, 颗粒尺寸与级配等, 综合反映这些因素的影响才能把握全貌, 定量分析其复影响需要进一步的研究。

参考文献:

- [1] MISKIN M Z, JAEGER H M. Adapting granular materials through artificial evolution[J]. *Nature Materials*, 2013, **12**(4): 326 – 331.
- [2] THOMAS M C, WILTSHERE R J, WILLIAMS A T. The use of Fourier descriptors in the classification of particle shape[J]. *Sedimentology*, 1995, **42**(5): 635 – 645.
- [3] HYSLIP J P, VALLEJO L E. Fractal analysis of the roughness and size distribution of granular materials[J]. *Engineering Geology*, 1997, **48**(3): 231 – 244.
- [4] CHO G C, DODDS J, SANTAMARINA J C. Particle shape effects on packing density, stiffness, and strength: natural and crushed sands[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2006, **132**(5): 591 – 602.
- [5] 刘清秉, 项伟, BUDHU M, et al. 砂土颗粒形状量化及其对力学指标的影响分析[J]. *岩土力学*, 2011(增刊 1): 190 – 197. (LIU Qing-bing, XIANG-Wei, BUDHU M, et al. Study of particle shape quantification and effect on mechanical property of sand[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2011(S1): 190 – 197. (in Chinese))
- [6] CUI L, O'SULLIVAN C. Exploring the macro-and micro-scale response of an idealised granular material in the direct shear apparatus[J]. *Géotechnique*, 2006, **56**(7): 455 – 468.
- [7] DAI B B, YANG J, ZHOU C Y. Observed effects of interparticle friction and particle size on shear behavior of granular materials[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2016, **16**(1): 04015011.
- [8] POWRIE W, NI Q, HARKNESS R M, et al. Numerical modelling of plane strain tests on sands using a particulate approach[J]. *Géotechnique*, 2005, **55**(4): 297 – 306.
- [9] HANAOR D A H, GAN Y, REVAY M, et al. 3D printable geomaterials[J]. *Géotechnique*, 2016, **66**(4): 323 – 332.
- [10] SU Y F, BHATTACHARYA S, LEE S J, et al. A new interpretation of three-dimensional particle geometry: M-A-V-L[J]. *Transportation Geotechnics*, 2020, **23**: 100328.
- [11] MOLLON G, ZHAO J. Generating realistic 3D sand particles using Fourier descriptors[J]. *Granular Matter*, 2013, **15**(1): 95 – 108.
- [12] KRUMBEIN W C, SLOSS L L. *Stratigraphy and Sedimentation*[M]. San Francisco: W H Freeman & Co, 1951.
- [13] Standard Test Method for Direct Shear Test of Soils Under Consolidated Drained Conditions: ASTMD 3080—04—2011 [S]. 2011.
- [14] SHIBUYA S, MITACHI T, TAMATE S. Interpretation of direct shear box testing of sands as quasi-simple shear[J]. *Géotechnique*, 1997, **47**(4): 769 – 790.
- [15] OLSON R E, LAI J. *Direct Shear Testing*[R]. Taiwan: Advanced Geotechnical Laboratory, Dept. of Construction Engineering, Chaoyang University of Technology, 1989.
- [16] FRASER H J. Experimental study of the porosity and permeability of clastic sediments[J]. *The Journal of Geology*, 1935, **43**(8): 910 – 1010.
- [17] ISLAM M N, SIDDIKA A, HOSSAIN M B, et al. Effect of particle size on the shear strength behaviour of sands[J]. *Australian Geomechanics Journal*, 2011, **46**(3): 85 – 95.
- [18] BOLTON M D. Strength and dilatancy of sands[J]. *Géotechnique*, 1986, **36**(1): 65 – 78.
- [19] BEEN K, JEFFERIES M G, HACHEY J. Critical state of sands[J]. *Géotechnique*, 1991, **41**(3): 365 – 381.
- [20] CHAN L C Y, PAGE N W. Particle fractal and load effects on internal friction in powders[J]. *Powder Technology*, 1997, **90**(3): 259 – 266.
- [21] 孔亮, 彭仁. 颗粒形状对类砂土力学性质影响的颗粒流模拟[J]. *岩石力学与工程学报*, 2011, **30**(10): 2112 – 2119. (KONG Liang, PENG Ren. Particle flow simulation of influence of particle shape on mechanical properties of quasi-sands[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2011, **30**(10): 2112 – 2119. (in Chinese))
- [22] AFZALI-NEJAD A, LASHKARI A, SHOURIEH P T. Influence of particle shape on the shear strength and dilation of sand-woven geotextile interfaces[J]. *Geotextiles and Geomembranes*, 2017, **45**(1): 54 – 66.
- [23] HIRABAYASHI H, OHMURA A. Micromechanical influence of grain properties on deformation–failure behaviours of granular media by DEM[C]// *Geomechanics and Geotechnics of Particulate Media: Proceedings of the International Symposium on Geomechanics and Geotechnics of Particulate Media*, 2006, Ube: 173 – 179.
- [24] CORNFORTH D H. Prediction of drained strength of sands from relative density measurement[J]. *Astm Special Technical Publications*, 1973, **523**: 281 – 303.