

DOI: 10.11779/CJGE202005001

# 基于 Copula 函数的堆石料非线性强度参数相关性及分布模型研究

孔宪京<sup>1, 2</sup>, 宋来福<sup>1</sup>, 徐斌<sup>\*1, 2</sup>, 邹德高<sup>1, 2</sup>

(1. 大连理工大学水利工程学院, 辽宁 大连 116024; 2. 大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

**摘要:** 堆石料非线性强度参数的不确定性及相关性是影响土石坝坝坡稳定可靠度分析结果的关键因素, 但传统的正态分布模型无法准确地表征非线性强度参数的相关非正态分布特征。汇总了国内外 124 座土石坝工程的 1257 组筑坝堆石料非线性强度参数, 基于 Copula 函数提出了堆石料非线性强度参数联合分布模型的构建方法。分别采用最小二乘法和 BIC 准则确定堆石料非线性强度参数的相关系数、最优边缘分布函数与最优 Copula 函数。结果表明: 非线性强度参数间存在显著的正相关性; 堆石料非线性强度参数的边缘分布和相关系数相同时, 不同的 Copula 函数构造的联合分布函数差异显著; 对于条件累积分布函数, 当非线性强度参数取值减小时, 基于不同 Copula 函数构造的非线性强度参数的条件累积分布函数差异越显著; 与二维正态分布模型相比, 基于 Copula 函数建立的非线性强度参数非线性强度参数联合分布模型灵活性强、适用范围广, 能更准确地表征原始数据的分布情况, 可为土石坝坝坡静、动力稳定可靠度分析提供简单、有效的分布模型。

**关键词:** 非线性强度参数; Copula 函数; 相关性; 联合概率分布模型; 边缘分布

**中图分类号:** TU43      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-4548(2020)05-0797-11

**作者简介:** 孔宪京(1952—), 男, 江苏南京人, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事岩土地震工程和高土石坝抗震研究。E-mail: kongxj@dlut.edu.cn。

## Correlation and distribution model for nonlinear strength parameters of rockfill based on Copula function

KONG Xian-jing<sup>1, 2</sup>, SONG Lai-fu<sup>1</sup>, XU Bin<sup>1, 2</sup>, ZOU De-gao<sup>1, 2</sup>

(1. School of Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China; 2. The State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

**Abstract:** The uncertainty and correlation of nonlinear strength parameters of rockfill are the key factors affecting the stability reliability analysis results of rockfill dam slopes. However, the conventional normal distribution model cannot accurately characterize the correlation and non-normal distribution characteristics of nonlinear strength parameters. In this study, the nonlinear strength parameters of rockfill for 1257 groups of 124 rockfill dam projects around the world are summarized. Based on the Copula function, the construction method of joint distribution model for nonlinear strength parameters of rockfill is proposed. The correlation coefficient, optimal marginal distribution function and optimal Copula function for nonlinear strength parameters of rockfill are determined by the least square method and BIC criterion respectively. The results show that there is a significant positive correlation between the nonlinear strength parameters. The joint distribution functions constructed by different Copula functions are significantly different despite the same marginal distribution and correlation coefficient of the nonlinear strength parameters. For the conditional cumulative distribution function, with the decrease of the nonlinear strength parameter constructed based on different Copula functions. Compared with the two-dimensional normal distribution model, the nonlinear strength parameter joint distribution model based on the Copula function is flexible and applicable in a wide range, which can more accurately represent the distribution of the original data and provide a simple and effective distribution model for the static and dynamic stability reliability analysis of rockfill dam slopes.

**基金项目:** 国家重点研发计划(2017YFC0404900); 国家自然科学基金项目(51979026, 51779034); 全国博士后创新人才支持计划(BX20190057)

**收稿日期:** 2019-08-17

\*通信作者(E-mail: xubin@dlut.edu.cn)

**Key words:** nonlinear strength parameter; Copula function; correlation; joint probability distribution model; marginal distribution

## 0 引言

坝坡稳定对于土石坝工程的安全有着至关重要的影响。粗粒料作为主要的筑坝材料, 其抗剪强度是影响坝坡稳定的关键因素。粗粒料为无黏性土, 只有摩擦阻力, 无黏聚力, 其强度主要由剪胀性、颗粒破碎和颗粒的重新定向与排列所控制。大量试验表明<sup>[1-7]</sup>: 对于粗粒料, 尤其是堆石料, 在不高的围压时, 颗粒会发生破碎现象, 颗粒破碎引起颗粒间应力重新分布, 颗粒间连结力变弱, 颗粒易移动, 从而引起内摩擦角降低, 直接表现为强度包络线后段向下弯曲。同时, 研究指出<sup>[8-10]</sup>: 对于土石坝尤其是高土石坝工程, 传统土石坝稳定分析采用的莫尔–库伦理论 ( $\tau_f = c + \sigma_n \tan \varphi$ ) 将堆石料作为粗粒土, 黏聚力为 0, 线性强度计算的滑弧很浅, 属于表层滑动; 而非线性强度参数  $\varphi$  随应力变化, 滑动破坏面向深度、应力较大的位置发展, 属于深层滑动。土石坝在高应力下, 抗剪强度呈显著地非线性变化, 线性强度参数与实际工程不符, 计算结果会存在误差; 非线性强度参数更为合理, 计算的结果比较符合实际情况。现有资料指出<sup>[11-16]</sup>: 筑坝堆石料受自身性质及荷载的影响, 其强度参数为敏感的随机变量; 同时, 表征筑坝堆石料的非线性强度参数具有相关非正态分布特性。可靠度分析方法可以很好地解决非线性强度参数的不确定性与相关性对土石坝坝坡稳定的影响。在进行土石坝坝坡稳定可靠度分析时, 需要构造非线性强度参数的联合分布函数, 而相关非正态非线性强度参数联合分布函数的构造需要大量现场试验或室内试验数据, 但受实际工程经济、技术等因素的限制, 试验数据有限, 样本数量无法达到统计要求, 仅可通过上述试验数据获取非线性强度参数的边缘分布函数与相关系数, 无法准确地表征非线性强度参数的统计特征和分布模型。为了便于计算, 目前, 大部分研究忽略了非线性强度参数的相关性, 仅有的考虑相关性的研究也采用的是二维正态分布<sup>[14]</sup>建立非线性强度参数二维分布模型, 其不足之处在于二维正态分布要求非线性强度参数的边缘分布也为正态分布。因此, 非常需要收集土石坝工程的相关资料, 系统的整理土石坝筑坝材料非线性强度参数的试验数据, 用以准确地表征非线性强度参数的统计特征和分布模型, 建立合理地非线性强度参数的联合分布模型, 对土石坝坝坡稳定可靠度分析具有重要意义。

由概率理论可知, 通过已知变量的联合分布函数可以确定变量的边缘分布函数与相关系数, 但已知变

量的边缘分布函数与相关系数确定其变量的联合分布函数是非常困难的。Copula 理论的发展为建立非线性强度参数联合分布模型提供了简单、有效的方法。Copula 函数<sup>[17]</sup>可以根据  $N$  个边缘分布函数和相关结构精确地建立  $N$  维联合分布函数模型, 并在金融<sup>[18-19]</sup>和水文<sup>[20-21]</sup>等领域得到广泛应用。近年来, 岩土工程领域逐步引入 Copula 函数分析参数的相关性, 唐小松等<sup>[22-23]</sup>建立了土体黏聚力与内摩擦角的二维 Copula 函数模型, 并讨论了其对边坡可靠度的影响。唐小松等<sup>[24]</sup>及 Uzielli 等<sup>[25]</sup>建立了基桩荷载与位移的双曲线参数 Copula 函数模型。Li 等<sup>[26]</sup>详细分析了基桩正常使用极限状态下, 不同 Copula 函数对其可靠度的影响。张蕾等<sup>[27]</sup>收集了小浪底水利枢纽工程中土体抗剪强度参数试验数据, 采用基于 Copula 函数建立了抗剪强度参数联合分布模型。邢婕等<sup>[28]</sup>基于 Copula 函数结合 1174 组岩基抗剪强度试验数据, 建立了抗剪强度参数联合分布模型。目前, 并未见到关于筑坝堆石料非线性强度参数联合分布模型的研究, 从而, 无法准确地评估非线性强度参数对土石坝坝坡静、动力稳定可靠度的影响。因此, 有必要对筑坝堆石料非线性强度参数联合分布模型进行研究, 为土石坝坝坡静、动力可靠度分析提供可靠的模型、数据支持。

综上所述, 本文系统地统计了多个土石坝工程堆石料非线性强度参数的试验数据, 并基于最小二乘法得到相关系数; 通过 BIC 准则对筑坝堆石料非线性强度参数的最优边缘分布及 Copula 函数进行识别; 选择 7 种能够描述筑坝堆石料非线性强度参数正相关的 Copula 函数, 建立筑坝堆石料非线性强度参数联合分布模型, 并进行了分析对比。最后, 与二维正态分布模型进行比较, 讨论了基于 Copula 函数建立堆石料非线性强度参数联合分布模型的优越性。

## 1 筑坝堆石料非线性强度参数的边缘分布函数模型

本文系统地汇总了国内外 124 座土石坝工程的 1257 组筑坝堆石料非线性强度参数数据, 数据来源广、代表性强(图 1)。根据材料类别将 1257 组数据分为堆石料、垫层料、过渡层料、排水体料、砂砾料、心墙料。由于试样及试验误差等因素的影响, 统计的数据中可能存在异常点数据, 所以本文选用工程上应用广泛的  $3\sigma$  法则对统计数据中的异常点进行剔除。对剔除异常点后的统计数据进行分析, 得到非线性强

度参数的统计特征和边缘分布模型。

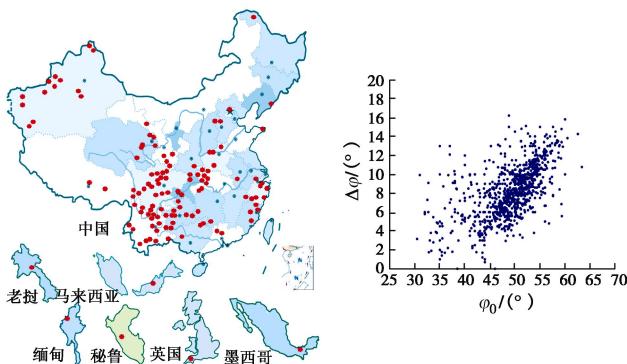


图 1 124 座土石坝工程及 1257 组非线性强度参数

Fig. 1 124 rockfill dams and 1257 groups of nonlinear strength parameters

由非线性强度参数的定义可知,  $\varphi_0$ ,  $\Delta\varphi$  的取值均为正值, 工程中常用的正态分布、极值 I 型分布函数描述的变量取值区间为  $[-\infty, \infty]$ , 在表征非线性强度参数概率分布函数时可能出现负值, 而截尾分布能准确地表征变量的分布特性。因此, 本文选择截尾正态分布、对数正态分布、截尾极值 I 型分布、威布尔型分布、伽马分布 5 种边缘分布函数对非线性强度参数的最优边缘分布函数进行识别。表 1 列出了上述 5 种边缘分布类型的概率密度函数与累积分布函数,  $\mu$  为均值,  $\sigma$  为标准差。

表 1 5 种备选边缘分布函数  
Table 1 Five marginal distribution functions

分布类型	概率密度函数	概率分布函数	备注
截尾正态分布	$\varphi\left(\frac{x-p}{q}\right)/\left[1-\Phi\left(\frac{0-p}{q}\right)\right]$	$\left[\Phi\left(\frac{x-p}{q}\right)-\Phi\left(\frac{0-p}{q}\right)\right]/\left[1-\Phi\left(\frac{0-p}{q}\right)\right]$	$p = \mu$ $q = \sigma$
对数正态分布	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}qx}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\ln x - p\right)^2\right]$	$\Phi\left(\frac{\ln x - p}{q}\right)$	$p = \ln\frac{\mu}{\sqrt{1+\sigma^2/\mu^2}}$ $q = \sqrt{\ln\left(1+\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)}$
截尾极值 I 型分布	$\frac{q\exp\{-q(x-p)-\exp[-q(x-p)]\}}{1-\exp[-\exp(pq)]}$	$\frac{\exp\{-\exp[-q(x-p)]\}-\exp[-\exp(pq)]}{1-\exp[-\exp(pq)]}$	$\mu = p + \frac{0.5772}{q}$ $\sigma^2 = \frac{\pi^2}{6q^2}$
威布尔型分布	$\frac{q}{p}\left(\frac{x}{p}\right)^{q-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{p}\right)^q\right]$	$1-\exp\left[-\left(\frac{x}{p}\right)^q\right]$	$\mu = p\Gamma\left(1+\frac{1}{q}\right)$ $\sigma^2 = p^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{q}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{q}\right)\right]$
伽马分布	$\frac{p^qx^{q-1}}{\Gamma(q)}e^{-px}$	$\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{px} t^{q-1}e^{-t}dt$	$\mu = \frac{q}{p}$ $\sigma^2 = \frac{q}{p^2}$

非线性强度参数最优边缘分布函数采用 AIC 准则或 BIC 准则进行识别确定。AIC 准则<sup>[29]</sup>和 BIC 准则<sup>[30]</sup>工程应用广泛、计算简便, 数据拟合效果准确、可靠。具体表达式为

$$AIC = -2 \sum_{i=1}^N \ln f(x_i; p, q) + 2k_1 \quad , \quad (1)$$

$$BIC = -2 \sum_{i=1}^N \ln f(x_i; p, q) + 2k_1 \ln N \quad . \quad (2)$$

式中  $x_i (i=1, 2, \dots, N)$  为非线性强度参数的试验数据;  $N$  为样本数目;  $f(x_i; p, q)$  为备选边缘分布函数的概率密度函数,  $p, q$  为分布参数;  $k_1$  为备选边缘分布函数的分布参数数量。

当备选的边缘分布函数参数数量相同, 基于 AIC 准则与 BIC 准则进行最优边缘分布函数的识别结果是相同的, 本文采用 BIC 准则对非线性强度参数的最优边缘分布函数进行识别, 计算结果中最小 BIC 值对应的边缘分布函数类型即为最优边缘分布类型。

表 2 列出了 6 种不同类别筑坝堆石料非线性强度参数的最优边缘分布类型识别结果。由表 2 可知, 不同类别材料的非线性强度参数具有不同的最优边缘分布函数模型。5 种备选的边缘分布函数类型比较全面的涵盖了筑坝堆石料非线性强度参数的最优边缘分布类型。

表 2 非线性强度参数最优边缘分布函数 BIC 识别结果

Table 2 BIC identification results of optimum marginal distributions of nonlinear strength parameters

筑坝材料	样本数	参数	均值 / (°)	标准差 / (°)	BIC 值				最优边缘分布概率型	
堆石料	755	$\varphi_0$	49.61	4.73	4500.9	4561.70	5236.50	4486.9	4537.60	威布尔分布
		$\Delta\varphi$	8.58	2.53	3554.2	3724.30	3787.20	3562.5	3959.50	截尾正态分布
垫层料	122	$\varphi_0$	51.27	4.63	728.94	749.54	1129.90	710.83	741.45	威布尔分布
		$\Delta\varphi$	8.60	2.84	608.96	599.29	600.37	607.55	646.20	对数正态分布
过渡层料	175	$\varphi_0$	50.97	3.61	955.64	958.31	1020.40	971.19	956.32	截尾正态分布
		$\Delta\varphi$	8.28	2.53	831.13	839.50	848.41	829.64	861.91	威布尔分布
排水体	71	$\varphi_0$	46.76	5.18	442.47	452.86	534.27	430.42	448.83	威布尔分布
		$\Delta\varphi$	7.50	2.45	335.94	340.00	342.56	334.04	387.07	威布尔分布
砂砾料	116	$\varphi_0$	46.64	5.52	984.94	1003.90	1177.50	982.97	995.95	威布尔分布
		$\Delta\varphi$	7.00	2.61	750.44	756.81	752.39	747.53	860.11	威布尔分布
心墙料	18	$\varphi_0$	38.19	13.37	149.13	252.89	173.81	156.60	179.87	截尾正态分布
		$\Delta\varphi$	10.30	6.12	119.37	112.40	114.77	116.30	134.88	对数正态分布

为了更好的验证 BIC 法则识别最优边缘分布函数的准确性, 图 2~4 展示了堆石料、砂砾料、过渡层料 5 种备选边缘分布的概率密度函数曲线与非线性强度参数直方图。由图可以看出, 基于 BIC 法则识别的最优边缘分布类型能较准确地拟合非线性强度参数分布特征。

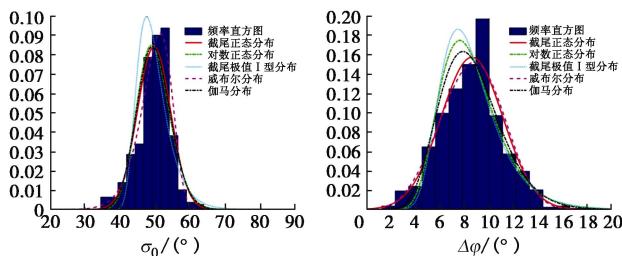


图 2 堆石料非线性强度参数直方图

Fig. 2 Histograms of nonlinear strength parameters of main rockfill

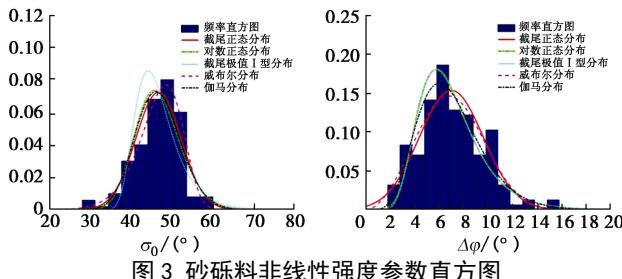


图 3 砂砾料非线性强度参数直方图

Fig. 3 Histograms of nonlinear strength parameters of gravel

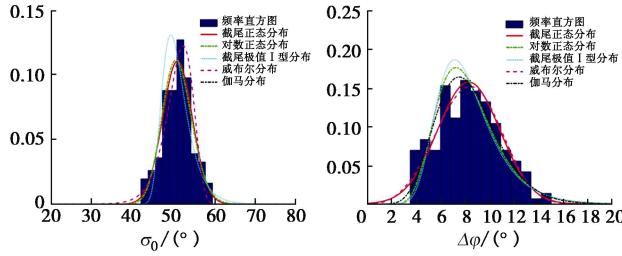


图 4 过渡层料非线性强度参数直方图

Fig. 4 Histograms of nonlinear strength parameters of transition layer

## 2 基于 Copula 函数的筑坝堆石料非线性强度参数二维分布模型

### 2.1 筑坝堆石料非线性强度参数的相关系数

由 Duncan 等<sup>[31]</sup>建立双曲线应力 - 应变模型时, 用对数关系描述强度参数的非线性, 提出的非线性强度参数的指数模式为

$$\varphi = \varphi_0 - \Delta\varphi \lg(\sigma_3/p_a) , \quad (3)$$

式中,  $\varphi$  为土体滑动面摩擦角,  $\varphi_0$  为一个大气压下的摩擦角,  $\Delta\varphi$  为  $\sigma_3$  增加一个对数周期下  $\varphi$  的减小值,  $p_a$  为大气压力。

采用线性回归方程对非线性强度参数试验结果进行整理:

$$\varphi_i = \varphi_0 - \Delta\varphi \lg(\sigma_{3i}/p_a) + \varepsilon_i \quad (i=1, 2, \dots, n) , \quad (4)$$

式中,  $n$  为来自样本的试样数目,  $\varphi_i$ ,  $\sigma_{3i}$ ,  $\varepsilon_i$  分别为第  $i$  试样对应于某一强度特征摩擦角、正应力及随机扰动量。通过最小二乘法原理, 采用下述公式可计算相关的统计量。

$\varphi$  与  $\lg(\sigma_3/p_a)$  的相关系数  $\gamma_{\varphi, \lg(\sigma_3/p_a)}$ :

$$\gamma_{\varphi, \lg(\sigma_3/p_a)} = \frac{n \sum \varphi_i (-\lg(\sigma_{3i}/p_a)) - \sum \varphi_i \sum (\lg(\sigma_{3i}/p_a))}{\sqrt{[n \sum \varphi_i^2 - (\sum \varphi_i)^2] [n \sum (-\lg(\sigma_{3i}/p_a))^2 - (\sum -\lg(\sigma_{3i}/p_a))^2]} } . \quad (5)$$

回归方程的标准差  $\sigma$ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (\varphi_i + \Delta\varphi \lg(\sigma_{3i}/p_a) - \varphi_0)^2}{n-2}} . \quad (6)$$

令  $\Delta = n \sum (-\lg(\sigma_{3i}/p_a) - (-\lg(\sigma_{3i}/p_a)))^2$ , 则  $\varphi_0$  与  $\Delta\varphi$  的均值分别为

$$\varphi_0 = (\sum \varphi_i \sum (-\lg(\sigma_{3i}/p_a)))^2 -$$

$$\Delta\varphi = (n \sum \varphi_i (-\lg(\sigma_{3i}/p_a)) - \sum \varphi_i \sum (-\lg(\sigma_{3i}/p_a))/\Delta$$

$\varphi_0, \Delta\varphi$  的标准差分别为

$$\sigma_{\varphi_0} = \sigma \sqrt{\left( \sum (-\lg(\sigma_{3i}/p_a))^2 \right) / \Delta}, \quad (7)$$

$$\sigma_{\Delta\varphi} = \sigma \sqrt{(n/\Delta)}. \quad (8)$$

$\varphi_0$  与  $\Delta\varphi$  的协方差为

$$\text{Cov}(\varphi_0, \Delta\varphi) = \sum -\lg(\sigma_{3i}/p_a) \left( \frac{\sigma^2}{\Delta} \right). \quad (9)$$

$\varphi_0$  与  $\Delta\varphi$  的相关系数为

$$\rho_{\varphi_0, \Delta\varphi} = \frac{\text{Cov}(\varphi_0, \Delta\varphi)}{\sigma_{\varphi_0} \sigma_{\Delta\varphi}}. \quad (10)$$

不同类别材料非线性强度参数的相关系数计算结果如表 3 所示。基于最小二乘法计算的相关系数  $\rho_{\varphi_0, \Delta\varphi}$  与 Pearson 线性相关系数相同。由表 3 可知, 非线性强度参数具有显著的统计正相关性, 相关系数的变化区间为[0.40, 0.69]。

表 3 非线性强度参数的相关系数

Table 3 Correlation coefficients of nonlinear strength parameters

筑坝材料	样本数量	相关系数
堆石料	755	0.53
垫层料	122	0.40
过渡层料	175	0.69
排水体	71	0.58
砂砾料	116	0.44
心墙料	18	0.62

## 2.2 基于 Copula 函数的筑坝堆石料非线性强度参数联合分布函数构造方法

基于二元分布 Sklar 定理<sup>[17]</sup>: 联合分布函数由变量的边缘分布函数及表征变量间的 Copula 函数两部分构成。对应的非线性强度参数  $\varphi_0, \Delta\varphi$  的联合分布函数为  $F(\varphi_0, \Delta\varphi)$ :

$F(\varphi_0, \Delta\varphi) = C[F_1(\varphi_0), F_2(\Delta\varphi); \theta] = C(u_1, u_2; \theta), \quad (11)$

式中,  $u_1 = F_1(\varphi_0)$ ,  $u_2 = F_2(\Delta\varphi)$  为非线性强度参数的边缘分布函数,  $\theta$  为 Copula 函数的参数。

非线性强度参数的联合概率密度函数为

$f(\varphi_0, \Delta\varphi) = f_1(\varphi_0) f_2(\Delta\varphi) D[F_1(\varphi_0), F_2(\Delta\varphi); \theta], \quad (12)$

式中,  $f_1(\varphi_0)$ ,  $f_2(\Delta\varphi)$  为非线性强度参数的边缘概率密度函数,  $D[F_1(\varphi_0), F_2(\Delta\varphi); \theta]$  为 Copula 函数的密度函数。

由式 (11), (12) 可知, 当已知 Copula 函数、非线性强度参数的边缘分布函数、概率密度函数及 Copula 函数的参数, 便可求出非线性强度参数的联合分布函数和联合概率密度函数。

参数的相关性包含相关系数与相关结构类型两个

方面。相关系数多采用 Pearson 线性相关系数和 Kendall 秩相关系数。Pearson 线性相关系数是衡量参数间线性相关强弱程度的指标。Kendall 秩相关系数是基于参数原始数据的秩, 描述参数间的相关性。相关结构类型, 则依据不同的 Copula 函数对参数间的相关结构类型进行描述。Copula 理论<sup>[32-33]</sup>中有多种 Copula 函数描述非线性强度参数的相关结构, 由表 3 可知, 筑坝堆石料非线性强度参数存在显著的统计正相关性, 因此, 本文选择可以描述堆石料非线性强度参数正相关性的 Gaussian, t, Plackett, Frank, Clayton, Gumbel, CClayton 7 种 Copula 函数对非线性强度参数的相关结构进行描述, 7 种 Copula 函数概率密度函数、分布函数、参数及生成元如表 4 所示。

由表 4 可知, 确定 Copula 函数的关键在于参数  $\theta$ 。基于 Pearson 线性相关系数和 Kendall 秩相关系数可求得参数  $\theta$ <sup>[32]</sup>。根据相关系数的定义, Copula 函数的参数  $\theta$  与 Pearson 线性相关系数  $\rho$  的关系<sup>[32]</sup>:

$$\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) f_1(x_1) f_2(x_2) D(F_1(x_1), F_2(x_2); \theta) dx_1 dx_2.$$

由此, 可求得 Copula 函数的参数  $\theta$ 。但除 Gaussian Copula 函数外, 大部分 Copula 函数进行积分求解比较困难。根据文献[28, 33]的方法, 先通过 Pearson 线性相关系数得到 Gaussian Copula 函数的参数  $\theta$ ,

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\varphi_0 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left( \frac{\Delta\varphi - \mu_2}{\sigma_2} \right) \frac{f_1(\varphi_0) f_2(\Delta\varphi)}{\sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left\{ -\frac{\zeta_1^2 \theta^2 - 2\theta \zeta_1 \zeta_2 + \zeta_2^2 \theta^2}{2(1 - \theta^2)} \right\} d\varphi_0 d\Delta\varphi,$$

式中,  $\zeta_1 = \Phi^{-1}(u_1)$ ,  $\zeta_2 = \Phi^{-1}(u_2)$  分别为标准正态分布的变量。

在求得 Gaussian Copula 函数的参数  $\theta$  后, 由下式得到 Kendall 秩相关系数  $\tau$ :

$$\tau = \frac{2 \arcsin(\theta)}{\pi}. \quad (13)$$

最后利用下式得到不同 Copula 函数的相关参数  $\theta$  为

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2; \theta) dC(u_1, u_2; \theta) - 1. \quad (14)$$

筑坝堆石料非线性强度参数的 7 种 Copula 函数相关参数  $\theta$  的计算结果如表 5 所示。

与最优边缘分布函数的识别相同, 采用 BIC 准则进行非线性强度参数最优 Copula 函数的识别, 结果如表 6 所示。

表 4 7 种二维 Copula 函数  
Table 4 Seven types of bivariate Copula functions

Copula 类型	Copula 分布函数 $C(u_1, u_2; \theta)$	Copula 密度函数 $D(u_1, u_2; \theta)$	生成元 $\phi_\theta(t, \theta)$	$\theta$ 取值 范围
Gaussian	$\Phi_\theta(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2); \theta)$	$\frac{\varphi_2(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2); \theta)}{\varphi(\Phi^{-1}(u_1))\varphi(\Phi^{-1}(u_2))}$	—	$[-1, 1]$
t	$T_2(T_v^{-1}(u_1), T_v^{-1}(u_2); \theta, v)$	$\frac{t_2(T_v^{-1}(u_1), T_v^{-1}(u_2); \theta, v)}{t_v(T_v^{-1}(u_1))t_v(T_v^{-1}(u_2))}$	—	$[-1, 1]$
Plackett	$\frac{S - \sqrt{S^2 - 4u_1u_2\theta(\theta-1)}}{2(\theta-1)}; S = 1 + (\theta-1)(u_1 + u_2)$	$\frac{\theta[1 + (\theta-1)(u_1 + u_2 - 2u_1u_2)]}{\{[1 + (\theta-1)(u_1 + u_2)]^2 - 4u_1u_2\theta(\theta-1)\}^{3/2}}$	—	$(0, 1) \cup (1, \infty)$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln \left[ 1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right]$	$\frac{-\theta(e^{-\theta} - 1)e^{-\theta(u_1 + u_2)}}{\left[ (e^{-\theta} - 1) + (e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1) \right]^2}$	$-\ln \left[ \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right]$	$(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$
Clayton	$(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$	$(1 + \theta)(u_1u_2)^{-\theta-1}(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-2-1/\theta}$	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$(0, \infty)$
Gumbel	$\exp \left\{ - \left[ (-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta \right]^{1/\theta} \right\}$ $S = (-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta$	$\frac{\exp(-S^{1/\theta})(\ln u_1 \ln u_2)^{\theta-1}(S^{1/\theta} + \theta + 1)}{u_1u_2 S^{2-1/\theta}}$	$(-\ln t)^\theta$	$[1, \infty)$
CClayton	$u_1 + u_2 - 1 + (W_1^{-\theta} + W_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}; W_i^{-\theta} = 1 - u_i$ $(1 + \theta)(W_1W_2)^{-\theta-1}(W_1^{-\theta} + W_2^{-\theta} - 1)^{-2-1/\theta}; W_i = 1 - u_i$	$(1 + \theta)(W_1W_2)^{-\theta-1}(W_1^{-\theta} + W_2^{-\theta} - 1)^{-2-1/\theta}; W_i = 1 - u_i$	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$(0, \infty)$

表 5 7 种 Copula 函数相关参数的计算结果

Table 5 Calculated results of seven Copula functions-related parameters

筑坝材料	Pearson 相关系数	Kendall 秩相关系数	Copula 函数的相关参数 $\theta / (^{\circ})$						
			Gaussian	t	Plackett	Frank	Clayton	Gumbel	CClayton
堆石料	0.53	0.464	0.666	0.671	9.290	5.122	1.729	1.864	1.729
垫层料	0.40	0.483	0.688	0.674	10.327	5.429	1.865	1.933	1.865
过渡层料	0.69	0.535	0.745	0.694	14.016	6.412	2.301	2.151	2.301
排水体	0.58	0.553	0.763	0.759	15.601	6.785	2.470	2.235	2.470
砂砾料	0.44	0.361	0.539	0.526	4.563	3.643	1.129	1.564	1.129
心墙料	0.62	0.367	0.545	0.543	5.563	3.719	1.158	1.579	1.158

表 6 最优 Copula 函数 BIC 识别结果

Table 6 BIC identification results of optimal Copula function

筑坝 材料	样 本 数	BIC 值							最优 Copula 分 布类型
		Gaussian	t	Plackett	Frank	Clayton	Gumbel	CClayton	
堆石料	755	-352.6264	-451.9866	-454.8823	-408.8209	-128.3470	-450.4442	-159.1417	Plackett Copula
垫层料	122	-27.8783	-83.2028	-73.5803	-60.6128	-33.6484	-53.7612	-23.3459	t Copula
过渡层 料	175	-89.5941	-101.5961	-105.0397	-106.9065	16.0698	-109.5186	-53.641	Gumbel Copula
排水体	71	-28.3144	-53.3555	-54.5268	-52.9589	-9.6404	-47.8997	-23.4537	Plackett Copula
砂砾料	116	-40.7910	-45.6383	-45.0424	-40.8147	-13.5451	-49.4995	-0.9096	Gumbel Copula
心墙料	18	-2.8971	-6.4936	-2.7262	-1.7570	-1.5556	-4.3240	2.1961	t Copula

结果表明：堆石料、排水体的最优 Copula 函数是 Plackett Copula 函数，垫层料及心墙料的最优 Copula 函数是 t Copula 函数，过渡层料、砂砾料的最优 Copula 函数是 Gumbel Copula 函数。因此，在实际工程中不同分区材料应选择能够表征非线性强度参数的最优 Copula 函数建立联合分布函数模型。

### 3 基于不同 Copula 函数构造的堆石料非线性强度参数联合分布函数的比较

由条件概率分布的定义和式(12)可知，已知非线性强度参数  $\Delta\varphi$  条件下  $\varphi_0$  的条件累积分布函数  $F(\varphi_0 | \Delta\varphi_2 \leq \Delta\varphi \leq \Delta\varphi_1)$  为

表 7 不同 Copula 函数计算的非线性强度参数指标  $\varphi_0$  的条件累积分布函数分位数值Table 7 Comparison of fractiles of conditional cumulative distribution functions of  $\varphi_0$  associated with various Copula functions

Copula 函数类型	$\mu - 2\sigma \leq \Delta\varphi \leq \mu - 1.5\sigma$			$\mu - 1.0\sigma \leq \Delta\varphi \leq \mu - 0.5\sigma$			$\mu - 0.25\sigma \leq \Delta\varphi \leq \mu + 0.25\sigma$		
	25%	50%	75%	25%	50%	75%	25%	50%	75%
Gaussian	37.777	41.471	44.768	41.609	45.015	47.957	43.889	47.136	49.884
t	35.844	39.195	43.347	41.234	44.518	47.779	43.969	47.110	49.853
Plackett	40.183	43.534	46.944	42.029	45.097	48.013	44.037	47.034	49.608
Frank	41.481	44.552	47.284	42.449	45.470	48.100	43.993	47.008	49.552
Clayton	34.671	37.075	39.326	40.395	43.239	45.951	43.523	46.652	49.575
Gumbel	39.917	43.694	47.069	42.449	45.813	48.713	44.197	47.367	49.998
CClayton	43.358	46.439	49.016	43.749	46.810	49.341	44.515	47.558	50.147

$F(\varphi_0 | \Delta\varphi_2 \leq \Delta\varphi \leq \Delta\varphi_1)$

$$= \frac{C(F_1(\varphi_0), F_2(\Delta\varphi_1); \theta) - C(F_1(\varphi_0), F_2(\Delta\varphi_2); \theta)}{F_2(\Delta\varphi_1) - F_2(\Delta\varphi_2)}, \quad (15)$$

式中,  $\Delta\varphi_1$ ,  $\Delta\varphi_2$  为  $\Delta\varphi$  的上、下限。同理, 已知非线性强度参数  $\varphi_0$  条件下  $\Delta\varphi$  的条件累积分布函  $F(\Delta\varphi | \varphi_{02} \leq \varphi_0 \leq \varphi_{01})$  为

$$F(\Delta\varphi | \varphi_{02} \leq \varphi_0 \leq \varphi_{01}) = \frac{C(F_1(\varphi_{01}), F_2(\Delta\varphi); \theta) - C(F_1(\varphi_{02}), F_2(\Delta\varphi); \theta)}{F_1(\varphi_{01}) - F_1(\varphi_{02})}, \quad (16)$$

式中,  $\varphi_{01}$ ,  $\varphi_{02}$  为  $\varphi_0$  的上、下限。

水利水电工程中强度标准值采用小值平均值(即  $\mu - 1.0\sigma$ )。因此, 以堆石料为例, 将  $\Delta\varphi$  分为  $\mu - 0.25\sigma \leq \Delta\varphi \leq \mu + 0.25\sigma$ 、 $\mu - 1.0\sigma \leq \Delta\varphi \leq \mu - 0.5\sigma$  及  $\mu - 2\sigma \leq \Delta\varphi \leq \mu - 1.5\sigma$  3 个区间, 对不同 Copula 函数构造的联合概率分布函数进行比较。其中,  $\mu$  为均值,  $\sigma$  为标准差。由式(15)可得  $\varphi_0$  的条件累积分布函数曲线(如图 5 所示)与分位数值(表 7)。

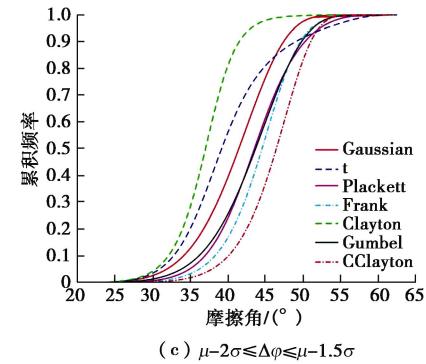
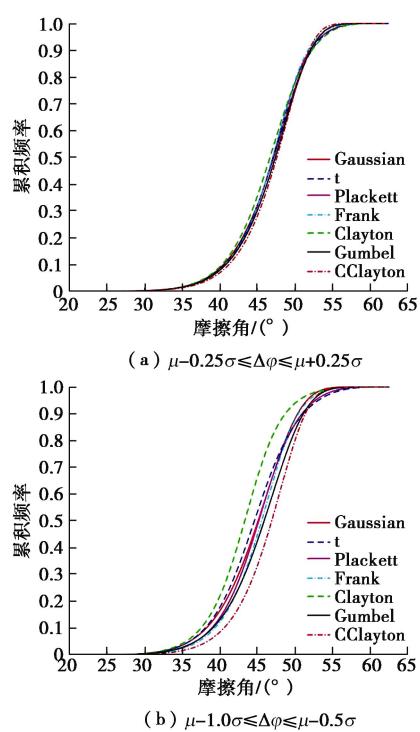
图 5 不同 Copula 函数计算的  $\varphi_0$  的条件累积分布函数曲线

Fig. 5 Comparison of conditional cumulative distribution functions of frictional angle associated with various Copula functions

由图 5 可以看到, 不同的 Copula 函数计算的  $\varphi_0$  的条件累积分布函数存在显著的差异性, 在均值附近差异性较小, 随着  $\Delta\varphi$  的减小, 差异性显著增大。表 7 从定量的角度很好地验证了上述结论。

为进一步分析不同 Copula 函数构造的非线性强度参数联合分布函数的差异性, 图 6, 7 给出了 7 种 Copula 函数构造的堆石料非线性强度参数联合概率密度函数等概率密度曲线。边缘分布函数采用表 2 计算的最优边缘分布函数。

如图 6, 7 所示, 相同的边缘分布函数和相关系数条件下, 不同 Copula 函数构造的非线性强度参数联合概率密度函数差异显著。由于不同 Copula 函数表征不同的相关结构, 所以, 即便是相同的边缘分布函数和相关系数, 不同 Copula 函数构造的非线性强度参数联合概率密度函数仍差异显著。因此, 在采用 Copula 函数建立非线性强度参数联合分布函数模型时, 避免从经验或简单的角度选择 Gaussian Copula 函数模型, 应结合更多的试验数据确定最优 Copula 函数, 继而建立非线性强度参数联合分布函数模型。

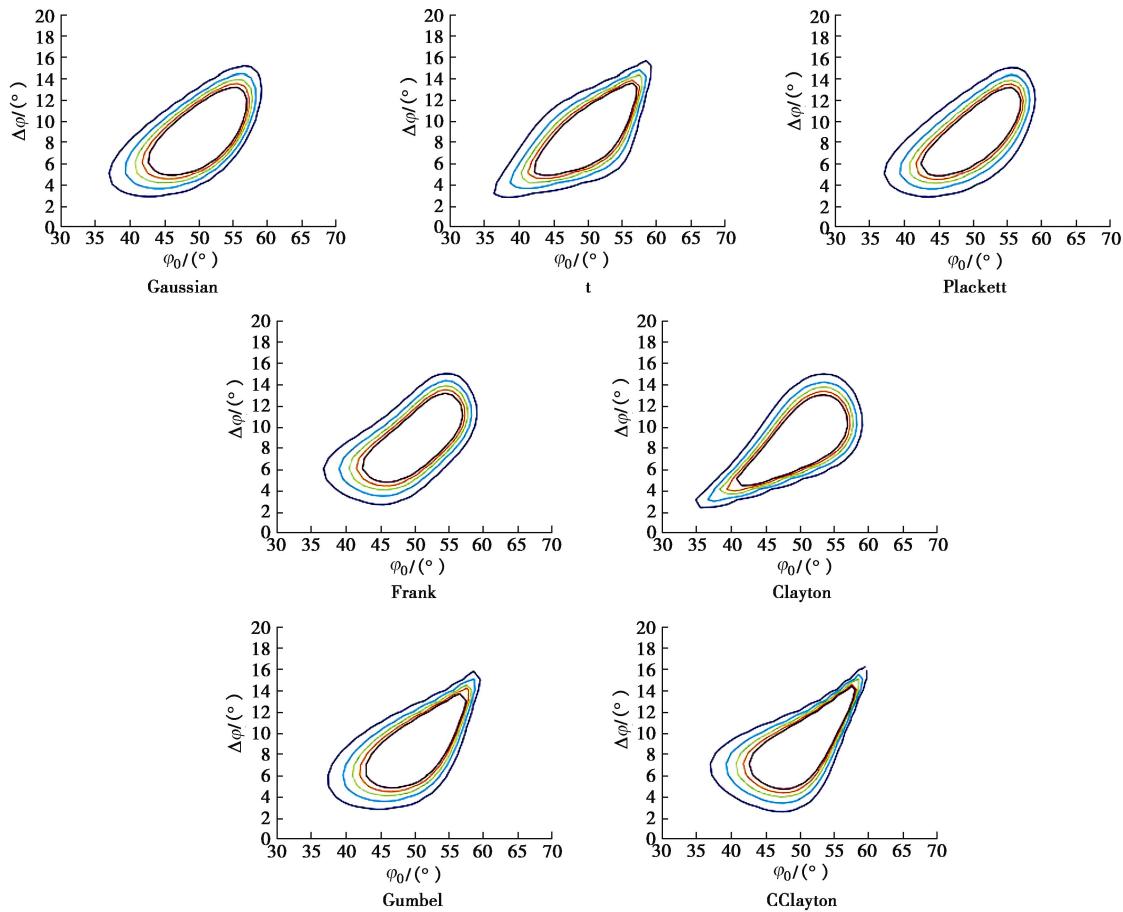


图 6 不同 Copula 函数构造的非线性强度参数联合概率密度函数等概率密度值曲线

Fig. 6 Comparison among probability density function isolines of nonlinear intensity parameters associated with different Copula functions

布函数的不同点：二维正态分布函数采用 Gaussian Copula 函数描述变量间的相关结构类型，其边缘分布必须为正态分布，而 Copula 函数构造的联合分布函数的边缘分布可取任意一种边缘分布类型。二维正态分布函数的概率密度函数为

$$f(\varphi_0, \Delta\varphi) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\varphi_0}\sigma_{\Delta\varphi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0)^2}{\sigma_{\varphi_0}^2} - 2\rho \frac{(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0)(\Delta\varphi - \bar{\Delta\varphi})}{\sigma_{\varphi_0}\sigma_{\Delta\varphi}} + \frac{(\Delta\varphi - \bar{\Delta\varphi})^2}{\sigma_{\Delta\varphi}^2} \right] \right\}. \quad (17)$$

图 8 展示了垫层料非线性强度参数的原始数据点与两种模型（二维正态分布函数和最优 Copula 函数）构造的非线性强度参数联合概率密度函数的等概率密度曲线（概率密度值 0.0005）。图 9 描述了垫层料非线性强度参数原始数据点与两种模型的仿真数据分布情况。由图可见，与二维正态分布函数相比，Copula 联合分布函数是基于最优边缘分布函数与最优 Copula 函数构建的，仿真数据与原始数据的变化趋势接近，能够较完整地匹配原始数据，可以较准确地表征原始数据相关结构。

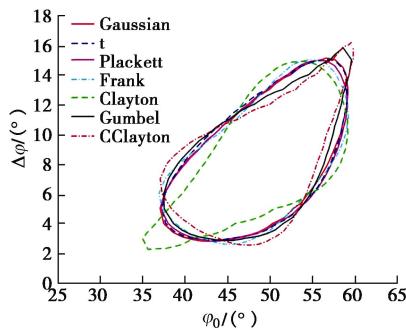


图 7 概率密度值为 0.001 时不同 Copula 函数构造的非线性强度参数联合概率密度函数等概率密度值曲线

Fig. 7 Curves of equal probability density value of joint probability density function of nonlinear intensity parameters constructed by different Copula functions (probability density value equals 0.001)

#### 4 二维正态分布函数与 Copula 函数构造的非线性强度参数联合分布函数的比较

二维正态分布函数与 Copula 函数构造的联合分

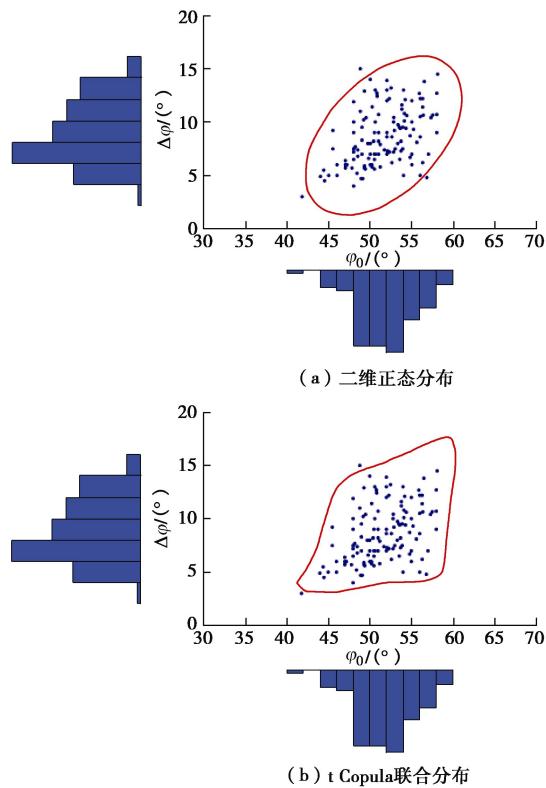


图8 非线性强度参数联合概率密度函数等概率密度线比较

Fig. 8 Comparison of equal probability density lines of joint probability density functions of nonlinear strength parameters

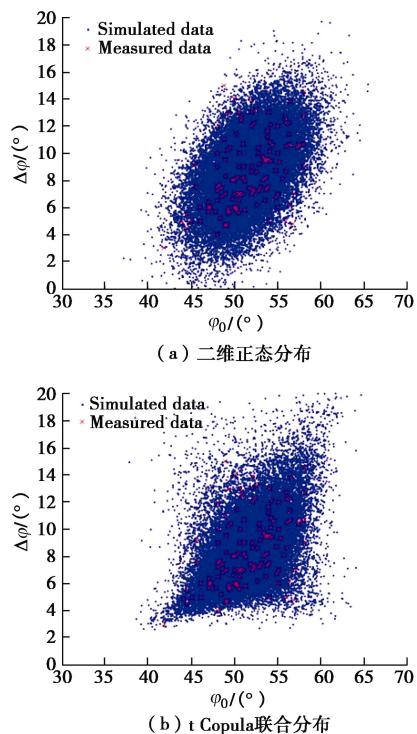


图9 非线性强度参数联合分布模型仿真数据与原始数据的分布

Fig. 9 Distribution of simulation data and original data of nonlinear intensity parameter joint distribution model

## 5 结 论

合理地非线性强度参数的联合分布模型, 对土石坝坡稳定可靠度分析具有重要意义。本文汇总了国内外124座土石坝工程的1257组筑坝材料非线性强度参数, 开展了非线性强度参数相关性和分布模型研究, 数据覆盖面广, 具有较好的代表性。

(1) Copula 函数能够很好地考虑筑坝材料非线性强度参数的不确定性与正相关性, 构造任意边缘分布函数和不同相关结构的联合分布函数, 为建立筑坝材料非线性强度参数的联合分布函数模型提供了简单、有效的方法。与传统二维正态分布函数相比, 由 Copula 函数构造的非线性强度参数联合分布函数灵活性强、适用范围广、能更准确地表征原始数据的分布情况。

(2) 相同的边缘分布函数与相关系数, 基于不同 Copula 函数构造的非线性强度参数联合分布函数差异显著。同时, 由条件累积分布函数可知, 当非线性强度参数取值减小时, 基于不同 Copula 函数构造的非线性强度参数的条件累计分布函数差异越显著。

(3) 不同分区坝料的最优 Copula 函数不同, 在实际工程中不同分区材料应选择能够表征非线性强度参数的最优 Copula 函数建立联合分布函数模型。

## 参考文献:

- [1] PENMAN A D M. Shear characteristics of a saturated silt, measured in triaxial compression[J]. *Géotechnique*, 1953, 3(8): 312 - 328.
- [2] BISHOP A W, WEBB D L, LEWIN P I. Undisturbed samples of London clay from the Ashford common shaft: strength-effective stress relationships[J]. *Géotechnique*, 1965, 15(1): 1 - 31.
- [3] PONCE V M, BELL J M. Shear strength of sand at extremely low pressures[J]. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 1971, 97(4): 625 - 638.
- [4] MAKSIMOVIC M. Nonlinear failure envelope for soils[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1989, 115(4): 581 - 586.
- [5] BAKER R. Nonlinear Mohr envelopes based on triaxial data [J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2004, 130(5): 498 - 506.
- [6] BARTON Nick, KJERNESLI Bjorn. Shear strength of rockfill [J]. *J Geotech Engng Div, ASCE*, 1981(GT7): 873 - 891.
- [7] INDRARATNA B, WIJEWAWEDENA L S S, BALASUBRAMANIAM A S. Large-scale triaxial testing of

- greywacke rockfill[J]. *Géotechnique*, 1993, **43**(1): 37 – 51.
- [8] 吕擎峰, 殷宗泽. 非线性强度参数对高土石坝坝坡稳定性的影响[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, **23**(16): 2708 – 2711. (LÜ Qing-feng, YIN Zong-ze. Effect of strength nonlinearity on slope stability of high rockfill dam[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, **23**(16): 2708 – 2711. (in Chinese))
- [9] 陈祖煜, 陈立宏, 孙平. 非线性强度指标边坡稳定安全系数取值标准的研究[J]. 水力发电, 2004, **30**(2): 17 – 20. (CHEN Zu-yu, CHEN Li-hong, SUN Ping. An investigation on the allowable factors of safety in slope stability analysis using nonlinear strength parameters[J]. Hydroelectric Power, 2004, **30**(2): 17 – 20. (in Chinese))
- [10] 陈立宏, 陈祖煜. 堆石非线性强度特性对高土石坝稳定性的影响[J]. 岩土力学, 2007, **28**(9): 1807 – 1810. (CHEN Li-hong, CHEN Zu-yu. Effect of nonlinear strength of rockfill on slope stability of high earth-rock dam[J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, **28**(9): 1807 – 1810. (in Chinese))
- [11] 范明桥, 盛金保. 土强度指标  $\varphi, c$  的互相关性[J]. 岩土工程学报, 1997, **19**(4): 100 – 104. (FAN Ming-qiao, SHENG Jin-bao. Correlation of soil strength index  $\varphi$  and  $c$  [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1997, **19**(4): 100 – 104. (in Chinese))
- [12] LI D Q, CHEN Y F, LU W B, et al. Stochastic response surface method for reliability analysis of rock slopes involving correlated non-normal variables[J]. Computers and Geotechnics, 2011, **38**(1): 58 – 68.
- [13] LOW B K. Reliability analysis of rock slopes involving correlated nonnormals[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2007, **44**(6): 922 – 935.
- [14] 吴震宇, 陈建康, 许唯临, 等. 高堆石坝非线性强度指标坝坡稳定可靠度分析方法研究及工程应用[J]. 岩土力学与工程学报, 2009, **28**(1): 130 – 137. (WU Zhen-yu, CHEN Jian-kang, XU Wei-lin, et al. Research on methodology of reliability analysis of high rockfill dam slope stability using nonlinear strength indexes and its engineering application[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, **28**(1): 130 – 137. (in Chinese))
- [15] 四川大学水利水电学院. 双江口水电站土质心墙堆石坝坝坡稳定分析及可靠度研究报告[R]. 成都: 四川大学水利水电学院. (College of Water Resources and Hydroelectric Engineering, Sichuan University. Report on slope stability analysis and reliability research of the Shuangjiangkou rockfill dam[R]. Chengdu: College of Water Resources and Hydroelectric Engineering, Sichuan University, 2008. (in Chinese))
- [16] WU Z Y, CHEN J K, LI Y L, et al. An algorithm in generalized coordinate system and its application to reliability analysis of seismic slope stability of high rockfill dams[J]. Engineering Geology, 2015, **188**: 88 – 96.
- [17] SKLAR A. Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges[J]. Publications de l'Institut de Statistique de l'Universite de Paris, 1959, **8**: 229 – 231.
- [18] 张尧庭. 连接函数 (Copula) 技术与金融风险分析[J]. 统计研究, 2002, **19**(4): 48 – 51. (ZHANG Yao-ting. Link function (Copula) technology with financial risk analysis[J]. Statistical Research, 2002, **19**(4): 48 – 51. (in Chinese))
- [19] KOLE E, KOEDIJK K, VERBEEK M. Selecting copulas for risk management [J]. Journal of Banking and Finance, 2007, **31**(8): 2405 – 2423.
- [20] ZHANG L, SINGH V P. Bivariate flood frequency analysis using the Copula method[J]. Journal of Hydrologic Engineering, 2006, **11**(2): 150 – 164.
- [21] ZHANG Q, CHEN Y D, CHEN X, et al. Copula-based analysis of hydrological extremes and implications of hydrological behaviors in the Pearl River basin, China[J]. Journal of Hydrologic Engineering, 2011, **16**(7): 598 – 607.
- [22] 唐小松, 李典庆, 周创兵, 等. 基于 Copula 函数的抗剪强度参数间相关性模拟及边坡可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(12): 2284 – 2291. (TANG Xiao-song, LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing, et al. Modeling dependence between shear strength parameters using Copulas and its effect on slope reliability[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(12): 2284 – 2291. (in Chinese))
- [23] 唐小松, 李典庆, 周创兵, 等. 不完备概率信息条件下边坡可靠度分析方法[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(6): 1027 – 1034. (TANG Xiao-song, LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing, et al. Reliability analysis of slopes with incomplete probability information[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(6): 1027 – 1034. (in Chinese))
- [24] 唐小松, 李典庆, 周创兵, 等. 基于 Copula 函数的基桩荷载 – 位移双曲线概率分析[J]. 岩土力学, 2012, **33**(1): 171 – 178. (TANG Xiao-song, LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing, et al. Probabilistic analysis of load-displacement hyperbolic curves of single pile using Copula[J]. Rock and Soil Mechanics, 2012, **33**(1): 171 – 178. (in Chinese))
- [25] UZIELLI M, MAYNE P W. Load-displacement uncertainty of

- vertically loaded shallow footings on sands and effects on probabilistic settlement[J]. Georisk, 2012, 6(1): 50 - 69.
- [26] LI D Q, TANG X S, PHOON K K, et al. Bivariate simulation using Copula and its application to probabilistic pile settlement analysis[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2013, 37(6): 597 - 617.
- [27] 张 蕾, 唐小松, 李典庆. 基于 Copula 函数的土体抗剪强度参数二维分布模型[J]. 土木工程与管理学报, 2013, 30(2): 11 - 17, 36. (ZHANG Lei, TANG Xiao-song, LI Dian-qing, et al. Bivariate distribution model of soil shear strength parameter using Copula[J]. Journal of Civil Engineering and Management, 2013, 30(2): 11 - 17, 36. (in Chinese))
- [28] 邢 婕, 唐小松, 李典庆, 等. 水利水电工程岩基抗剪强度参数二维分布模型 构造的 Copula 方法[J]. 岩土力学, 2016, 37(3): 783 - 792. (XING Jie, TANG Xiao-song, LI Dian-qing, et al. Bivariate distribution of shear strength parameters for rock mass using Copulas method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, 37(3):783 - 792. (in Chinese))
- [29] A KAIKE H. A new look at the statistical model identification[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1974, 19(6): 716 - 723.
- [30] SCHWARZ G. Estimating the dimension of a model[J]. The Annals of Statistics, 1978, 6(2): 461 - 464.
- [31] DUNCAN J M, BYRNE P M, WONG K S. Strength stress-strain and bulk modulus parameters for finite element-analysis of stress and movements in soil masses[R]. Berkeley: Berkeley University of California, 1978.
- [32] NELSEN R B. An introduction to Copulas[M]. New York: Springer, 2006.
- [33] 李典庆, 唐小松, 周创兵. 基于 Copula 理论的岩土体参数不确定度表征与可靠度分析[M]. 北京: 科学出版社, 2014. (LI Dian-qing, TANG Xiao-song, ZHOU Chuang-bing. Uncertain Characterization and Reliability Analysis of Rock and Soil Mass Parameters Based on Copula Theory[M]. Beijing: Science Press, 2014. (in Chinese))

## 第 29 届全国土工测试学术研讨会通知

(2020 年 7 月 18, 19 日, 呼和浩特) 第 1 号通知

**主办单位:** 中国土木工程学会土力学及岩土工程分会, 中国水利学会岩土力学专业委员会。

**承办单位:** 内蒙古工业大学等。

**协办单位:** 《岩土工程学报》编委会等。

**大会邀请及主题:** 中国土木工程学会土力学及岩土工程分会, 中国水利学会岩土力学专业委员会拟定于 2020 年 7 月在呼和浩特召开“第 29 届全国土工测试学术研讨会”, 会议主题: “岩土工程勘察技术及土工测试新技术、新方法”。中国土木工程学会土力学及岩土工程分会, 中国水利学会岩土力学专业委员会邀请全国相关学科的专家、学者、科技工作者与工程技术人员, 特别是青年岩土工程工作者踊跃投稿, 集聚呼和浩特, 围绕会议主题探讨与交流土工测试最新研究成果与实践经验。

**会议要点:** 本次学术研讨会组织委员会、学术委员会由承办、协办单位, 学会专委会专家组成。会议将邀请国内著名土工测试专家进行特邀报告和主题报告, 并进行新编《土工试验方法标准》(GB/T50123—2019) 宣贯。

**会议专题:** ①岩土工程勘察技术; ②土基本性质测试; ③

土工物理模型试验; ④土工原测试技术; ⑤现场土工监测技术; ⑥环境土工测试技术; ⑦特殊土性质测试技术; ⑧土工微观测试新技术; ⑨土工测试新型技术设备。

**会议论文与出版:** 会议投稿论文要求为原创、未公开发表的内容, 论文篇幅一般在 5 页以内, 格式请参考《岩土工程学报》。会议期间将通过投票遴选优秀论文推荐到《岩土工程学报》(增刊)(EI 收录)、《地下空间与工程学报》、《内蒙古农业大学学报》、《内蒙古科技大学学报》、《内蒙古工业大学学报》其他论文将在论文集中刊出。

**投稿邮箱:** geotest2020@163.com。

**重要日期:** ①2019 年 12 月 30 日前提交论文全文; ②2020 年 2 月 15 日前返回论文录用通知; ③2020 年 3 月 15 日前返回修改后论文。

**会议联系方式:** 地址: 内蒙古呼和浩特市新城区爱民街 49 号内蒙古工业大学土木工程学院, 邮政编码: 010051, 联系人: 刘俊芳: 18647964316; 杜强: 15560924010; 马建国: 18847187706。

(大会组委会 供稿)