

DOI: 10.11779/CJGE202009021

非饱和土空间分数阶渗流模型的有限差分方法研究

王睿¹, 周宏伟^{*2}, 卓壮³, 薛东杰², 杨帅²

(1. 河北工程大学土木工程学院, 河北 邯郸 056038; 2. 中国矿业大学(北京)力学与建筑工程学院, 北京 100083; 3. 罗文大学, 美国 新泽西州 08028)

摘要: 地下水在非饱和土体中的输运过程及渗流特性具有重要的研究意义。首先, 从反常扩散方程的角度分析地下水在非饱和土中的输运过程, 引入 Conformable 导数, 得到了一维情况下非饱和土空间分数阶渗流方程; 其次, 用全隐式形式的有限差分法求解渗流方程离散格式, 得到了求解的迭代矩阵; 最后, 根据已有论文的试验数据对渗流模型的有效性进行了验证, 并对公式中的参数进行了敏感性分析。结果表明, 新模型能够较好地描述地下水在非饱和土体中的输运过程, Conformable 导数具有较好的适用性。

关键词: 非饱和土; 空间分数阶导数; 反常扩散; 有限差分法; Richard's 方程

中图分类号: TU441

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2020)09-1759-06

作者简介: 王睿(1983—), 男, 博士, 主要从事岩土力学、渗流力学等方面的科研工作。E-mail: wangruicumtb@163.com。

Finite difference method for space-fractional seepage process in unsaturated soil

WANG Rui¹, ZHOU Hong-wei², ZHUO Zhuang³, XUE Dong-jie², YANG Shuai²

(1. College of Civil Engineering, Hebei University of Engineering, Handan 056038, China; 2. School of Mechanics and Civil Engineering, China University of Mining and Technology, Beijing 100083, China; 3. Rowan University, New Jersey, 08028, USA)

Abstract: The transport process and seepage properties of underground water in unsaturated soil are of great research significance. Firstly, the transport process of underground water in unsaturated soil in an anomalous diffusion perspective is analyzed, and by involving the Conformable derivative, the space-fractional anomalous diffusion equation in one-dimensional situation is derived. Secondly, the discretization schemes of this seepage equation are derived by using the full-implicit finite difference method. The iterative matrix of numerical modelling is derived as well. In the end, the effectiveness of the numerical solution in the space-fractional anomalous diffusion equation is verified by comparing the numerical solution with the experimental data in the existing paper. In addition, the sensitivity of the parameters in the seepage equation is analyzed. The results show that the new model can well characterize the transport process of underground water in unsaturated soil, and the Conformable derivative is suitable for this method.

Key words: unsaturated soil; space-fractional order derivative; anomalous diffusion; finite difference method; Richard's equation

0 引言

地下水在土体中的输运过程及渗流特性对于研究地下工程中污染物迁移、溶质扩散、水库边坡稳定及高放废物处置等问题具有指导意义。在实际工程中遇到的土体大多处在非饱和状态(地下水位以上), 非饱和土是固、液、气三相介质, 其输运过程远比饱和土(固、液两相介质)复杂^[1]。1856年, 法国工程师 Darcy 根据水通过饱和砂的试验研究总结出了针对水在饱和土体中输运过程的达西定律。但是达西定律并不能适用于流体在非饱和土体中的输运问题。Buckingham 等通过考虑非饱和渗流过程中土体渗透系数与吸力或吸

力水头的函数关系, 将达西定律推广用于解决非饱和液体流动问题^[2-3]。Richards 等^[4]结合土中液体非稳定流或瞬态流控制方程, 得到了著名的 Richards 方程, 根据适当的边界条件和初始条件来求解 Richards 方程, 可把吸力场表达为时间与空间的相关函数。考虑到 Richards 方程与扩散方程形式上的相似性^[5-7], 近年来, 很多学者从扩散现象的角度出发研究地下水在非饱和土体中的输运过程, 发现并不满足经典的 Fick 梯

基金项目: 国家自然科学基金项目(51674266); “十三五”国家重点研发计划项目(2016YFC0600704)

收稿日期: 2018-01-29

***通信作者** (E-mail: zhw@cumtb.edu.cn)

度扩散定律^[8], 其均方位移 (mean square displacement, MSD) 与时间并不呈现线性关系, 属于反常扩散过程。

反常扩散过程本质上是一种非马尔科夫非局域性运动^[9], 必须考虑运动过程中的时间相关性和空间相关性^[10]。例如, 在反常扩散过程中, 空间中某点的通量 (流量) 不仅与该点小范围内的浓度梯度 (水头) 成正比, 也与其他地方粒子的运移有关, 即体现了运动过程中的空间相关性 (或非局域性)。由此可以在 Richards 方程中引入分数阶微积分, 用分数阶偏微分方程来处理。关于分数阶导数, 最常用的定义有 Rieman-Liouville 定义和 Caputo 定义, 尽管这些定义在某些方面具有其优点, 但并不满足普通导数定义的性质, 例如乘法规则、商法则、链式法则等^[11]。对此, Khalil 等引入了一种新的分数阶导数定义, 具有普通导数的运算规则, 称为 Conformable 导数^[12]。

此外, 由于分数阶偏微分方程形式的复杂性, 难以得到解析解, 其数值解多用有限差分法求得。本文通过在 Richards 方程中引入空间分数阶导数, 结合全隐式形式的有限差分法对空间分数阶 Richards 方程进行了求解, 并与试验结果进行比较。

1 一维情况下的空间分数阶 Richards 方程

对于非饱和土, 考虑渗透系数与吸力水头的函数关系得到应用于非饱和土液体流动的达西定律:

$$q = -k(h) \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (1)$$

式中, q 为流量 (m/s), $k(h)$ 为渗透系数 (m/s), h 为总水头 (m)。

按照链式法则, 将式 (1) 用体积分水率表示为

$$q = -k(h) \frac{\partial h}{\partial x} = -k(h) \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = -D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (2)$$

式中, θ 为土体体积分水率 (量纲为 1), $D(\theta)$ 为非饱和土的水力扩散系数 (m²/s), 且有

$$D(\theta) = k(\theta) \frac{\partial h}{\partial \theta}. \quad (3)$$

由于非饱和土渗流过程是一种反常扩散过程, 必须考虑运动过程的空间相关性^[13], 因此在应用于非饱和土的达西定律中引入空间分数阶微积分, 将式 (3) 变换为

$$q = -D_\alpha(\theta) \frac{\partial^\alpha \theta}{\partial x^\alpha}, \quad (4)$$

式中, α 为空间分数阶阶次, $0 < \alpha < 1$, $D_\alpha(\theta)$ 为广义水

力扩散系数 (m^{1+ α} /s)。

将式 (4) 代入土体瞬态流控制方程^[3]:

$$-\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (5)$$

得到

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[D_\alpha(\theta) \frac{\partial^\alpha \theta}{\partial x^\alpha} \right] = \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (6)$$

式 (6) 为一维情况下带有空间分数阶导数 α 的非饱和土渗流方程。当分数阶阶次为 1 时, 式 (6) 退化为用含水率表示的 Richards 方程^[3]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] = \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (7)$$

式 (7) 中忽略土壤容量的变化及含水率在土中呈现的滞后效应^[13]。

2 Conformable 导数定义下的分数阶偏微分方程有限差分离散格式

Conformable 导数的定义为^[12]

$$T_\alpha f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon}. \quad (8)$$

Conformable 导数与一阶导数的关系为

$$T_\alpha f(x) = x^{1-\alpha} \frac{df(x)}{dx}. \quad (9)$$

令 $D_\alpha(\theta) \frac{\partial^\alpha \theta}{\partial x^\alpha} = A$, 利用中心差分, 则式 (6) 左侧的离散格式为

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{A_{i+1/2}^{j+1} - A_{i-1/2}^{j+1}}{\Delta x}, \quad (10)$$

式中, $A_{i+1/2}^{j+1} = D_\alpha(\theta_{i+1/2}^{j+1}) \frac{\partial^\alpha \theta_{i+1/2}^{j+1}}{\partial x^\alpha}$, 利用 Conformable 导数与一阶导数的关系, 有

$$\begin{aligned} A_{i+1/2}^{j+1} &= D_\alpha(\theta_{i+1/2}^{j+1}) (i\Delta x)^{1-\alpha} \frac{\partial \theta_{i+1/2}^{j+1}}{\partial x} \\ &= D_\alpha(\theta_{i+1/2}^{j+1}) (i\Delta x)^{1-\alpha} \frac{\theta_{i+1}^{j+1} - \theta_{i-1}^{j+1}}{\Delta x}, \end{aligned} \quad (11)$$

同理, 有 $A_{i-1/2}^{j+1} = D_\alpha(\theta_{i-1/2}^{j+1}) (i\Delta x)^{1-\alpha} \frac{\theta_i^{j+1} - \theta_{i-1}^{j+1}}{\Delta x}$ 。

得到式 (6) 左侧的离散格式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[D_\alpha(\theta) \frac{\partial^\alpha \theta}{\partial x^\alpha} \right] &= [D_\alpha(\theta_{i+1/2}^{j+1}) (\theta_{i+1}^{j+1} - \theta_{i-1}^{j+1}) - \\ &\quad D_\alpha(\theta_{i-1/2}^{j+1}) (\theta_i^{j+1} - \theta_{i-1}^{j+1})] \frac{i^{1-\alpha}}{(\Delta x)^{1+\alpha}}. \end{aligned} \quad (12)$$

进而得到式 (6) 的离散格式:

$$\left[D_{\alpha}(\theta_{i+1/2}^{j+1})(\theta_{i+1}^{j+1} - \theta_i^{j+1}) - D_{\alpha}(\theta_{i-1/2}^{j+1})(\theta_i^{j+1} - \theta_{i-1}^{j+1}) \right] \frac{t^{1-\alpha}}{(\Delta x)^{1+\alpha}} = \frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{\Delta t} \quad (13)$$

根据有限差分法应用于非饱和土渗流的“滞后性”原理^[15], $D_{\alpha}(\theta_i^{j+1})$ 可近似表示为 $D_{\alpha}(\theta_i^j)$, 则式(13)可表示为

$$\left[D_{\alpha}(\theta_{i+1/2}^j)(\theta_{i+1}^{j+1} - \theta_i^{j+1}) - D_{\alpha}(\theta_{i-1/2}^j)(\theta_i^{j+1} - \theta_{i-1}^{j+1}) \right] \frac{t^{1-\alpha}}{(\Delta x)^{1+\alpha}} = \frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{\Delta t} \quad (14)$$

$$\text{令 } D_{\alpha}(\theta_{i+1/2}^j) \frac{t^{1-\alpha}}{(\Delta x)^{1+\alpha}} = \gamma_i^j, \quad D_{\alpha}(\theta_{i-1/2}^j) \frac{t^{1-\alpha}}{(\Delta x)^{1+\alpha}} = \eta_i^j, \quad \frac{1}{\Delta t} = \lambda, \text{ 则式(14)可简化为}$$

$$\gamma_i^j \theta_{i+1}^{j+1} - (\gamma_i^j + \eta_i^j + \lambda) \theta_i^{j+1} + \eta_i^j \theta_{i-1}^{j+1} = -\lambda \theta_i^j \quad (15)$$

利用全隐形式的有限差分法对式(6)求解的原理是, 如图1定义求解区域为半无限大空间网格, 横坐标为位置 x , 纵坐标为时间 t , 边界条件 $x=x_0$, $x=x_I$ 及 $t=t_0$ 时的含水率已知。用 θ_i^{j+1} 表示 $t=t_{j+1}$, $x=x_i$ 含水率的值, 在任意 $t=t_{j+1}$ 时刻, $I-1$ 个未知量 $\theta_1^{j+1} \sim \theta_{I-1}^{j+1}$ 可由前一行 $t=t_j$ 时刻 $I-1$ 个已知量 $\theta_1^j \sim \theta_{I-1}^j$ 列出的 $I-1$ 个方程求得。由于边界条件 $t=t_0$ 时刻含水率已知, 利用上述关系递推即可求得含水率矩阵。

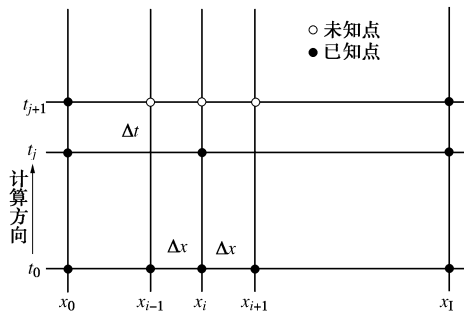


图1 隐式有限差分法示意图

Fig. 1 Full implicit finite difference method

3 基于 MATLAB 的有限差分法求解分数阶偏微分方程

将式(15)用如下矩阵表示为

$$\vec{A} \cdot \vec{T} = \vec{b} \quad (16)$$

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -(\gamma_2^j + \eta_2^j + \lambda) & \gamma_2^j & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \eta_3^j & -(\gamma_3^j + \eta_3^j + \lambda) & \gamma_3^j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \eta_4^j & -(\gamma_4^j + \eta_4^j + \lambda) & \gamma_4^j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \eta_{I-2}^j & -(\gamma_{I-2}^j + \eta_{I-2}^j + \lambda) & \gamma_{I-2}^j \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \eta_{I-1}^j & -(\gamma_{I-1}^j + \eta_{I-1}^j + \lambda) \end{pmatrix}_{(I-2) \times (I-2)} \quad (20)$$

式中, \vec{A} 为系数矩阵, \vec{T} 为含水率矩阵, \vec{b} 为常数矩阵。

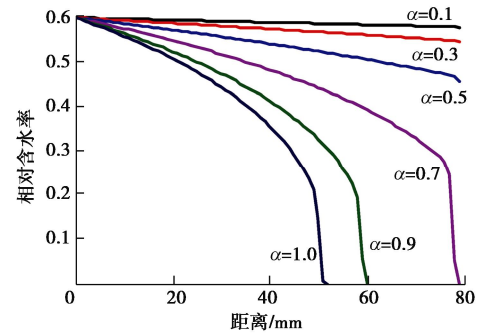


图2 相同时间不同分数阶阶次 α 对于反常扩散的影响

Fig. 2 Effects of fractional order α on anomalous diffusion under same time

将式(15)中的位置变量 i 从 2 变换到 $I-1$, 可以得到在 $t=t_j$ 时刻的方程如下:

$$\left. \begin{aligned} &-(\gamma_2^j + \eta_2^j + \lambda) \theta_2^{j+1} + \gamma_2^j \theta_3^{j+1} = -\lambda \theta_2^j - \eta_2^j \theta_1^{j+1}, \\ &\eta_3^j \theta_2^{j+1} - (\gamma_3^j + \eta_3^j + \lambda) \theta_3^{j+1} + \gamma_3^j \theta_4^{j+1} = -\lambda \theta_3^j, \\ &\eta_4^j \theta_3^{j+1} - (\gamma_4^j + \eta_4^j + \lambda) \theta_4^{j+1} + \gamma_4^j \theta_5^{j+1} = -\lambda \theta_4^j, \\ &\eta_5^j \theta_4^{j+1} - (\gamma_5^j + \eta_5^j + \lambda) \theta_5^{j+1} + \gamma_5^j \theta_6^{j+1} = -\lambda \theta_5^j, \\ &\vdots \\ &\eta_{I-1}^j \theta_{I-2}^{j+1} - (\gamma_{I-1}^j + \eta_{I-1}^j + \lambda) \theta_{I-1}^{j+1} = -\lambda \theta_{I-1}^j - \gamma_{I-1}^j \theta_I^{j+1}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\text{得到此时的含水率矩阵为 } \vec{T} = \begin{pmatrix} \theta_2^{j+1} \\ \theta_3^{j+1} \\ \theta_4^{j+1} \\ \vdots \\ \theta_{I-1}^{j+1} \end{pmatrix}_{I-2}, \quad (18)$$

$$\text{常数矩阵为 } \vec{b} = \begin{pmatrix} -\lambda \theta_2^j - \eta_2^j \theta_1^{j+1} \\ -\lambda \theta_3^j \\ -\lambda \theta_4^j \\ -\lambda \theta_5^j \\ \vdots \\ -\lambda \theta_{I-2}^j \\ -\lambda \theta_{I-1}^j - \gamma_{I-1}^j \theta_I^{j+1} \end{pmatrix}_{I-2}. \quad (19)$$

结合公式(18), (19), 得到系数矩阵为

4 分数阶阶次的敏感性分析

通过改变分数阶阶次 α 得到的对同一时间不同距离的含水率变化图, 探究分数阶阶次对反常扩散过程的影响。由图可知分数阶阶次对于反常扩散过程空间相关性或非局域性的影响: 由于水力扩散系数 $D \propto x^{-\alpha}$ [14], 因而分数阶阶次越小 (图中由下至上), 其对应的扩散速度越快, 表明空间相关性效果更强, 使得其反常扩散过程比正常扩散 ($\alpha=1$ 时) 快, 与经典分数阶导数定义下 (Riemann-Liouville 定义和 Caputo 定义) 的反常扩散性质相符[9]。

5 拟合结果

El ABD[17]利用中子射线成像技术研究了水在烧结砖体中的入渗现象, 得到了体积含水率随时间与位置变化的试验数据。

通过引入试验中的初始边界条件 $x=x_0$ 时相对含水率为 0.6, $t=t_0$ 时相对含水率为及 $x=x_l$ 时相对含水率为 0, 根据式 (16), (18), (19) 和 (20) 利用 MATLAB 对试验数据进行拟合。试验数据和拟合结果见图 3, 4。

图 3 是拟合结果在三维图形中及分别在固定时间 t 固定位置 x 的显示。三维图中 x, y 轴分别代表时间与距离, z 轴为相对含水率。由三维图中的趋势可知, 对于同一位置, 随着时间增加含水率同时增加 (时间越久, 非饱和土体越接近饱和); 对于同一时间, 随着距离的增加含水率逐渐减小 (距离水源越远, 相对含水率越小)。三维图左边的二维图代表固定几个时间 (2, 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200 min) 下得到的含水率在此时刻随着距离的变化而变化的规律。三维图右边的二维图代表着固定几个位置 (0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120 mm) 下得到的含水率在此位置下随着时间变化而变化的规律。由图可知在初始位置相对含水率保持不变, 其他位置相对含水率随着时间增加而增加, 最终将趋近饱和。

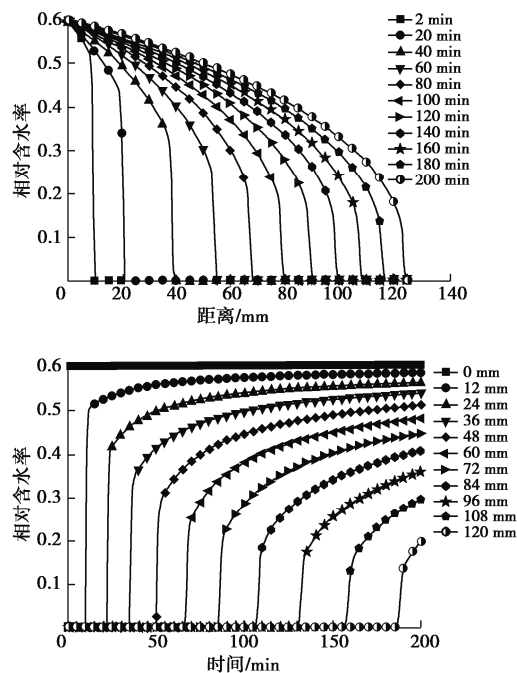
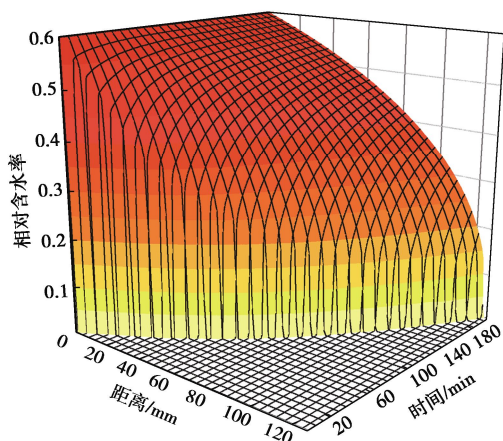


图 3 含水率 θ 随时间 t 、位置 x 变化图

Fig. 3 Fitting results of changes of moisture content with time and displacement

图 4 为 3 个不同时间下, 固定时间 t 得到的不同位置上相对含水率的模型数值解与试验数据的对比, 通过对比图可知, 空间分数阶渗流模型的数值解在中、短时间的拟合结果与试验结果匹配程度较高, t 增加时拟合结果出现了一定偏差。原因是本文中水力扩散系数 D (由土水特征线[18]得到) 采用的是幂律形式经验公式 ($D=A\theta^r$) [19], 当试件整体饱和度较高的时候, 此表达式不足以描述这一复杂情形, 在已有研究中已经体现了这一特性[20]。

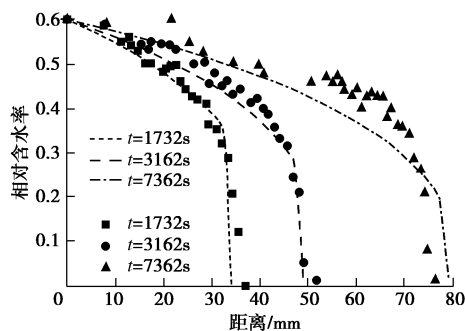


图 4 不同时间拟合结果与试验数据对比图

Fig. 4 Comparison between fitting results and experimental data of changes of moisture content under different time

图 5 是使用空间分数阶 Richards 方程与普通阶 Richards 方程关于同一组试验数据的拟合结果对比图。由图可知, 分数阶 Richards 方程比普通阶 Richards 方程的拟合效果更好, 且因为在方程中加入了空间分

数阶的效果, 其渗流速度比普通扩散要快, 与经典分数阶导数定义下 (Rieman-Liouville 定义和 Caputo 定义) 的反常扩散性质相符^[9]。

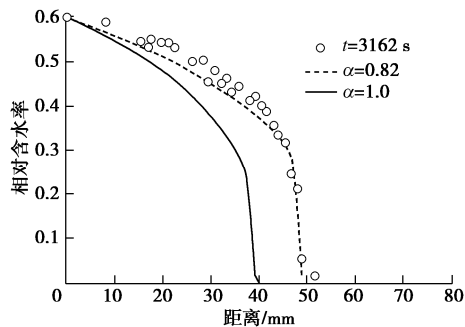


图5 空间分数阶渗流模型与 Richards 方程拟合结果对比

Fig. 5 Comparison of fitting results between space-fractional order and Richard's equation

6 结 论

本文通过针对非饱和土渗流过程的 Richards 方程, 从反常扩散的角度引入空间分数阶导数, 结合 Conformable 导数与一阶导数的关系, 得到了适用于反常扩散过程的一维空间分数阶 Richards 方程, 并对空间分数阶 Richards 方程的数值解进行探讨, 得到了全隐式形式下的有限差分离散格式, 在已有论文的试验基础上将试验数据与用 MATLAB 得到的数值解进行对比。此外还分析了方程中分数阶导数的意义及对渗流过程的影响, 主要得出以下结论:

(1) 地下水在非饱和土中的渗流过程与反常扩散过程具有相似性, 从反常扩散的角度研究渗流问题是可行的, 二者可以看作同一物理过程的不同表现形式。

(2) 空间分数阶反常扩散模型具有广泛的适用性: 当分数阶阶次为 1 时, 公式退化为 Richards 方程, 可以描述经典渗流过程; 当分数阶阶次时, 可以描述考虑非局域性的渗流过程。

(3) 从数值解来看, 相同条件下空间分数阶-反常扩散速度比普通扩散速度快, 这与经典分数阶导数定义下理论求解的反常扩散性质相符。将这个结论应用到渗流中, 空间分数阶渗流比 Richards 方程描述下的渗流速度要快。

(4) 基于 Conformable 导数定义下的空间分数阶渗流模型能够较好地描述地下水在非饱和土中的输运渗流过程, 其有限差分方法具有较好的适用性。

参考文献:

[1] 陈正汉. 非饱和土与特殊土力学的基本理论研究[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(2): 201 - 272. (CHEN Zheng-han. On

basic theories of unsaturated soils and special soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(2): 201 - 272. (in Chinese))

- [2] BUCKINGHAM E. Studies on the movement of soilmoisture[J]. US Department of Agriculture, Bureau of Soils B, 1907, **38**: 1 - 61.
- [3] RICHARDS L A. Capillary conduction of liquids through porous medium[J]. Physics, 1931, **1**: 318 - 333.
- [4] RICHARDS L A. The usefulness of capillary potential to soil-moisture and plant investigations[J]. J Agr Research, 1928, **37**: 719 - 742.
- [5] NEUMAN S P. Universal scaling of hydraulic conductivities and dispersivities in geologic media[J]. Water Resources Research, 1990, **26**(8): 1749 - 1758.
- [6] HATANO Y, HATANO N. Dispersive transport of ions in column experiments: an explanation of long - tailed profiles[J]. Water Resources Research, 1998, **34**(5): 1027 - 1033.
- [7] HAGGERTY R, MCKENNA S A, MEIGS L C. On the late - time behavior of tracer test breakthrough curves[J]. Water Resources Research, 2000, **36**(12): 3467 - 3479.
- [8] 孙洪广, 陈 文, 蔡 行. 空间分数阶导数“反常”扩散方程数值算法的比较[J]. 计算物理, 2009, **26**(5): 719 - 724. (SUN Hong-guang, CHEN Wen, CAI Xing. Comparative study of numerical algorithms for ‘anomalous’ diffusion equation with spatial fractional derivatives[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2009, **26**(5): 719 - 724. (in Chinese))
- [9] 常福宣, 陈 进, 黄 薇. 反常扩散与分数阶对流-扩散方程[J]. 物理学报, 2005, **54**(3): 1113 - 1117. (CHANG Fu-xuan, CHEN Jin, HUANG Wei, et al. Anomalous diffusion and fractional advection-diffusion equation[J]. Acta Physica Sinica, 2005, **54**(3): 1113 - 1117. (in Chinese))
- [10] 孙洪广, 常爱莲, 陈 文, 等. 反常扩散: 分数阶导数建模及其在环境流动中的应用[J]. 中国科学: 物理学力学天文学, 2015, **45**(10): 104702. (SUN Hong-guang, CHANG Ai-lian, CHEN Wen, et al. Anomalous diffusion: fractional derivative equation models and applications in environmental flows[J]. Scientia Sinica, 2015, **45**(10): 104702. (in Chinese))
- [11] ZHOU H W, YANG S, ZHANG S Q. Conformable derivative approach to anomalous diffusion[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2018, **491**: 1001 - 1013.
- [12] KHALIL R, AL HORANI M, YOUSEF A, et al. A new definition of fractional derivative[J]. Journal of

- Computational and Applied Mathematics, 2014, **264**: 65 - 70.
- [13] PACHEPSKY Y, TIMLIN D, RAWLS W. Generalized Richards' equation to simulate water transport in unsaturated soils[J]. Journal of Hydrology, 2003, **272**(1/2/3/4): 3 - 13.
- [14] PACHEPSKY Y A, TIMLIN D. Water transport in soils as in fractal media[J]. Journal of Hydrology, 1998, **204**: 98 - 107.
- [15] MILLER E E, MILLER R D. Physical theory for capillary flow phenomena[J]. Journal of Applied Physics, 1956, **27**(4): 324 - 332.
- [16] OZISIK N. Finite Difference Methods in Heat Transfer[M]. Boca Raton: CRC Press, 1994.
- [17] EL ABD A, CZACHOR A, MILCZAREK J. Neutron radiography determination of water diffusivity in fired clay brick[J]. Applied Radiation and Isotopes, 2009, **67**(4): 556 - 559.
- [18] 陈正汉, 谢定义, 王永胜. 非饱和土的水气运动规律及其工程性质研究[J]. 岩土工程学报, 1993, **15**(3): 9 - 20. (CHEN Zheng-han, XIE Ding-yi, WANG Yong-sheng, et al. Experimental study of laws of fluid motion, suction and pore pressures in unsaturated soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1993, **15**(3): 9 - 20. (in Chinese))
- [19] PARLANCE M B, PRASAD S N, PARLANGE J Y, et al. Extension of the Heaslet - Alksne technique to arbitrary soil water diffusivities[J]. Water Resources Research, 1992, **28**(10): 2793 - 2797.
- [20] 梅 岭, 姜朋明, 李 鹏, 等. 非饱和土的土水特征曲线试验研究[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(增刊 1): 124 - 128. (MEI Ling, JIANG Peng-ming, LI Peng, et al. Soil-water characteristic curve tests on unsaturated soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(S1): 124 - 128. (in Chinese))
-

本期广告索引

- 封 2 北京理正软件股份有限公司
封 4 南瑞集团水利水电技术分公司