

DOI: 10.11779/CJGE202008010

# 岩土工程简化可靠度设计方法——修正分位数法

杨智勇<sup>1</sup>, 唐 栋<sup>2</sup>, 张 蕾<sup>3</sup>, 祁小辉<sup>4</sup>

(1. 台湾大学土木工程学系, 台湾 台北; 2. 长沙理工大学水利工程学院, 湖南 长沙 410114; 3. 太原理工大学水利科学与工程学院, 山西 太原 030024; 4. 南洋理工大学土木环境工程学院, 新加坡)

**摘 要:** 现阶段多数规范推荐的半概率设计方法分项系数法与传统容许应力设计法具有相似的设计过程, 易于被岩土工程师接受。然而, 当实际岩土体参数统计量及分布类型等与分项系数设计法校准过程所采用的不一致时, 分项系数法的设计结果往往会产生较大偏差。分位数设计法与分项系数法设计过程相似, 且能够解决分项系数法设计偏差较大的问题。遗憾的是, 该方法需要事先通过大量可靠度分析建立岩土结构物设计参数与有效随机维度间的回归函数, 该过程不仅计算量较大而且十分繁琐, 不利于工期紧迫条件下的快速可靠度设计。为此, 提出了基于修正分位数法的岩土工程简化可靠度设计方法。首先介绍了原始有效随机维度-分位数设计法(ERD-QVM)和分位一阶二次矩可靠度分析方法, 在此基础上提出了基于简单迭代算法的修正分位数法。最后以桩基础设计和方形基础设计为例阐明了所提方法的有效性。结果表明: 修正分位数法为工期紧迫的岩土结构物可靠度设计提供了一种有效分析工具。修正分位数法不仅能够有效地避免原始 ERD-QVM 需要建立关于设计参数回归函数的问题, 极大地降低原始 ERD-QVM 的计算量, 而且能够得到合理的岩土结构物设计结果。修正分位数法设计结果更保守, 原始 ERD-QVM 可能产生偏危险的设计, 这对岩土结构物稳定性非常不利。两种设计方法具有相似的设计稳健性。

**关键词:** 岩土结构物; 可靠度设计; 分项系数法; 修正分位数法; 分位一阶二次矩法

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2020)08-1456-09

**作者简介:** 杨智勇(1989—), 男, 山西柳林人, 博士, 主要从事岩土工程可靠度与风险分析方面的研究工作。E-mail: yzywhu@163.com。

## Simplified reliability-based design method for geotechnical structures —modified quantile value method

YANG Zhi-yong<sup>1</sup>, TANG Dong<sup>2</sup>, ZHANG Lei<sup>3</sup>, QI Xiao-hui<sup>4</sup>

(1. Department of Civil Engineering, Taiwan University, Taipei China; 2. School of Hydraulic Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410114, China; 3. College of Hydro Science and Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China; 4. School of Civil and Environmental Engineering, Nanyang Technological University, Singapore)

**Abstract:** Currently, the partial factor design method is recommended by most international design codes as a semi-probability design method. This popularity might be partly because the partial factor design method shares a similar design procedure as that of the conventional allowable-stress-design method and therefore is likely to be accepted by practical geotechnical engineers. However, the partial factor design method might produce significantly biased design schemes especially when the design condition (e.g., statistical and probabilistic distributions of soil properties) is different from that used in the code for partial factor calibrations. The quantile value method (i.e., effective random dimension-quantile value method, ERD-QVM) shares a similar design procedure as the partial factor design method. But it needs to calibrate the relationship between ERD and design parameters, which is tedious and computationally expensive. Consequently, it is not feasible to apply this method when the time schedule of the engineering is tight. This study proposes a simplified reliability-based design method for geotechnical structures, namely modified quantile value method (MQVM). The original ERD-QVM and the quantile first-order second-moment method (QFOSM) are reviewed. Based on the QFOSM, the MQVM is developed. A pile foundation example and a pad footing example are employed to illustrate the performance of the proposed method. It is shown that the proposed method can provide an effective tool for rapid reliability-based designs. The proposed

**基金项目:** 台湾大学高等教育深耕计划项目(107L4000); 湖南省自然科学基金项目(2019JJ50642); 山西省应用基础研究项目(201801D221046); 水沙科学与水灾害防治湖南省重点实验室开放基金项目(2019SS04); 湖南省教育厅科学研究项目(18C0191)

**收稿日期:** 2019-06-22

\*通信作者(E-mail: tangdong@csust.edu.cn)

MQVM can avoid the calibration procedure of the relationship between ERD and design parameters and yield rational design schemes. The original ERD-QVM might produce an unsafe design scheme, which poses an enormous threat to geotechnical structures. By contrast, the design scheme of MQVM is relatively conservative. Moreover, the MQVM has a robustness similar to that of ERD-QVM.

**Key words:** geotechnical structure; reliability-based design; partial factor design method; modified quantile value method; quantile first-order second-moment method

## 0 引言

岩土结构物安全性评价中涉及到不确定性因素,如模型不确定性、土体参数空间变异性、地层变异性等<sup>[1-3]</sup>。传统的确定性设计方法如容许应力设计法不能有效地考虑土体参数不确定性对岩土结构物的影响,岩土工程亟需发展基于可靠度理论的岩土结构物设计方法。近年来,基于可靠度理论的岩土结构物设计受到国内外学者的日益重视。如彭兴等<sup>[4]</sup>采用蒙特卡洛模拟(Monte Carlo simulation, MCS)方法,研究了香港秀茂坪岩质边坡的可靠度设计问题。陈祖煜等<sup>[5]</sup>提出了基于相对安全率的可靠度设计方法,该方法认为传统安全系数设计标准与可靠度设计标准间存在定量关系,复杂的可靠度设计能够转换为简单安全系数设计。李典庆等<sup>[6]</sup>进一步严格证明了安全系数设计与可靠度设计等价性成立的条件,提出了基于广义可靠指标相对安全率的设计方法。Basha等<sup>[7]</sup>采用一阶可靠度分析方法(first order reliability method, FORM),探讨了土工合成材料加筋土结构在地震荷载作用下的可靠度优化设计问题。Gao等<sup>[8]</sup>提出了基于广义子集模拟的重力式挡土墙可靠度设计方法。

总体而言,目前常用的可靠度设计方法可概括为两类:半概率设计方法和全概率设计方法。半概率设计方法主要为基于分项系数的设计法如荷载抗力分项系数法(load and resistance factor design, LRFD)<sup>[9-10]</sup>,多抗力分项系数法(multiple resistance factor design, MRFD)<sup>[11]</sup>等。分项系数设计法与容许应力设计法设计过程相似,具有简单易用的特点,为现阶段多数规范推荐的方法<sup>[9, 12-13]</sup>。然而,规范所规定的分项系数是基于不确定性参数特定的统计量(如均值、标准差及相关性等)、特定概率分布类型及指定的目标可靠度校核而来<sup>[4]</sup>,因此当不确定性参数的统计量为其它值或分布类型不符合校核所用分布时,分项系数设计法难以获得一致的可靠度指标<sup>[14-15]</sup>。相比之下,全概率设计方法对不确定性参数统计量的取值及分布类型不敏感,能够产生一致的可靠度设计结果。全概率设计方法首先离散岩土结构物目标设计参数(一般为几何尺寸参数如边坡坡高、基坑深度、基础宽度等)为一系列离散的值,然后采用可靠度分析方法如

FORM<sup>[16-17]</sup>、MCS<sup>[4]</sup>、子集模拟(subset simulation, SS)<sup>[18]</sup>或改进子集模拟等<sup>[8, 19]</sup>方法估计不同设计参数对应的可靠度指标,最后根据可靠度分析的结果选择满足目标可靠度要求的目标设计参数。此类全概率设计方法需要针对一系列离散的目标设计参数重复进行可靠度分析,因此计算量较大,不利于工期紧张条件下的岩土结构物可靠度设计。基于FORM的逆分析方法能够为全概率设计提供一种便捷的工具,不需要离散目标设计参数,针对特定的目标可靠度通过一次逆FORM分析即可得到目标设计参数设计值<sup>[20]</sup>。然而逆FORM不仅需要通过Nataf变换、Rosenblatt变换或Rackwitz-Fiesslerbian变换转换原始随机变量至正态随机变量<sup>[21]</sup>,而且涉及复杂的多变量优化算法<sup>[22]</sup>。简而言之,全概率设计方法要求岩土工程师具有较高的可靠度理论知识,工程适用性较差。

针对上述问题,Ching等<sup>[23]</sup>提出了基于分位数的可靠度设计方法(quantile value method, QVM),QVM与分项系数设计法具有相似的设计过程,易于被岩土工程师所接受。当变量冗余度(variable degree of redundancy)较低时,QVM能够产生一致的可靠度设计结果;当变量冗余度较高时,QVM的设计稳健性逐渐降低。变量冗余度代表了岩土结构物所涉随机变量的冗余程度,冗余随机变量会降低岩土结构物的失效概率,在一定程度上反映了岩土结构物的安全冗余度<sup>[24]</sup>。一般地,桩群比单桩有更高的变量冗余度;嵌入多层土的桩基础比嵌入单层土的桩基础有更高的变量冗余度(单层土厚度=多层土总厚度)。Ching等<sup>[24]</sup>指出变量冗余度可通过有效随机维度(effective random dimension, ERD)进行量化,在此基础上提出了基于有效随机维度-分位数的可靠度设计方法(effective random dimension-quantile value method, ERD-QVM)。ERD-QVM能够有效地解决变量冗余度的问题,但对包含非正态随机变量的极限状态函数,ERD-QVM难以直接估计ERD。因此,在应用ERD-QVM时必须事先建立土体参数统计量及其它设计参数与ERD间的回归关系,该过程类似于全概率设计法,需要大量重复的可靠度分析,计算量较大,同样也不适用于工期紧迫条件下的可靠度设计。

在 ERD-QVM 的基础上, Yang 等<sup>[22]</sup>提出了简化的岩土工程可靠度分析方法——分位一阶二次矩分析方法 (quantile first-order second-moment method, QFOSM)。QFOSM 采用随机变量临界分位值处的偏导数求解 ERD。本文进一步提出了基于 ERD-QVM 和 QFOSM 的可靠度设计方法——修正分位数法, 通过简单的迭代算法求解满足目标可靠度指标要求的目标设计参数设计值, 避免了原始 ERD-QVM 中标定设计参数与 ERD 间回归关系的过程, 为现场的快速可靠度设计提供了一种有效分析工具。

## 1 有效随机维度——分位数可靠度设计方法

可靠度设计的目标可以总结为: 根据期望的目标可靠度指标  $\beta_T$  选取合适的目标设计参数设计值  $\theta_T$ , 从而使设计的岩土结构物稳定性水平接近要求的目标可靠度水平  $\beta_T$ 。理论上, 可靠度设计参数包含岩土体参数统计值、分布类型及岩土结构物几何尺寸参数等, 但由于岩土体参数的均值、变异系数及相关系数等属于人为不可控量, 因此在实际施工过程中通常仅选取岩土结构物的几何尺寸参数如桩直径、桩基础贯入深度、边坡开挖深度或基础宽度等可控量作为目标设计参数, 即通过调整岩土结构物的几何尺寸等可控量来满足目标可靠度要求。在设计过程中, 分项系数法通过对荷载变量和抗力变量施加不同的分项系数来实现对应于指定目标可靠度的设计。与分项系数法设计理念相似, ERD-QVM 通过折减荷载变量和增加抗力变量分别至它们的  $1-\eta_T$  分位值与  $\eta_T$  分位值来估计岩土结构的目标设计参数设计值。对于极限状态函数  $G$ , ERD-QVM 通过下式估计目标设计参数设计值:

$$G(X_1^{\eta_T}, \dots, X_i^{1-\eta_T}, \dots, X_n^{\eta_T}, \theta) = 0 \quad (1)$$

式中,  $X$  为已知量, 设计参数  $\theta$  为未知量,  $X_i^{\eta_T}$  为变量  $X_i$  的  $\eta_T$  分位值。注意到式 (1) 能够用于可靠度设计的前提是分位数  $\eta_T$  与目标可靠度  $\beta_T$  之间存在一对一对关系, 且该一对一对关系对岩土体不确定性参数的统计量及分布类型等不敏感。Ching 等<sup>[24]</sup>研究发现该一对一对关系可表示为

$$\beta_T = \sqrt{\text{ERD}} \times [-\Phi^{-1}(\eta_T)] \quad (2)$$

式中,  $\Phi$  为标准正态累积分布函数,  $\Phi^{-1}$  为其逆函数; ERD 为有效随机维度, 量化了变量冗余度。研究表明对于

$$G = a + b_1 Z_1 + b_2 Z_2 + \dots + b_n Z_n \quad (3)$$

包含相关正态随机变量的线性极限状态函数, 式 (2) 是完全准确的<sup>[22-24]</sup>。式中:  $G > 0$  表示安全,  $G \leq 0$  表示失效; ( $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ ) 为相关标准随机变量; 若

$b_i > 0$ ,  $Z_i$  为抗力变量; 若  $b_i < 0$ ,  $Z_i$  则为荷载变量。对于式 (3) 所示极限状态函数, ERD 的表达式为

$$\text{ERD} = \frac{(|b_1| + |b_2| + \dots + |b_n|)^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} b_i b_j} \quad (4)$$

式中,  $\rho_{ij}$  为变量  $Z_i$  与  $Z_j$  间相关系数。对于包含非正态随机变量的线性或非线性极限状态函数, ERD-QVM 并不能通过式 (4) 来计算 ERD。此时, Ching 等<sup>[24]</sup>建议采用以下两种方法估计 ERD: ①采用 FORM 估计当前设计参数对应的设计验算点, 在设计验算点处线性展开极限状态函数, 通过式 (4) 估计 ERD; ②采用 MCS 估计当前设计参数对应的可靠度指标, 采用简单线性搜索算法如二分法求解式 (5) 得到相应的临界分位数  $\eta_T$ , 再通过式 (2) 估计 ERD。

在应用 ERD-QVM 时, 需要先采用方法一或方法二针对不同的设计参数进行大量的可靠度分析, 建立 ERD 与设计参数间的回归函数。

## 2 分位一阶二次矩可靠度分析方法

分位一阶二次矩可靠度分析方法 (QFOSM) 可以视为 ERD-QVM 的逆分析, 可以用来估计给定设计参数条件下的可靠度指标。对于包含非正态相关随机变量的极限状态函数  $G(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , 采用 QFOSM 估计可靠度指标的计算流程可总结如下<sup>[22]</sup>:

(1) 根据给定的设计参数, 求解临界分位数  $\eta^*$ , 使得变量  $X_i$  的分位值满足

$$G(X_1^{\eta}, \dots, X_i^{1-\eta}, \dots, X_n^{\eta}, \theta) = 0 \quad (5)$$

式中,  $X_i^{\eta}$  为变量  $X_i$  的  $\eta$  分位值。与式 (1) 不同, 式

(5) 是关于  $\eta$  的方程, 设计参数  $\theta$  为已知量。式 (5) 的求解为一个的单变量求根问题, 常用的简单线性搜索算法如二分法即可求解式 (5), 因此并不要求岩土工程师具有复杂的数学理论知识。注意到, 求解式 (5) 时, 首先需要判别变量  $X_i$  的类型。对于大多数岩土工程所涉随机变量,  $X_i$  的类型相对容易判断, 例如内摩擦角  $\varphi$ , 黏聚力  $c$  和不排水抗剪强度参数  $s_u$  一般都为抗力变量, 岩土结构物所受外荷载一般都为荷载变量。然而, 当极限状态函数不随某个变量  $X$  单调变化时, 确定变量类型变得相对比较困难。出于保守考虑, Yang 等<sup>[22]</sup>建议在结构物极限状态函数中拆分为  $X$  为两个具有相同分布的抗力变量  $X_S$  和荷载变量  $X_L$ 。

(2) 根据分位数的偏导计算 ( $b_1, b_2, \dots, b_n$ ), 若  $X_i$  为抗力变量,

$$b_i = [G(X_1^{\eta^*}, \dots, X_i^{\eta^* + \Delta\eta}, \dots, X_n^{\eta^*}) - G(X_1^{\eta^*}, \dots, X_i^{\eta^* - \Delta\eta}, \dots, X_n^{\eta^*})] / (2\Delta\eta) \quad (6a)$$

若  $X_i$  为荷载变量,

$$b_i = [G(X_1^{\eta^*}, \dots, X_i^{(1-\eta^*)+\Delta\eta}, \dots, X_n^{\eta^*}) - G(X_1^{\eta^*}, \dots, X_i^{(1-\eta^*)-\Delta\eta}, \dots, X_n^{\eta^*})] / (2\Delta\eta) \quad (6b)$$

- (3) 基于式 (6) 得到 $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ 值, 采用式 (4) 估计 ERD。
- (4) 基于上述步骤得到的 $\eta^*$ 和 ERD, 代入式 (2) 估计可靠度指标。

3 修正分位数法 (MQVM)

QFOSM 采用随机变量分位值处的偏导数来计算 ERD, 因此不需要事先建立 ERD 与设计参数间的回归关系。得益于此, 采用简单的迭代算法即可实现基于 QFOSM 的修正分位数法, 该方法同样不需要建立 ERD 与设计参数间的回归关系。修正分位数法的计算流程总结如下:

- (1) 随机赋予 ERD 一个初始值。为了加快迭代收敛速度, 建议初始 ERD 取值范围为 $[1, \text{随机变量个数}]$ 。将 ERD 和目标可靠度指标 $\beta_T$ 代入求解 $\eta^*$ :

$$\eta^* = \Phi(-\beta_T / \sqrt{\text{ERD}}) \quad (7)$$

- (2) 基于上一步所得 $\eta^*$ , 更新设计参数 $\theta$ 以使极限状态函数  $G$  满足

$$G(X_1^{\eta^*}, \dots, X_i^{1-\eta^*}, \dots, X_n^{\eta^*}, \theta) = 0 \quad (8)$$

式 (8) 与式 (1) 相同,  $X$  为已知量, 设计参数  $\theta$  为未知量。同样地, 可采用简单线性搜索算法如二分法求解式 (8)。

- (3) 通过式 (6) 计算分位数 $\eta^*$ 对应的偏导数 $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ , 将 $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ 代入式 (4) 更新 ERD。

- (4) 利用式 (7) 更新分位数 $\eta^*$ 。

- (5) 重复步骤 (2) ~ (4) 直至设计参数 $\theta$ 收敛 (例如 $\varepsilon_\theta \leq 1 \times 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_\theta$  为当前 $\theta$ 与上一次迭代 $\theta$ 间差的绝对值)。

需要注意的是, 本文所提修正分位数设计法尚不能直接应用于多几何参数的设计问题。对于多几何参数设计问题, 由于增加了关于多几何参数的目标优化函数, 因此需要采用其它复杂优化算法嵌套本文方法进行设计。

4 算例分析

下面分别采用一个条形基础算例和一个方形基础算例来阐明所提方法的有效性。为简化设计问题, 同时与前人研究保持一致, 本文仅考虑随机变量模型下的桩基础和方形基础设计问题。采用 MCS 方法验证所提方法的准确性, 不同设计条件下 MCS 模拟次数为  $1 \times 10^6$  次。

4.1 桩基础

本节以一个桩基础设计案例来说明所提方法的有效性。Ching 等<sup>[23-24]</sup>也探讨了该桩基础案例设计问题。如图 1 所示, 桩直径为  $B$ , 桩长  $L = L_s + L_c$ , 其中  $L_s$  和  $L_c$  分别为桩基础嵌入砂土层厚度和黏土层厚度。静荷载  $D_L$  和动荷载  $L_L$  作用于桩顶,  $D_L$  和  $L_L$  服从对数正态分布, 均值为  $\mu_{DL}$  和  $\mu_{LL}$ , 变异系数为 10% 和 20%。由于桩尖抵抗作用力较小, 忽略不计。桩基础承载力极限状态函数表示为

$$G = \ln \left( \frac{R_c + R_s}{D_L + L_L} \right) = \ln \left( \frac{14.9\pi L_c B \times \varepsilon_a \times s_u^{0.3} + 2.71 L_s B \times \varepsilon_N \times N}{D_L + L_L} \right) \quad (9)$$

式中  $R_c$  和  $R_s$  分别为黏土层和砂土层提供的抗力;  $s_u$  为黏土层不排水抗剪强度参数;  $N$  为砂土平均 SPT 锤击数;  $\varepsilon_a$  和  $\varepsilon_N$  为模型转换不确定性因子。参数  $D_L, L_L, s_u, N, \varepsilon_a$  和  $\varepsilon_N$  为独立随机变量, 表 1 给出了它们的分布类型及统计量。

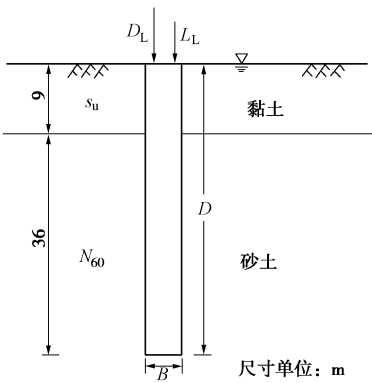


图 1 桩基础示意图

Fig. 1 Schematic of pile foundation

表 1 桩基础的随机变量统计值

Table 1 Statistics of random variables for pile example

随机变量	均值	变异系数/%	分布类型
静荷载 $D_L$ (kN)	$\mu_{DL}$	10	对数正态
活荷载 $L_L$ (kN)	$\mu_{LL}$	20	对数正态
不排水抗剪强度参数 $s_u$ (kPa)	$\mu_{su}$	30	对数正态
砂土平均 SPT 锤击数 $N$	$\mu_N$	30	对数正态
黏土转换不确定性因子 $\varepsilon_a$	1.05	32	对数正态
砂土转换不确定性因子 $\varepsilon_N$	1.22	70	对数正态

如第 2 节所述, 应用 ERD-QVM 要求首先建立 ERD 与设计参数间的回归关系。考虑到该桩基础算例与 Ching 等<sup>[24]</sup>所用算例完全一致, 因此本文采用 Ching 等<sup>[24]</sup>建立的回归关系:

$$\text{ERD} = 2.512 + 9.572 r_s - 9.495 r_s^2 - 0.504 r_s^3,$$

$$r_s = \frac{2.71\mu_N t_s}{14.9\mu_{su}^{0.3}(1-t_s) + 2.71\mu_N t_s}, \quad (10)$$

式中,  $t_s=L_s/L$  为砂土深度与桩长的比值。

选取桩直径  $B$  为目标设计参数, 也即通过调整桩直径  $B$  来满足目标可靠度指标  $\beta_T$ 。首先考虑其它设计参数:  $L=45\text{ m}$ ,  $t_s=0.8$ ,  $\mu_{DL}=2500\text{ kN}$ ,  $r_{LD}=0.5$ ,  $\mu_{su}=125\text{ kN/m}^2$  和  $\mu_N=30$  条件下目标可靠度为  $\beta_T=1.0, 1.2, 1.4, \cdots, 3.0$  时的桩直径设计问题。图 2 (a) 给出了修正分位数法与原始 ERD-QVM 的设计对比结果。图中视 MCS 的设计结果为准确的设计结果。与 ERD-QVM 相比, 可以看出所提方法设计的桩直径较大, 表明所提方法的设计结果更保守。当  $\beta_T < 2$  时, ERD-QVM 产生的桩直径小于 MCS 的结果, 表明 ERD-QVM 的设计结果变的偏危险。图 2 (b) 进一步对比了基于所提方法和 ERD-QVM 所得的不同设计桩直径下实际的可靠度指标, 本文采用 MCS 估计该实际可靠度指标。可以看出, 当  $\beta_T$  较小时, ERD-QVM 设计的桩直径对应的实际可靠度指标可能小于目标可靠度指标, 而所提方法设计的桩直径对应的实际可靠度指标均大于目标可靠度指标。随着目标可靠度增大, 所提方法设计误差逐渐增大。从工程应用的角度讲, 所提方法的误差是可以接受的 (例如  $\beta_T=3$ , 时设计桩直径对应实际可靠度指标  $\beta=3.24$ )。一般地, 对于可靠度设计而言, 并不是越准确的设计结果越好, 尽管偏保守的设计结果会引起工程造价的升高, 但轻微保守的设计结果不仅能够让岩土工程结构更安全, 工程造价的升高也相对有限, 有些时候甚至可忽略不计, 因此 Low 等<sup>[25]</sup>推荐可靠度设计应偏向于轻微保守的结果, 而不是完全准确或偏危险的设计。Yang 等<sup>[22]</sup>指出, QFOSM 的准确性可以用正则化 ERD (ERD/变量维度) 来验证。当正则化 ERD 大于 1 时, QFOSM 可能产生较大误差。修正分位数法存在同样问题, 因此当 ERD 大于 1 时, 需要对其设计结果予以注意, 例如可通过其它可靠度分析方法如 FORM, MCS 或子集模拟等校核其设计结果。

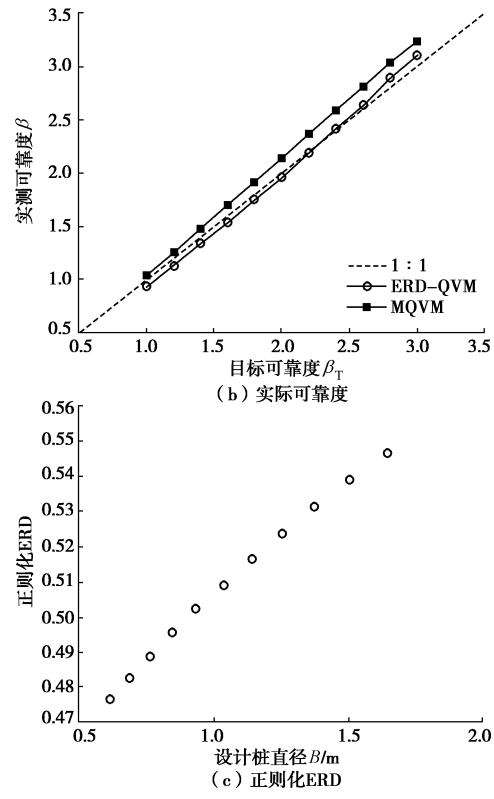
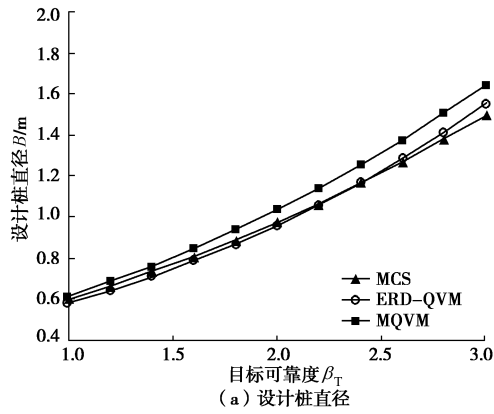


图 2 不同目标可靠度下 ERD-QVM 和修正分位数法设计结果对比

Fig. 2 Comparison of results by ERD-QVM and MQVM under various values of  $\beta_T$

为了进一步对比所提修正分位数法与 ERD-QVM 的设计稳健性, 根据表 2 给出的设计参数可行域随机抽取 1000 组设计参数, 在此基础上分别采用所提方法与 QVM-ERD 估计每组设计参数对应的设计桩直径, 两种方法分别得到 1000 个设计桩直径  $B$ , 最后采用 MCS 估计这些桩直径对应的实际可靠度指标。

表 2 桩基础设计参数可行域

Table 2 Feasible ranges for pile design parameters			
设计参数	下界	上界	分布类型
桩直径 $B/\text{m}$	0.5	2.0	均匀分布
桩长 $L=L_c+L_s/\text{m}$	10	80	均匀分布
砂土深度与桩长的比值 $t_s=L_s/L$	0	1	均匀分布
动荷载与静荷载比值	0.1	1.0	均匀分布
$r_{LD}=\mu_{LL}/\mu_{DL}$			
静荷载均值 $\mu_{DL}/\text{kN}$	2000	2500	均匀分布
不排水抗剪强度参数均值			
$\mu_{su}/\text{kPa}$	50	200	均匀分布
砂土平均 SPT 锤击数 $N$ 均值 $\mu_N$	10	50	均匀分布

表 3 给出了所得实际可靠度指标的统计结果。一般地, 对不同的设计参数组合, 完全准确的设计方法应该产生完全一致的实际可靠度指标, 也即表 3 中均值=最小值=最大值= 1, 变异性= 0。变异性越小, 表明设计参数组合对设计方法的影响越小, 设计方法稳

表 3 基于 1000 组随机设计参数的可靠度指标统计

Table 3 Statistics of actual reliability index for 1000 verification cases

统计量	$\beta_T = 1.5$		$\beta_T = 2.0$		$\beta_T = 2.5$		$\beta_T = 3.0$	
	$\beta_{MQ}/\beta_T$	$\beta_{EQ}/\beta_T$	$\beta_{MQ}/\beta_T$	$\beta_{EQ}/\beta_T$	$\beta_{MQ}/\beta_T$	$\beta_{EQ}/\beta_T$	$\beta_{MQ}/\beta_T$	$\beta_{EQ}/\beta_T$
均值	1.06	1.01	1.06	1.01	1.06	1.01	1.06	1.02
变异系数	0.03	0.04	0.02	0.02	0.02	0.01	0.02	0.02
最大值	1.10	1.07	1.10	1.06	1.10	1.06	1.11	1.07
最小值	0.99	0.94	0.99	0.96	0.99	0.96	0.99	0.96

注:  $\beta_{MQ}$  为修正分位数法估计的基础宽度对应的实际可靠度指标;  $\beta_{EQ}$  为 ERD-QVM 估计的基础宽度对应的实际可靠度指标。

健性越好。可以看出, 对于不同的目标可靠度指标所提方法与 ERD-QVM 有几乎一致的 COV, 表明二者的设计稳健性非常相近。所提方法得到的可靠度指标平均值和最小值均大于 ERD-QVM 的结果, 表明所提方法总体上更保守。

4.2 方形基础

本节进一步以一方形基础来阐明所提方法的有效性。如图 3 所示, 方形基础宽度为  $B$ , 嵌入黏土深度  $D = 1\text{ m}$ , 考虑基础宽度  $B$  为目标设计参数。黏性土重度  $\gamma = 17\text{ kN/m}^3$ , 黏聚力为  $c$ , 内摩擦角为  $\varphi$ 。方形基础受垂直荷载  $V$  和水平荷载  $H$  共同作用。假设水位线足够低, 水压力对基础承载力的影响忽略不计。 $c$  和  $\varphi$  服从对数正态分布, 其均值为  $\mu_c$  和  $\mu_\varphi$ , 变异系数为  $V_c$  和  $V_\varphi$ 。 $\ln(c)$  和  $\ln(\varphi)$  间的相关系数为  $\rho$ 。垂直荷载与水平荷载服从均值为  $\mu_v$  和  $\mu_h$ 、变异系数为 10% 和 15% 对数正态分布。除  $c$  和  $\varphi$  外, 其它变量相互独立。方形基础承载力极限状态函数可以定义为

$$G = \ln \left[ \frac{(cN_c s_c d_c i_c + qN_q s_q d_q i_q + 0.5\gamma B N_\gamma s_\gamma d_\gamma i_\gamma) B^2}{V + W} \right]. \quad (11)$$

式中  $W = \gamma_c B^2 D$  为混凝土基础重度,  $\gamma_c$  为混凝土单位重度 ( $\gamma_c = 23\text{ kN/m}^3$ );  $N_c = (N_q - 1)\cot \varphi$ ,  $N_q = e^{\pi \tan(\varphi)} \tan^2(45^\circ + \varphi/2)$  和  $N_\gamma = 2(N_q + 1)\tan(\varphi)$  为承载力因子;  $s_c = 1 + N_q/N_c$ ,  $s_\gamma = 0.6$  和  $s_q = 1 + \tan(\varphi)$  为形状因子;  $d_c = 1 + 0.4D/B$ ,  $d_q = 1 + 2\tan(\varphi)[1 - \sin(\varphi)]^2 D/B$  和  $d_\gamma = 1$  为深度因子;  $i_c = i_q = [1 - \arctan(H/V)/(\pi/2)]^2$  和  $i_\gamma = [1 - \arctan(H/V)/(\pi \varphi/180)]^2$  为荷载倾斜因子。

对于该方形基础, 荷载倾斜因子  $i_c$ ,  $i_q$  和  $i_\gamma$  会随着垂直荷载  $V$  的增加而增加, 导致基础抗力 (式 (11) 中分子) 部分随着  $V$  的增加而增加。同时, 基础荷载 (式 (11) 中分母) 也会随着垂直荷载  $V$  的增加而增加。可以看出, 垂直荷载  $V$  既不完全是抗力变量也不完全是荷载变量。此时, 根据式 (11) 难以直接判别垂直荷载  $V$  的变量类型。对于这种既不完全是抗力变量也不完全是荷载变量的随机变量, 出于保守考虑同时为了 QFOSM 能够有效执行, Yang 等<sup>[22]</sup>建议将该类

型变量拆分为两个服从同分布的独立变量。本文所提分位数设计法同样需要判别变量类型, 因此拆分变量  $V$  为  $V_s$  和  $V_D$  两个独立变量, 其中  $V_s$  为与倾斜因子相关的抗力变量 (即式 (11) 分子采用  $V_s$ ),  $V_D$  为与荷载变量相关的变量 (即式 (11) 分母采用  $V_D$ )。表 4 总结了该方形基础所涉随机变量的统计量及其分布类型。

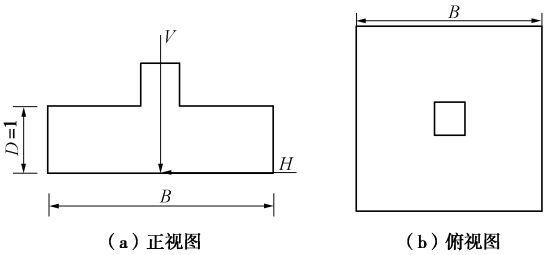


图 3 方形基础示意图

Fig. 3 Schematic of pad footing

表 4 方形基础的随机变量统计值

Table 4 Statistics of random variables for square footing problem

随机变量	均值	变异系数	分布类型
黏聚力 $c/\text{kPa}$	$\mu_c$	$V_c$	对数正态
摩擦角 $\varphi/(^\circ)$	$\mu_\varphi$	$V_\varphi$	对数正态
水平荷载 $H/\text{kN}$	$\mu_h$	15%	对数正态
垂直荷载 $V_D/\text{kN}$	$\mu_v$	10%	对数正态
影响变量 ( $i_c$ , $i_q$ , $i_\gamma$ ) 的垂直荷载 $V_s/\text{kN}$	$\mu_v$	10%	对数正态

首先建立 ERD 与设计参数间的回归关系。步骤如下: 根据表 5 给出的设计参数可行域随机抽取 1000 组设计参数, 采用第 2 节方法一估计每组设计参数对应 ERD, 通过多变量四阶多项式 (MATLAB 函数 MultiPolyRegress) 拟合得到 ERD 的回归函数, 该多项式展开项数较多, 此处不便展示, 感兴趣的读者可向笔者发邮件索取。为验证该回归函数的准确性, 再随机抽取 500 组设计参数, 分别采用第 2 节方法一与回归函数计算 ERD, 图 4 给出了对比结果。可以看出, 回归函数能够很好地估计不同设计参数对应的 ERD。

在随后的分析中, 基于 ERD-QVM 的方形基础设计均采用该回归函数。

考虑方形基础宽度  $B$  为目标设计参数, 方形基础目标可靠度水平通过调整  $B$  的大小来满足。首先考虑设计参数  $\mu_c=19\text{ kPa}$ ,  $V_c=30\%$ ,  $\mu_\phi=25^\circ$ ,  $V_\phi=20\%$ ,  $\rho=0$ ,  $\mu_H=200\text{ kN}$  和  $\mu_V=800\text{ kN}$  条件下不同目标可靠度水平  $\beta_T=2.0, 2.2, 2.4, \dots, 4.0$  对应的基础宽度设计问题。图 5 给出了修正分位数法与 ERD-QVM 的设计结果对比。图 5 (a) 和 (b) 可以看出, ERD-QVM 与修正分位数法设计结果相似, 修正分位数法设计结果轻微偏保守。修正分位数法的正则化 ERD 小于 1, 表明修正分位数法的设计结果偏差不大。

表 5 方形基础设计参数可行域

Table 5 Feasible ranges for square footing design parameters			
设计参数	下界	上界	分布类型
基础宽度 $B/\text{m}$	1.5	3	均匀分布
黏聚力均值 $\mu_c/\text{kPa}$	10	100	均匀分布
摩擦角均值 $\mu_\phi/(^\circ)$	15	30	均匀分布
黏聚力变异系数 $V_c$	0.1	0.3	均匀分布
摩擦角变异系数 $V_\phi$	0.1	0.3	均匀分布
黏聚力与摩擦角间相关系数 $\rho$	-0.8	0.0	均匀分布
水平荷载均值 $\mu_H/\text{kN}$	200	400	均匀分布
垂直荷载均值 $\mu_V/\text{kN}$	700	1000	均匀分布

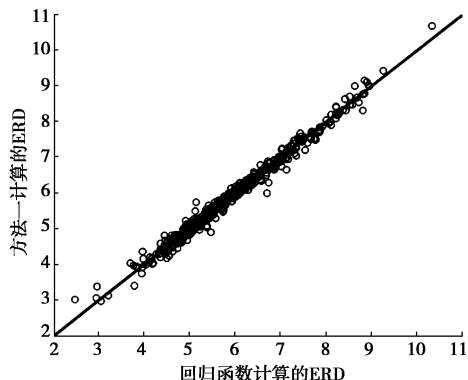


图 4 ERD 回归函数验证

Fig. 4 Verification for regression function of ERD

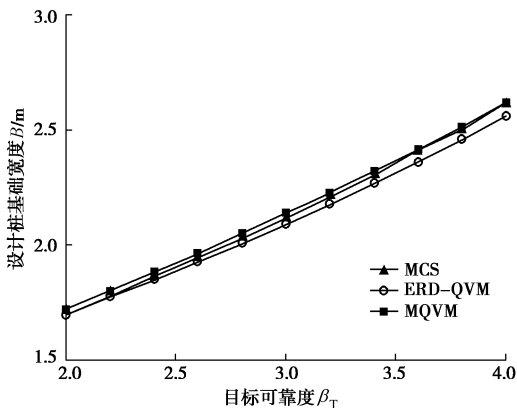
同样地, 随机抽取 1000 组设计参数来验证修正分位数法与 ERD-QVM 的设计稳健性。表 6 给出了对比结果。修正分位数法的实际可靠度指标最小值及均值均大于 ERD-QVM 的结果, 表明修正分位数法总体上更保守。两种方法实际可靠度指标变异系数基本相差

表 6 基于 1000 组随机设计参数的实际可靠度指标统计

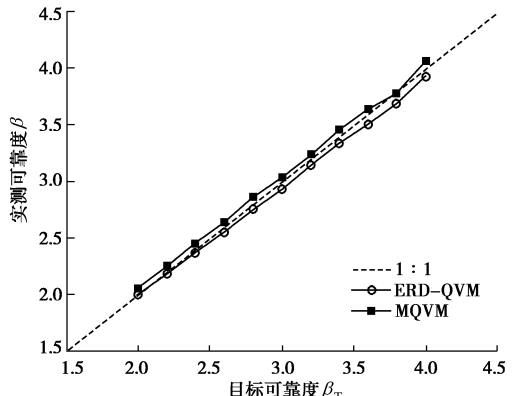
统计量	$\beta_T=2.0$		$\beta_T=2.5$		$\beta_T=3.0$		$\beta_T=3.5$	
	$\beta_{MQ}/\beta_T$	$\beta_{EQ}/\beta_T$	$\beta_{MQ}/\beta_T$	$\beta_{EQ}/\beta_T$	$\beta_{MQ}/\beta_T$	$\beta_{EQ}/\beta_T$	$\beta_{MQ}/\beta_T$	$\beta_{EQ}/\beta_T$
均值	1.04	1.01	1.04	1.01	1.03	1.01	1.02	1.01
变异系数	0.03	0.02	0.03	0.02	0.03	0.02	0.03	0.02
最大值	1.19	1.13	1.20	1.10	1.22	1.08	1.24	1.06
最小值	0.99	0.87	0.99	0.88	0.99	0.88	0.99	0.89

注:  $\beta_{MQ}$  为修正分位数法估计的基础宽度对应的实际可靠度指标;  $\beta_{EQ}$  为 ERD-QVM 估计的基础宽度对应的实际可靠度指标。

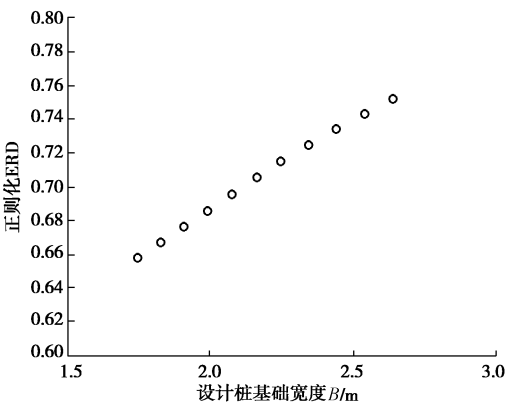
较小, 表明两种方法设计稳健性相似。ERD-QVM 的实际可靠度指标最小值可能低于目标可靠度, 表明 ERD-QVM 可能产生偏危险的设计。



(a) 设计桩直径



(b) 实际可靠度



(c) 正则化 ERD

图 5 不同目标可靠度下 ERD-QVM 和修正分位数法设计结果对比

Fig. 5 Comparison of results by ERD-QVM and MQVM under various values of  $\beta_T$

## 5 结 论

本文提出了基于修正分位数法的岩土工程简化可靠度设计方法。首先介绍了 ERD-QVM 和 QFOSM 的计算原理, 在此基础上提出了基于简单迭代算法的修正分位数法。以一个桩基础和一个方形基础为例阐明了所提方法的有效性。主要结论如下:

(1) 修正分位数法通过简单的迭代算法估计目标可靠度指标对应设计参数的设计值, 不仅能够有效地避免原始 ERD-QVM 需要建立设计参数与 ERD 间回归函数的问题, 而且能够得到合理的设计结果。

(2) 修正分位数法与 ERD-QVM 具有相似的设计稳健性。分析算例表明修正分位数法的设计结果总体上更保守, ERD-QVM 可能产生偏危险的设计。偏危险的设计对岩土结构物稳定性非常不利, 在实际工程中应尽量避免。

(3) 修正分位数法算法简单, 计算效率高, 能为工期紧迫条件下的岩土工程可靠度设计提供了一种有效分析工具。

## 参考文献:

- [1] LIU Y, HE L Q, JIANG Y J, et al. Effect of in-situ water content variation on the spatial variation of strength of deep cement-mixed clay[J]. *Géotechnique*, 2019, **69**(5): 391 - 405.
- [2] LIU Y, ZHANG W G, ZHANG L, et al. Probabilistic stability analyses of undrained slopes by 3D random fields and finite element methods[J]. *Geoscience Frontiers*, 2018, **9**(6): 1657 - 1664.
- [3] 邓志平, 牛景太, 潘敏, 等. 考虑地层变异性 and 土体参数空间变异性的边坡可靠度全概率设计方法[J]. *岩土工程学报*, 2019, **41**(6): 1083 - 1090. (DENG Zhi-ping, NIU Jing-tai, PAN Min, et al. Full probabilistic design method of slopes considering geological uncertainty and spatial variability of soil parameters[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2019, **41**(6): 1083 - 1090. (in Chinese))
- [4] 彭兴, 李典庆, 曹子君, 等. 基于蒙特卡洛模拟的岩质边坡可靠度设计方法[J]. *岩石力学与工程学报*, 2016, **35**(增刊 2): 3794 - 3804. (PENG Xing, LI Dian-qing, CAO Zi-jun, et al. Reliability-based design approach of rock slopes using Monte Carlo simulation[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2016, **35**(S2): 3794 - 3804. (in Chinese))
- [5] 陈祖煜, 黎康平, 李旭, 等. 重力式挡土墙抗滑稳定容许安全系数取值标准初探[J]. *岩土力学*, 2018, **39**(1): 1 - 10. (CHEN Zu-yu, LI Kang-ping, LI Xu, et al. A preliminary study of allowable factor of safety in gravity retaining wall stability analysis[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2018, **39**(1): 1 - 10. (in Chinese))
- [6] 李典庆, 周强, 曹子君. 基于广义可靠指标相对安全率的岩土工程设计安全判据[J]. *岩土力学*, 2019, **40**(10): 1 - 11. (LI Dian-qing, ZHOU Qiang, CAO Zi-jun. Safety criteria for geotechnical design based on the generalized reliability ratio of safety margin[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2019, **40**(10): 1 - 11. (in Chinese))
- [7] BASHA B M, BABU G S. Target reliability-based optimization for internal seismic stability of reinforced soil structures[J]. *Géotechnique*, 2012, **62**(1): 55 - 68.
- [8] GAO G H, LI D Q, CAO Z J, et al. Full probabilistic design of earth retaining structures using generalized subset simulation[J]. *Computers and Geotechnics*, 2019, **112**: 159 - 172.
- [9] FENTON G A, NAGHIBI F, DUNDAS D, et al. Reliability-based geotechnical design in 2014 Canadian highway bridge design code[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2015, **53**(2): 236 - 251.
- [10] KIM D, SALGADO R. Load and resistance factors for external stability checks of mechanically stabilized earth walls[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2011, **138**(3): 241 - 251.
- [11] PHOON K K, KULHAWY F H, GRIGORIU M D. Multiple resistance factor design for shallow transmission line structure foundations[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2003, **129**(9): 807 - 818.
- [12] Canadian Standards Association. Canadian Highway Bridge Design Code: CAN/CSA-S6-14[S]. Mississauga, Ont, 2014.
- [13] CEN (European Committee for Standardization). EN 1997-1 Eurocode 7: Geotechnical design - Part 1: General rules[S]. Brussels, 2004.
- [14] GOH A T C, PHOON K K, KULHAWY F H. Reliability analysis of partial safety factor design method for cantilever retaining walls in granular soils[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2009, **135**(5): 616 - 622.
- [15] CHING J, PHOON K K, YU J W. Linking site investigation efforts to final design savings with simplified reliability-based design methods[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2013, **140**(3): 04013032.
- [16] BASHA B M, BABU G S. Target reliability-based optimisation for internal seismic stability of reinforced soil



- structures[J]. *Géotechnique*, 2012, **62**(1): 55 – 68.
- [17] XIAO T, LI D Q, CAO Z J, et al. Full probabilistic design of slopes in spatially variable soils using simplified reliability analysis method[J]. *Georisk: Assessment and Management of Risk for Engineered Systems and Geohazards*, 2017, **11**(1): 146 – 159.
- [18] WANG Y, CAO Z. Expanded reliability-based design of piles in spatially variable soil using efficient Monte Carlo simulations[J]. *Soils and Foundations*, 2013, **53**(6): 820 – 834.
- [19] 杨智勇, 李典庆, 曹子君, 等. 基于广义子集模拟样本加权法的边坡多失效模式可靠度分析[J]. *岩石力学与工程学报*, 2018, **37**(3): 630 – 641. (YANG Zhi-yong, LI Dian-qing, CAO Zi-jun, et al. Efficient analysis of slope reliability with multiple failure modes using sample weighting method in generalized subset simulation[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2018, **37**(3): 630 – 641. (in Chinese))
- [20] ZHANG Y, DER KIUREGHIAN A. Two improved algorithms for reliability analysis[C]// *Reliability and Optimization of Structural Systems*, 1995, Boston, MA.
- [21] JI J, ZHANG C, GAO Y, et al. Reliability-based design for geotechnical engineering: an inverse form approach for practice[J]. *Computers and Geotechnics*, 2019, **111**: 22 – 29.
- [22] YANG Z Y, CHING, J. A novel simplified geotechnical reliability analysis method[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, **74**: 337 – 349.
- [23] CHING J, PHOON K K. A quantile-based approach for calibrating reliability-based partial factors[J]. *Structural Safety*, 2011, **33**(4/5): 275 – 285.
- [24] CHING J, PHOON K K, YANG J J. Role of redundancy in simplified geotechnical reliability-based design-A quantile value method perspective[J]. *Structural Safety*, 2015, **55**: 37 – 48.
- [25] LOW B. K. Probabilistic insights on a soil slope in San Francisco and a rock slope in Hong Kong[J]. *Georisk: Assessment and Management of Risk for Engineered Systems and Geohazards*, 2019, **13**(4): 326 – 332.
- 

## 本期广告索引

- 封 2 北京筑信达工程咨询有限公司  
封 3 北京理正软件股份有限公司  
封 4 南瑞集团水利水电技术分公司