

DOI: 10.11779/CJGE202004015

# 卸荷条件下岩石平行偏置双裂隙的扩展规律研究

周子涵, 陈忠辉, 王建明, 年庚乾, 陈 帅, 包 敏

(中国矿业大学(北京)力学与建筑工程学院, 北京 100083)

**摘要:** 岩质边坡中存在着大量的非贯通断续节理, 对于开挖扰动下的边坡岩体强度及破坏模式起着重要的控制作用。为了研究边坡岩体在开挖扰动下内部节理裂隙的细观扩展规律, 基于叠加原理与 Kachanov 法, 推导了卸荷条件下平行偏置双裂隙的尖端应力强度因子表达式并从理论上分析了多种因素对裂隙间相互作用的影响规律, 最后对含平行偏置裂隙的类岩试件进行了卸荷试验, 结果表明: ①主次裂隙间的裂隙错距或岩桥长度愈小、主裂隙长度愈大, 裂隙尖端处的相互作用变化愈剧烈; ②随着裂隙倾角的增大, 裂隙尖端张拉破坏的趋势愈发明显, 而剪切破坏趋势减弱; ③裂隙间的岩桥长度越大, 应力强度因子放大系数受裂隙倾角的影响越敏感。通过对比理论上不同试件在侧向卸荷条件下的裂隙轴向起裂应力与试验测得的实际起裂应力发现, 两者相对误差均在 4.7% 以内, 证明了利用提出的理论方法计算裂隙的临界起裂应力是合理可行的。通过本研究揭示的卸荷条件下平行偏置双裂隙的扩展规律, 可对露天矿节理岩质边坡在开挖过程中的细观破坏机制提供一定的理论依据。

**关键词:** 断续节理; 叠加原理; Kachanov 法; 应力强度因子; 卸荷试验

中图分类号: TU452 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2020)04-0721-10

作者简介: 周子涵(1995—), 男, 博士研究生, 主要从事边坡灾变机理与岩石断裂力学等方面的研究。E-mail: 18813027369@163.com。

## Propagation of offset parallel cracks in rock under unloading conditions

ZHOU Zi-han, CHEN Zhong-hui, WANG Jian-ming, NIAN Geng-qian, CHEN Shuai, BAO Min

(School of Mechanics & Civil Engineering, China University of Mining and Technology, Beijing 100083, China)

**Abstract:** The numerous non-penetrating intermittent joints in rock slopes play an important role in controlling the strength and failure mode of rock mass under excavation disturbance. In order to determine the meso-influence laws of intermittent joint interaction in the slope under the action of excavation, using the superposition principle and the Kachanov method, the stress intensity factor of parallel offset double cracks at the tip in rock mass under unloading conditions is calculated, the influences of many factors on the interaction between cracks are theoretically analyzed, and the unloading tests on rock-like specimens with parallel offset cracks are conducted. The results show that: (1) The interaction at the crack tips becomes more severe and sensitive if the length of the main crack larger or the staggered distance between the cracks or the length of rock bridge is shorter. (2) As the inclination angle of cracks increases, the tensile failure gradually increases but shear failure weakens. (3) The sensitivity of the amplification factors of the stress intensity factor affected by the angle is positively correlated with the length of rock bridge. In addition, the axial-initiation stresses of cracks in different specimens theoretically calculated under unloading conditions are compared with the measured ones by tests, and it is found that the relative error between them are all less than 4.7%, revealing that the proposed theoretical formula is a reasonable and feasible method to calculate the axial-initiation stresses of cracks. The propagation laws of the offset parallel cracks in rock under unloading conditions are revealed and are conducive to the studies on meso-failure mechanism of jointed rock slopes in open-pit mines under the action of excavation.

**Key words:** intermittent joint; superposition principle; Kachanov method; stress intensity factor; unloading test

## 0 引言

露天矿边坡在开挖扰动过程中必然会伴随着岩体卸荷现象的发生。由于岩质边坡中存在着大量的非贯通断续节理, 对于岩体强度及边坡的破坏模式起着重要的控制作用, 使得露天矿边坡在开挖过程中, 内部

断续节理端部产生应力高度集中的现象, 进而导致岩桥裂隙萌生、扩展、贯通, 甚至演化成边坡宏观上的突发性失稳破坏<sup>[1-3]</sup>。因此, 从细观力学角度深入探究

基金项目: 国家重点研发计划项目(2016YFC0801602, 2017YFC1503103)

收稿日期: 2019-05-24

岩体断续节理裂隙的孕育演化规律和裂隙之间的相互作用规律,对于认识露天矿岩质边坡在开挖卸荷作用下的破坏机制,设计合理的开挖施工方案,均具有重要的科学意义。

在含非贯通断续节理的岩体细观破坏机制方面,前人已做出了大量卓有成效的工作。Tang 等<sup>[2]</sup>运用 RFPA<sup>2D</sup> 软件,分析了断续节理岩体中裂隙的产生与扩展机制,研究了不同断续节理分布岩体的变形、破坏过程以及节理之间的相互作用和影响规律;Bobet 等<sup>[3]</sup>对含 2 或 3 条平行预置节理的类岩石试件进行了单轴压缩试验,研究了次生裂隙萌生、扩展、与汇合的试件断裂贯通机制;Wong 等<sup>[4]</sup>利用含不同微裂隙的类砂岩模拟材料研究了含不同角度分布的预置裂隙岩样的贯通机制;杨圣奇<sup>[5]</sup>对断续三裂隙砂岩试样进行了单轴压缩试验,研究了断续三裂隙砂岩试样宏观变形特性与裂隙扩展过程之间的关系;赵程等<sup>[6]</sup>基于数字图像 DIC 系统,对含双裂隙的类岩石岩样进行单轴压缩下的试验研究,从全局应变场的角度分析了不同应力状态下岩桥区域裂隙的贯通机制以及应变局部化的融合过程。

综上所述,由于目前针对卸荷条件下的多裂隙问题难以计算得到裂隙尖端的应力强度因子,只能通过各种裂隙的预设位置搭配,并以室内试验和数值模拟分析方法为主要的研究手段,得到定性的分析结果,尚缺乏理论方面的对含多裂隙岩体的破坏演化规律与多裂隙之间相互作用规律的相关定量研究。因此,本文基于叠加原理与经典 Kachanov 法,从平面应变的角度,通过计算卸荷条件下平行偏置双裂隙尖端的应力强度因子,并引入卸荷条件下的裂隙尖端应力强度因子放大系数作为定量评价指标,对开挖卸荷条件下平行偏置双裂隙的扩展规律与相互作用影响规律进行了深入地探讨,最后利用类岩石相似材料双轴加卸载试验对理论结果进行了分析验证。该成果为露天矿节理岩质边坡在开挖卸荷条件下细观破坏机制的深入研究奠定了良好的理论基础。

## 1 开挖卸荷条件下应力强度因子的计算

### 1.1 卸荷条件下平行偏置双裂隙扩展的断裂力学模型

在实际工程中,边坡通常采用分级开挖的方式,而边坡的开挖必定会在一定深度范围内引起岩体向开挖区的差异回弹变形,这种卸荷回弹变形是由表向里的,且由于岩体的非均质非弹性,必然会在其某些部位形成一种由差异变形而产生的拉应力,在开挖卸荷过程中裂隙面的应力状态从压剪应力状态逐渐向拉剪应力状态变化<sup>[7]</sup>。因此,对于任意一级开挖过程,可

以将其等效为在开挖面施加开挖体等效荷载并逐渐减小至零的过程<sup>[8]</sup>。黄润秋<sup>[9]</sup>研究发现,边坡体在开挖后其内部岩体应力场重分布,如图 1 所示,出现的二次应力场会呈现应力降低区(区域 A)、应力增高区(区域 B)和原岩应力区(区域 C)的分布特点。图 2 所示边坡岩体中存在多条闭合的平行非贯通断续节理,为了简化研究,本文选取边坡中含两条平行断续节理的“关键块体”作为研究对象,探讨其内部节理的受力状态和节理之间的相互作用规律。由文献[8, 9]可知,选取的“关键块体”在开挖前受到水平方向地应力  $\sigma_3$  和竖直方向地应力  $\sigma_1$  的作用,即岩体位于应力增高区(区域 B);开挖后,应力路径发生了改变,竖直方向受  $\sigma_1$  的作用,而水平方向则由于岩体内部的卸荷回弹变形作用,由之前的压应力转变成拉应力作用,岩体应力状态由压剪应力状态转变成拉剪应力状态,即岩体位于应力降低区(区域 A),此时岩体的水平向受等效拉应力  $\sigma_3$  的作用。

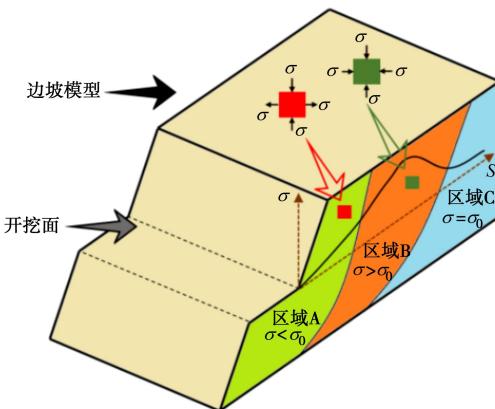


图 1 边坡中不同部位应力分布示意图  
Fig. 1 Sketch of stress in different parts of a slope

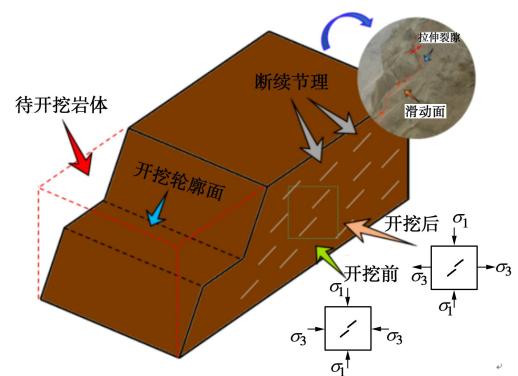


图 2 边坡中“关键块体”开挖前后力学模型示意图  
Fig. 2 Sketch of mechanical models for "key block" in slope before and after excavation

由于卸荷条件下含裂隙岩体的应力状态较为复杂,很难直接利用已有的裂隙断裂理论进行计算。根据叠加原理,在线弹性力学的基础上,在相同边界条

件下, 两个或更多的不同的同型加载系统在裂隙尖端附近引起的总应力场, 可以通过各个应力强度因子的代数和求得<sup>[10]</sup>。因此, 本文应用叠加原理, 采用一次叠加的方法分析其应力状态, 如图 3 所示, 将开挖后含双裂隙岩体的应力状态 A 分解为单轴拉伸作用下的应力状态 B 和单轴压缩作用下的应力状态 D, 并相进行叠加 (图中数字代表裂隙的编号), 且受力状态 B 和 C 等效, 其中  $\beta = 90^\circ - \alpha$ 。

根据图 3 中所示的分解方法, 可以得出卸荷条件下双裂隙岩体应力状态 A 的应力强度因子  $K^A$  为

$$K^A = K^B + K^D = K^C + K^D \quad , \quad (1)$$

式中,  $K^B$ ,  $K^C$  为单轴拉伸加载作用下的应力强度因子;  $K^D$  为单轴压缩加载作用下的应力强度因子。考虑到多裂隙应力强度因子求解方法的可行性和有效性, Kachanov 法相对其它方法具有较好的优势, 因此本文将基于经典 Kachanov 法分别对  $K^C$  与  $K^D$  进行求解。

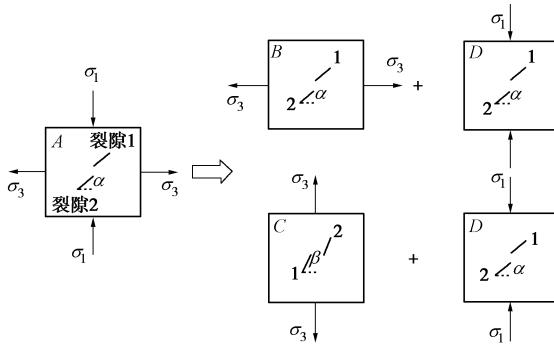


图 3 卸荷条件下含双裂隙岩体应力状态二次叠加

Fig. 3 Superposition method of stress state of rock mass with double cracks under unloading condition

### 1.2 单轴拉伸作用下应力强度因子 $K^C$ 的计算

根据经典 Kachanov 法理论, 如图 4 所示的裂隙扩展问题可以简化为两个子问题, 且每个子问题中仅含有一条裂隙, 裂隙面上作用有伪面力<sup>[11]</sup>。图中裂隙 1 和裂隙 2 的长度分别为  $2a$  和  $2b$  ( $a$ ,  $b$  分别为两条裂隙的半长),  $h$  为两条平行裂隙内尖端 (图 4 中  $a$  端和  $-b$  端) 垂直于裂隙方向的间距, 这里简称裂隙错距,  $s$  为两条平行裂隙内尖端沿裂隙方向的间距, 这里简称裂隙间的岩桥长度,  $\beta$  为裂隙倾角,  $xoy$  和  $x'o'y'$  分别为基于裂隙 1 和裂隙 2 建立的局部坐标系,  $\sigma_3$  为竖直方向的远场作用力。裂隙面上的伪面力可以分解为均匀部分及合力为零的非均匀部分, 如图 5 所示, 通过求解裂隙面上作用的伪面力 (假定裂隙面上非均匀部分作用力对另一裂隙无影响作用, 只由均匀部分作用力产生) 便可计算裂隙的应力强度因子<sup>[11-12]</sup>。

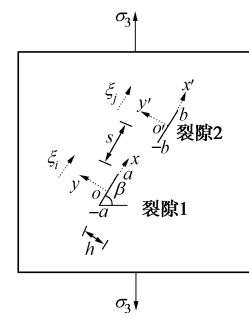


图 4 单轴拉伸作用下的平行偏置裂隙力学模型

Fig. 4 Mechanical model for a pair of offset parallel cracks

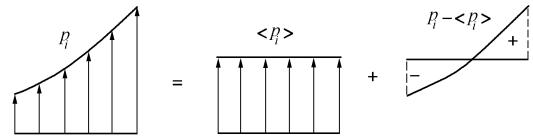


图 5 裂隙面力的分解 ( $i=1, 2$ )

Fig. 5 Decomposition of crack force ( $i=1, 2$ ) under uniaxial tension

根据文献[12], 单轴拉伸作用下的平行偏置裂隙会发生 I-II 复合型拉剪破坏, 因此可计算出裂隙尖端的 I 型、II 型强度因子  $K_I^C$  和  $K_{II}^C$ 。根据经典 Kachanov 法, 裂隙  $i$  ( $i=1, 2$ ) 的伪面力可表示为<sup>[14-15]</sup>

$$\begin{aligned} p_i(\xi_i) &= \begin{cases} \sigma_i(\xi_i) \\ \tau_i(\xi_i) \end{cases} = \begin{cases} \sigma_i^\infty + \Delta\sigma_{ji}(\xi_i) \\ \tau_i^\infty + \Delta\tau_{ji}(\xi_i) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2}\sigma_3 \cdot (1 + \cos 2\beta) + \Delta\sigma_{ji}(\xi_i) \\ -\frac{1}{2}\sigma_3 \cdot \sin 2\beta + \Delta\tau_{ji}(\xi_i) \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, i \neq j) \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $\sigma_i^\infty$ ,  $\tau_i^\infty$  为裂隙  $i$  上的法向初始面力和切向初始面力;  $\Delta\sigma_{ji}(\xi_i)$ ,  $\Delta\tau_{ji}(\xi_i)$  分别为裂隙  $j$  在裂隙  $i$  上产生的法向和切向附加面力, 且有

$$\begin{cases} \Delta\sigma_{ji}(\xi_i) \\ \Delta\tau_{ji}(\xi_i) \end{cases} = \begin{bmatrix} f_{ji}^{nn} & f_{ji}^{tn} \\ f_{ji}^{nt} & f_{ji}^{tt} \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} \langle \sigma_j(\xi_j) \rangle \\ \langle \tau_j(\xi_j) \rangle \end{cases}, \quad (3)$$

式中,  $f_{ji}^{nn}$ ,  $f_{ji}^{tn}$ ,  $f_{ji}^{nt}$ ,  $f_{ji}^{tt}$  称为相互作用系数, 以  $f_{ji}^{tn}$  为例, 表示裂隙  $i$  上的单位均布法向力在裂隙  $j$  上产生的切向附加应力, 其它系数的含义可依此类推, 计算方法见文献[11]的附录部分。则根据文献[11, 12], 单轴拉伸作用下裂隙模型的 I 型和 II 型应力强度因子可表示为 ( $t_i$  为节理的半长):

$$\begin{cases} K_I(\pm t_i) \\ K_{II}(\pm t_i) \end{cases} = -\frac{1}{\sqrt{\pi t_i}} \int_{-t_i}^{t_i} \sqrt{\frac{t_i \pm \xi_i}{t_i \mp \xi_i}} \cdot \begin{cases} \sigma(\xi_i) \\ \tau(\xi_i) \end{cases} d\xi_i, \quad (4)$$

式中,  $t_i$  为裂隙  $i$  的半长 ( $i=1, 2$ ),  $\sigma(\xi_i)$  和  $\tau(\xi_i)$  分别为裂隙  $i$  上的法向和切向伪面力。

### 1.3 单轴压缩作用下的应力强度因子 $K^D$ 的计算

根据文献[14], 在单轴压缩作用下, 图 6 (a) 所

示的平行偏置裂隙会发生压剪破坏, 裂隙受法向压力, 甚至受压闭合。因此, 本文假定单轴压缩作用下的裂隙模型仅发生 II 型破坏, 即只存在 II 型应力强度因子  $K_{II}^D$ 。

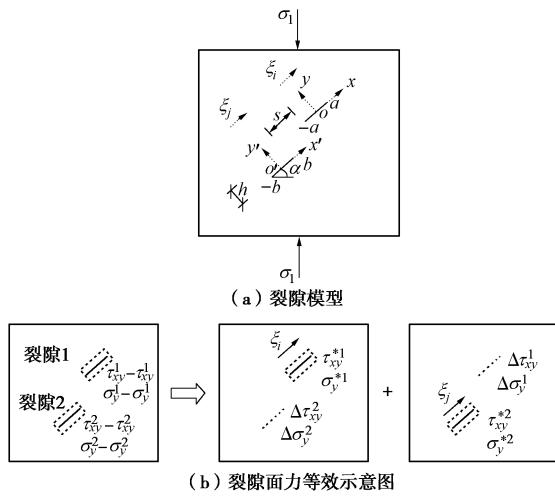


图 6 单轴压缩作用下的平行偏置裂隙力学模型及面力等效示意图

Fig. 6 Mechanical model for a pair of offset parallel cracks under uniaxial compression and equivalent sketch of crack force

如图 6 (a) 所示的双裂隙, 作用在裂隙 1 和裂隙 2 上的实际面力分别为  $\sigma_y^1$ ,  $\tau_{xy}^1$ ,  $\sigma_y^2$ ,  $\tau_{xy}^2$ , 假定两裂隙在压剪应力作用下闭合并产生滑动, 则该问题可等效于图 5 (b) 所示的远场应力消失的情形, 其中  $\sigma_y^{\infty i}$ ,  $\tau_{xy}^{\infty i}$  ( $i=1, 2$ ) 分别为远场作用力在不同节理面上产生的分量:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xy}^{\infty i} &= \frac{1}{2} \sigma_1 \cdot (1 + \cos 2\alpha), \\ \tau_{xy}^{\infty i} &= \frac{1}{2} \sigma_1 \cdot \sin 2\alpha \quad (i=1, 2). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

根据 M-C 准则, 作用在裂隙  $i$  ( $i=1, 2$ ) 上的面力满足

$$\tau_{xy}^i = \lambda \cdot \sigma_y^i - \tau_c \quad \left( 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right) , \quad (6)$$

式中,  $\lambda$  为裂隙面处的摩擦系数,  $\tau_c$  为滑动摩阻力。

根据经典 Kachanov 法, 可将该问题分解为两个子问题, 且每个子问题仅含有一个受到伪面力  $\tau_{xy}^{*i}$ ,  $\sigma_y^{*i}$  的裂隙, 可表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y^{*i} &= (\sigma_y^i - \sigma_y^{\infty i}) - \Delta\sigma_y^i, \\ \tau_{xy}^{*i} &= (\tau_{xy}^i - \tau_{xy}^{\infty i}) - \Delta\tau_{xy}^i \quad (i=1, 2), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中,  $\Delta\sigma_y^i$ ,  $\Delta\tau_{xy}^i$  分别为裂隙  $j$  在裂隙  $i$  上产生的法向附加面力和切向附加面力。则根据文献[12], 单轴压缩作用下裂隙模型的 II 型应力强度因子可表示为 ( $t_i$  为节理的半长)

$$K_{II}(\pm t_i) = -\frac{1}{\sqrt{\pi t_i}} \cdot \int_{-t_i}^{t_i} \sqrt{\frac{t_i \pm \xi_i}{t_i \mp \xi_i}} \cdot \tau_{xy}^{*i} d\xi_i \quad (i=1, 2) . \quad (8)$$

#### 1.4 卸荷条件下双裂隙岩体应力状态应力强度因子 $K^A$ 的计算

将图 4, 5 中的相关参数代入式 (4), (8) 可以求得到应力状态 C 的 I 型、II 型应力强度因子  $K_I^C$ ,  $K_{II}^C$  以及应力状态 D 的 II 型应力强度因子  $K_{II}^D$ , 再通过式 (1) 即可求得卸荷条件下岩体应力状态应力强度因子  $K^A$ :

$$\left. \begin{aligned} K_I^A(\pm a) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \cdot \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a \pm \xi_1}{a \mp \xi_1}} \cdot \sigma_1^C(\xi_1) d\xi_1, \\ K_I^A(\pm b) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi b}} \cdot \int_{-b}^b \sqrt{\frac{b \pm \xi_2}{b \mp \xi_2}} \cdot \sigma_2^C(\xi_2) d\xi_2, \\ K_{II}^A(\pm a) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \cdot \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a \pm \xi_1}{a \mp \xi_1}} \cdot [\tau_1^C(\xi_1) + \tau_{xy}^{*1}] d\xi_1, \\ K_{II}^A(\pm b) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi b}} \cdot \int_{-b}^b \sqrt{\frac{b \pm \xi_2}{b \mp \xi_2}} \cdot [\tau_2^C(\xi_2) + \tau_{xy}^{*2}] d\xi_2. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中  $K_I^A(\pm a)$ ,  $K_I^A(\pm b)$  分别为裂隙 1 和裂隙 2 内外尖端的 I 型应力强度因子;  $K_{II}^A(\pm a)$ ,  $K_{II}^A(\pm b)$  分别为裂隙 1 和裂隙 2 内外尖端的 II 型应力强度因子;  $\sigma_1^C(\xi_1)$ ,  $\sigma_2^C(\xi_2)$  分别为单轴拉伸作用下裂隙 1 和裂隙 2 上的法向伪面力;  $\tau_1^C(\xi_1)$ ,  $\tau_2^C(\xi_2)$  分别为单轴拉伸作用下裂隙 1 和裂隙 2 上的切向伪面力;  $\tau_{xy}^{*1}$ ,  $\tau_{xy}^{*2}$  分别为单轴压缩作用下裂隙 1 和裂隙 2 上的切向伪面力。

#### 1.5 卸荷条件下单裂隙岩体应力状态应力强度因子 $K^E$ 的计算

与卸荷条件下双裂隙应力强度因子的求解方法相类似, 可采用图 7 所示的叠加方法对卸荷条件下单裂隙岩体应力状态应力强度因子进行求解 ( $\beta=90^\circ - \alpha$ ), 即

$$K^E = K^F + K^G , \quad (11)$$

式中, 单轴拉伸作用下和单轴压缩作用下的单裂隙应力强度因子  $K^F$ ,  $K^G$  可根据文献[13]计算求得。则卸荷条件下单裂隙岩体应力状态应力强度因子为

$$\left. \begin{aligned} K_{10}^E &= \sigma_3 \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cdot \sqrt{\pi t} = \sigma_3 \cdot \sqrt{\pi t}, \\ K_{II0}^E &= \left[ \frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha - \lambda \cdot \left( \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_1}{2} \cdot \cos 2\alpha \right) + \right. \\ &\quad \left. \sigma_3 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \right] \cdot \sqrt{\pi t}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中,  $K_{10}^E$ ,  $K_{II0}^E$  分别为卸荷条件下的单裂隙的 I 型和 II 型应力强度因子,  $t$  为单裂隙的半长,  $\lambda$  为裂隙面上的摩擦系数。

表1 应力强度因子放大系数误差分析

Table 1 Error analysis of amplification factors of SIF

s/a	本文(B)		手册(C)		相对误差值	
	$K_1(-b)/K_{10}(-b)$	$K_1(b)/K_{10}(b)$	$K_1(-b)/K_{10}(-b)$	$K_1(b)/K_{10}(b)$	$K_1(-b)/K_{10}(-b)$	$K_1(b)/K_{10}(b)$
-0.5	0.8577	1.1237	0.8700	1.1380	0.0623	0.0143
-0.25	0.9966	1.1287	1.0100	1.1400	0.0534	0.0113
0	1.1098	1.1214	1.1210	1.1320	0.0182	0.0106
0.25	1.1662	1.1063	1.1700	1.1120	0.0138	0.0057
0.5	1.1715	1.0891	1.1730	1.0900	0.0015	0.0009

注: 相对误差  $W_1 = |C - B|$ ,  $s/a$  为负值代表裂隙之间有重叠。

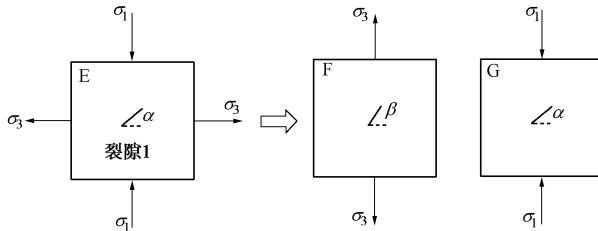


图7 卸荷条件下含单裂隙岩体应力状态二次叠加

Fig. 7 Superposition method for stress state of rock mass with a single crack under unloading conditions

## 2 卸荷条件下裂隙的扩展规律分析

多裂隙间的相互作用对其尖端的应力强度因子大小的影响有增大、无影响和减小3种形式, 分别对应裂隙的强化区、零效应区和屏蔽区<sup>[12]</sup>。本文将卸荷条件下双裂隙岩体应力状态应力强度因子与单裂隙岩体应力状态应力强度因子的比值定义为应力强度因子放大系数, 即  $K^A/K^E$  (比值大于1, 表示强化区; 比值等于1, 表示零效应区; 比值小于1, 表示屏蔽区), 通过选取应力强度因子放大系数  $K^A/K^E$  作为评价指标对两平行偏置裂隙的相互作用规律进行研究。

### 2.1 应力强度因子放大系数的计算误差分析

表1为  $\alpha=0$ ,  $a=b$  (两裂隙等长),  $h/b=1$  (裂隙错距比为1),  $s/b$  (岩桥长度比) 取不同值时, 本文根据经典 Kachanov 法算得的单轴拉伸作用下的应力强度因子比 ( $K^C/K^F$ ) 和利用应力强度因子手册<sup>[13]</sup>计算得到的应力强度因子比的比较结果。由表1可知: 当  $s/b=-0.5\sim0.5$  时, 两者的相对误差值均在 0.0625 以内, 误差很小, 说明本文利用经典 Kachanov 法所推求的应力强度因子计算公式具有合理性。随着  $s/b$  的不断增大(裂隙岩桥长度不断增大), 误差值逐渐减小, 且内尖端的误差较之外尖端要大一些, 主要原因可能是内尖端受其它裂隙的干扰相对较大所致。基于上述原因, 本文只研究  $s/b \geq -0.5$  的情形。

### 2.2 裂隙错距 $h$ 和岩桥长度 $s$ 的影响

根据文献[14], 岩石试件在卸荷条件下以I型(拉-剪)破坏为主, 且计算得到的II型应力强度因子  $K_{II}^A$  较小, 因此本文仅分析I型应力强度因子放大系数

$K_1^A/K_{10}^E$  的变化规律。由于计算过程较为复杂, 为了简化计算, 令  $\alpha=90^\circ$ ,  $\beta=0^\circ$ ,  $b=2a$  (不等长裂隙), 则两条裂隙内外尖端应力强度因子放大系数  $K_1^A/K_{10}^E$  随  $h/b$  (裂隙错距比) 和  $s/b$  (岩桥长度比) 的变化规律分别如图8和图9所示。

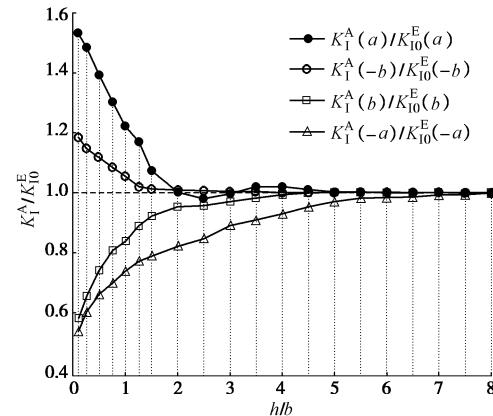


图8 卸荷条件下应力强度因子放大系数随裂隙错距比的变化规律 ( $s = -a$ )

Fig. 8 Variation of amplification factors of SIF with staggered distance ratio between cracks ( $s = -a$ )

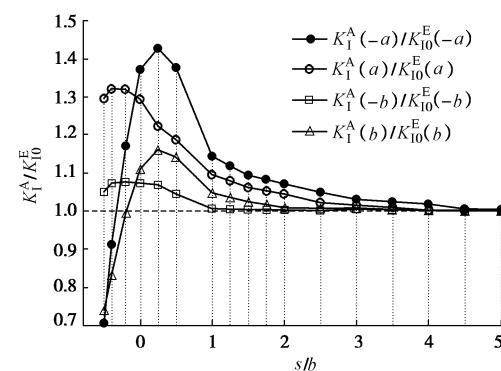


图9 卸荷条件下应力强度因子放大系数随岩桥长度比的变化规律 ( $h = a$ )

Fig. 9 Variation of amplification factors of SIF with length ratio of rock bridge between the cracks under unloading conditions

由于图2中裂隙2的长度大于裂隙1的长度, 因此本文视裂隙2为主控裂隙(简称主裂隙), 裂隙1为次控裂隙(简称次裂隙)。根据图8可知: 当岩桥长度比一定时( $s = -a$ , 主次裂隙重叠), 随着裂隙错距

的逐渐增大, 主裂隙外尖端和次裂隙外尖端受到的 I 型强化作用以及主裂隙内尖端和次裂隙内尖端受到的 I 型屏蔽作用逐渐减弱, 并最终进入零效应区, 相互之间无影响, 说明主次裂隙之间的裂隙错距越小, 裂隙尖端处的强化与屏蔽作用愈显著; 曲线随裂隙错距的变化逐渐变缓, 说明主次裂隙之间的裂隙错距越小, 裂隙尖端处的相互作用变化愈剧烈。根据图 9 可知: 当裂隙错距比一定时 ( $h=a$ ), 随着岩桥长度的逐渐增大, 主裂隙外尖端和次裂隙外尖端受到的 I 型强化作用逐渐减弱, 并最终进入零效应区, 主裂隙内尖端和次裂隙内尖端受到的 I 型屏蔽作用逐渐减弱并转化为强化作用, 随着岩桥长度的增大, 应力强度因子放大系数开始减小并逐渐趋近于 1.0, 即裂隙尖端的强化作用开始减弱, 逐渐进入零效应区, 说明主次裂隙之间的岩桥长度越小, 曲线随岩桥长度的变化逐渐变缓, 裂隙尖端处的相互作用变化愈剧烈。

### 2.3 裂隙长度的影响

令  $\alpha=90^\circ$ ,  $\beta=0^\circ$ ,  $h/b=1$ , 则裂隙 2 内外尖端应力强度因子放大系数  $K_1^A/K_{10}^E$  随  $a/b$  (裂隙长度比) 的变化规律如图 10 所示。根据图 10 中的曲线 2 和 4 可知: 随着裂隙 1 的长度不断增大, 裂隙 2 外尖端受到的强化作用逐渐增强, 且当岩桥长度较小 ( $s/b=0$ ) 时强化作用更为显著; 由曲线 1 和 3 可知: 当岩桥长度较大 ( $s/b=0.8$ ) 时, 裂隙 2 内尖端始终受强化作用, 且随着裂隙 1 的长度的不断增大, 强化作用逐渐增强, 当岩桥长度较小 ( $s/b=0$ ) 时, 裂隙 2 内尖端受到屏蔽作用, 且当裂隙 1 长度增大至一定值时, 该屏蔽作用逐渐减弱并逐渐转化成随裂隙 1 长度增大而不断增强的强化作用; 由曲线 1 和 2 可知: 当岩桥长度较大 ( $s/b=0.8$ ) 时, 随着裂隙 1 的长度的逐渐增大, 裂隙 2 内尖端受到的强化作用始终强于外尖端。综上分析可知: 随着裂隙长度的增大, 裂隙尖端的相互作用范围 (强化区与屏蔽区范围) 会随之变大, 且离裂隙尖端一定距离的位置可在 3 种效应 (屏蔽区、强化区和零效应区) 之间相互转化, 裂隙越长, 裂隙之间的相互作用影响越显著。

### 2.4 裂隙倾角 $\alpha$ 的影响

令  $b=a$  (等长裂隙)、 $h/b=0.5$ , 则裂隙 1 内尖端 I 型应力强度因子放大系数  $K_1^A(-a)/K_{10}^E(-a)$  随裂隙倾角  $\alpha$  的变化规律如图 11 所示。从图中可知: 随着平行裂隙倾角的不断增大, 裂隙 1 内尖端受到的 I 型屏蔽作用逐渐减弱, II 型屏蔽作用逐渐增强, 表明裂隙 1 的 I 型屏蔽区随倾角增大而减小, II 型屏蔽区随倾角增大而增大, 说明裂隙尖端张拉破坏的趋势愈发明显, 而剪切破坏趋势减弱; 当裂隙错距一定时, 岩桥长度越大, 曲线越平缓, 即岩桥长度越小, 裂隙

尖端处应力强度因子放大系数随倾角变化越剧烈, 说明岩桥长度越大, 应力强度因子放大系数受裂隙倾角的影响越敏感。由于裂隙 1 外尖端及裂隙 2 内外尖端处应力强度因子放大系数随裂隙倾角  $\alpha$  的变化规律相类似, 这里不再赘述。

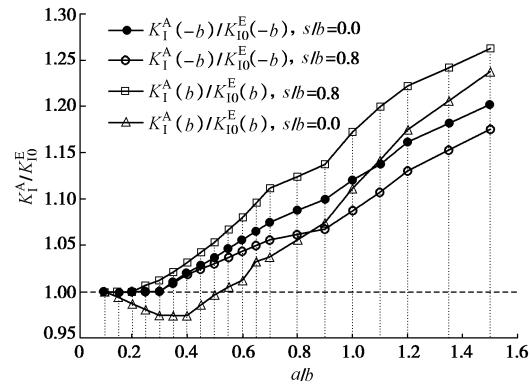


图 10 卸荷条件下应力强度因子放大系数随裂隙长度比的变化规律

Fig. 10 Variation of amplification factors of SIF with crack length ratio under unloading conditions

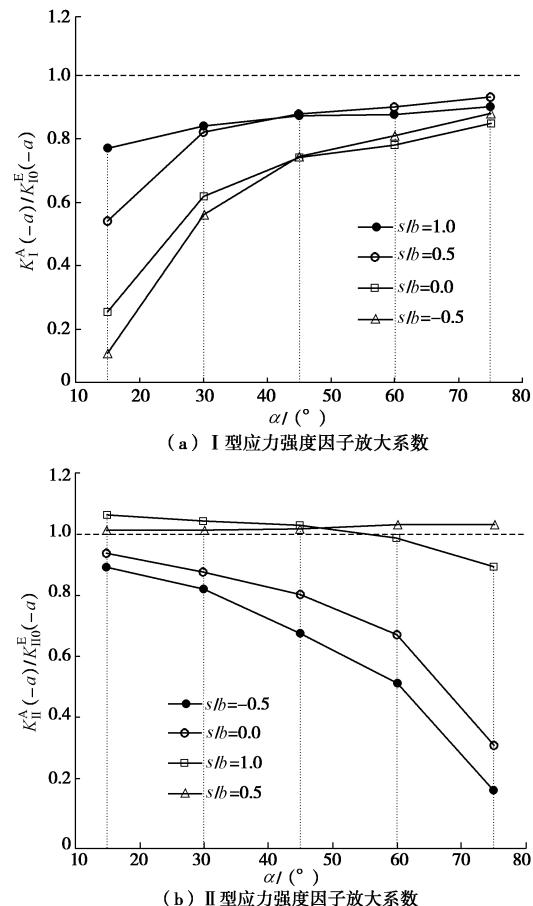


图 11 卸荷条件下应力强度因子放大系数随裂隙倾角  $\alpha$  的变化规律

Fig. 11 Variation of amplification factors of SIF with crack angle  $\alpha$  under unloading conditions

### 3 含平行偏置双裂隙类岩石试件卸荷试验

#### 3.1 试样制备与试验布置

由于浇筑工艺简便、成型快、价格低廉、获取方便、易于对比等诸多优点, 本次试验采用类岩石材料预制含裂隙的岩样试件来验证上述理论分析的准确性。类岩石材料选用425硅酸盐水泥、标准砂和水混合制成的水泥砂浆, 质量比为水泥:砂:水=1:2.35:0.5, 如图12所示。

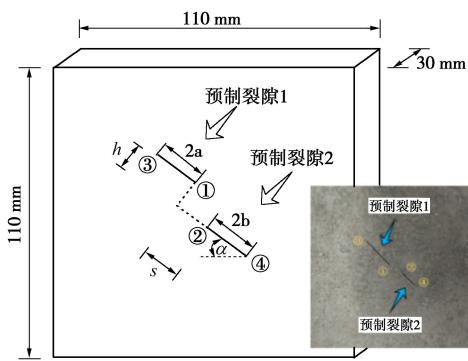


图12 试件尺寸示意图

Fig. 12 Sketch of specimen dimensions

按照国际岩石力学学会的有关标准, 将试件尺寸加工为 $110\text{ mm} \times 110\text{ mm} \times 30\text{ mm}$ , 含两条厚度为 $0.5\text{ mm}$ 的薄不锈钢片预制而成的非贯通平行裂隙, 其中①端和②端分别为预制裂隙1和预制裂隙2的内尖端, ③端和④端分别为两条裂隙的外尖端, 岩桥长度 $s$ 为①端和②端沿裂隙方向的间距, 裂隙错距 $h$ 为①端和②端沿垂直于裂隙方向的间距。养护好的完整水泥砂浆试件的力学参数如表2所示, 可以发现本文所制作的试件模型在力学性能上与砂岩很接近。为了研究卸荷条件下平行偏置双裂隙内尖端的裂隙错距 $h$ 、岩桥长度 $s$ 、裂隙倾角 $\alpha$ 及裂隙长度 $b$ 对两条裂隙在扩展过程中的相互作用影响规律, 本次试验制作了多组试件。根据试验前RFPA<sup>2D</sup>数值模拟计算结果的不断校核与比对, 试验中各组试件最终设定的裂隙相关几何参数如表3所示。

表2 砂岩与试件的力学参数对照表

Table 2 Mechanical properties of sandstone and specimens

材料	密度 /(kg·m <sup>-3</sup> )	单轴抗压 强度/MPa	单轴抗拉 强度/MPa	弹性模 量/GPa	泊松比
砂岩	2000~2600	20~200	4~25	10~100	0.2~0.3
试件	2350	52.32	5.06	15.21	0.23

表3 试件中裂隙的相关几何参数

Table 3 Geometric parameters of cracks in specimens

试件 编号	裂隙倾角 $\alpha/(\text{°})$	裂隙1长 度 $2a$ /mm	裂隙2长 度 $2b$ /mm	岩桥长 度 $s/\text{mm}$	裂隙错 距 $h$ /mm
1	45	12	24	-12	6
2	45	12	24	-12	12
3	45	12	24	-12	24
4	45	12	24	12	6
5	45	12	36	12	6
6	30	12	24	12	6
7	75	12	24	12	6

注:  $s$ 为负值时代表裂隙之间存在搭接部分。

本次试验基于图1所示边坡中的“关键块体”开挖前后的应力路径, 从平面应变的角度(不考虑中间主应力 $\sigma_2$ 的影响), 利用双轴加卸载试验模拟了边坡在开挖卸荷过程中内部非贯通断续节理的扩展情况。试验系统采用中国矿业大学(北京)深部岩土力学与地下工程国家重点实验室自主研发的MS-500型三轴冲击岩爆试验系统, 如图13所示, 加载系统三向独立, 可实现三向异步加、卸载, 又可三向或其中任意两向同步加、卸载。试验过程中采用SA-5型高速数字摄影机和应力-应变监测系统对岩样的破裂过程进行拍摄和图像采集。

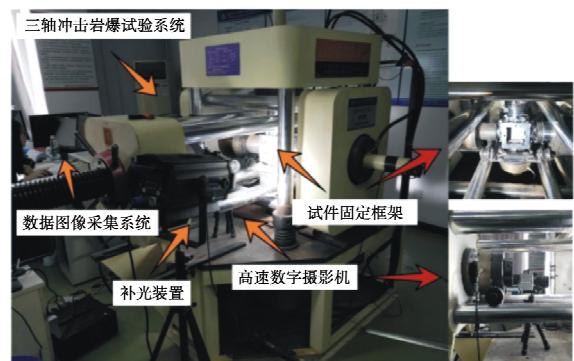


图13 试验装置

Fig. 13 Experimental devices

#### 3.2 试验方案

考虑本次试验为平面应变问题, 试验的具体方案如下: ①如图14(a)所示, 首先在位移加载控制的方式下将轴向压力 $\sigma_1$ 和水平向压力 $\sigma_3$ 同时以 $0.004\text{ mm/s}$ 的速率加载至 $1\text{ MPa}$ , 双向位移锁定( $0 \leq t < t_2$ )。②在荷载加载控制的方式下分别以 $0.5\text{ kN/s}$ 的速率将轴向压力 $\sigma_1$ 和水平向压力 $\sigma_3$ 同时加载至 $15\text{ MPa}$ ( $t_2 \leq t < t_3$ ), 水平向压力 $\sigma_3$ 达到预定值, 双向保载 $1\text{ min}$ ( $t_3 \leq t < t_4$ )。③保持水平向压力不变, 在荷载加载控制的方式下以 $0.5\text{ kN/s}$ 的速率将轴向压力 $\sigma_1$ 加载至 $20\text{ MPa}$ ( $t_4 \leq t < t_5$ ), 轴向压力 $\sigma_1$ 达到预定值, 双向保载 $1\text{ min}$ ( $t_5 \leq t < t_6$ )。④如图14(b)

所示, 在荷载加载的控制方式下以  $0.5 \text{ kN/s}$  的速率增大轴向压力  $\sigma_1$ , 同时以  $0.5 \text{ kN/s}$  的卸载速率对水平方向  $\sigma_3$  进行卸载, 直至试件发生破坏, 试验结束 ( $t_6 \leq t < t_7$ )。

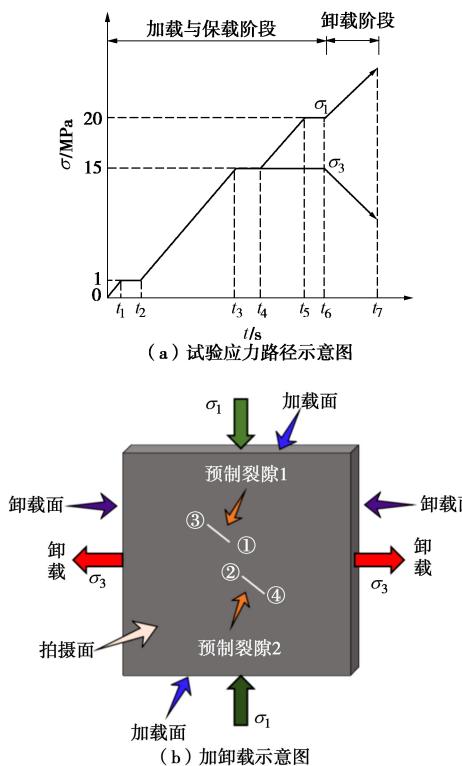


图 14 试验应力路径示意图

Fig. 14 Sketch of experimental stress path

### 3.3 试验结果分析

#### (1) 裂隙扩展相互作用规律分析

由于篇幅所限, 这里仅展示试件 1, 3, 4 和 7 的裂隙扩展过程, 如图 15~18 所示。

由图 15, 16 和图 17 可知: 试件 1 与试件 3 的岩桥长度相等, 均为  $-12 \text{ mm}$ , 裂隙错距不同, 分别为  $6 \text{ mm}$  和  $24 \text{ mm}$ ; 试件 1 与试件 4 的裂隙错距相等, 均为  $6 \text{ mm}$ , 岩桥长度不同, 分别为  $-12 \text{ mm}$  和  $12 \text{ mm}$ 。随着水平方向  $\sigma_3$  的不断卸载, 试件 1 中的主裂隙外尖端 (④端) 由于处在次裂隙的屏蔽区之外, 受次裂隙的影响较小, 所以最先起裂, 随着卸载的持续进行, 处于次裂隙屏蔽区范围内的主裂隙内尖端 (②端) 与处于主裂隙屏蔽区范围内的次裂隙外尖端 (③端) 也相继起裂并不断扩展直至岩桥贯通, 最终模型因主裂隙外尖端与次裂隙外尖端翼裂隙沿最大主应力方向的持续扩展而破坏, 整个过程中处于主裂隙屏蔽区内的次裂隙内尖端 (①端) 始终未起裂, 主要是因为主裂隙对次裂隙内尖端的屏蔽作用强于其对次裂隙外尖端的屏蔽作用所致; 与试件 1 不同, 试件 3 (见图 16) 主次裂隙的裂隙错距增大了  $18 \text{ mm}$ , 试件 3 中次裂

隙内尖端 (①端) 在卸载过程中发生了起裂并逐渐萌生成翼裂隙与主裂隙内尖端 (②端) 贯通, 主要是因为裂隙错距的增大, 使得主次裂隙间的屏蔽作用减弱, 次裂隙内尖端受主裂隙的屏蔽影响较小的缘故, 与 2.2 中的分析结论一致; 与试件 1 不同, 试件 4 (见图 17) 中次裂隙内尖端 (②端) 在卸载过程中发生了起裂并逐渐萌生成翼裂隙与主裂隙内尖端 (①端) 贯通, 主要是因裂隙间岩桥长度的增大, 使得主次裂隙间的屏蔽作用消失, 转化为强化作用, 次裂隙内尖端受主裂隙的强化影响所致, 与 2.2 节中的分析结论一致。

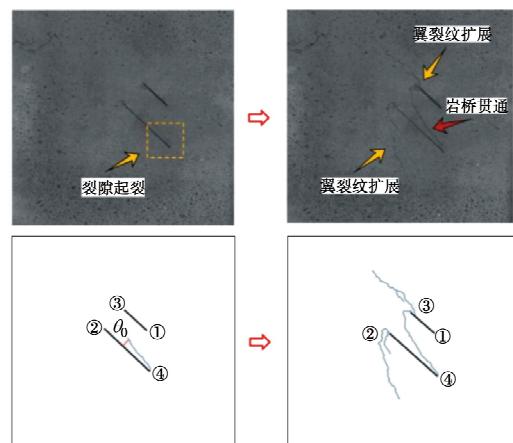


图 15 试件 1 的裂隙扩展过程

Fig. 15 Crack propagation process of specimen 1

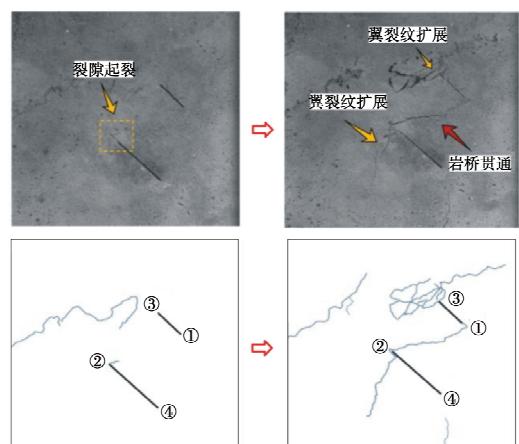


图 16 试件 3 的裂隙扩展过程

Fig. 16 Crack propagation process of specimen 3

由图 17 和图 18 可知: 试件 4 与试件 7 的垂直和岩桥长度均相等, 而裂隙倾角不同, 分别为  $75^\circ$  和  $45^\circ$ , 随着水平方向的不断卸载, 试件 7 中次裂隙内尖端 (①端) 最先起裂并形成拉裂隙, 随后主裂隙外尖端 (④端)、主裂隙内尖端 (②端) 也相继起裂, 沿近乎垂直于原裂隙的方向扩展, 形成水平拉裂隙, 试件最终破坏时岩桥并未发生剪切贯通, 这是因为随着裂隙倾角的增大, 主次裂隙内尖端受到的 I 型屏蔽作用逐渐减弱, II 型屏蔽作用逐渐增强, 裂隙尖端张拉

破坏的趋势愈发明显, 而剪切破坏趋势减弱所致, 与2.4中的分析结论一致。

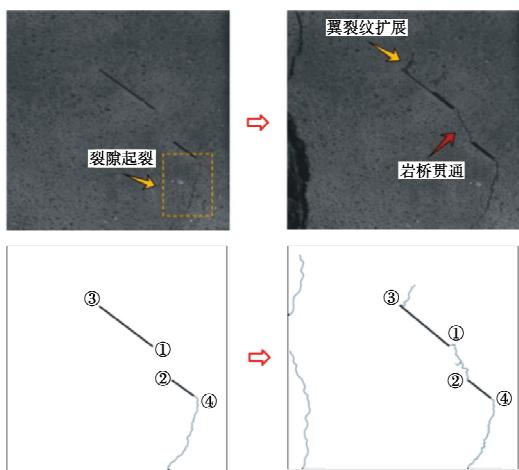


图 17 试件 4 的裂隙扩展过程

Fig. 17 Crack propagation process of specimen 4

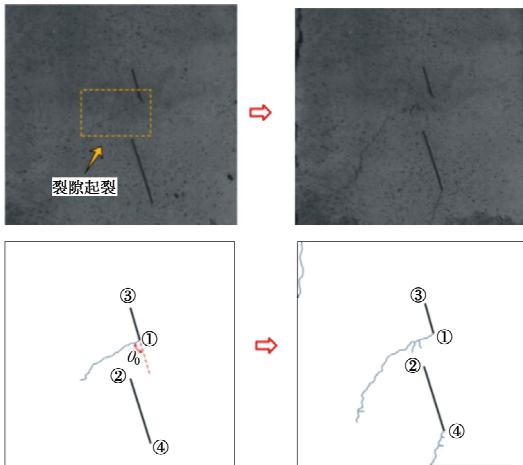


图 18 试件 7 的裂隙扩展过程

Fig. 18 Crack propagation process of specimen 7

试件在卸载过程中, 随着时间  $t$  的增长, 侧向水平围压逐渐降低, 即

$$\sigma_{3t} = \sigma_{3c} - \dot{\sigma}t \quad , \quad (13)$$

式中,  $\sigma_{3t}$  为卸载过程中  $t$  时刻的水平向围压;  $\sigma_{3c}$  为初始加载时的水平向围压;  $\dot{\sigma}$  为卸载速率 (MPa/s)。将高速数字摄影机记录下的裂隙起裂时间  $t_1$  代入式

(13), 可以近似地确定岩体中裂隙起裂时的水平向应力值  $\sigma_{3t_1} = \sigma_{3c} - \dot{\sigma}t_1$ 。

根据最大周向理论, 含裂隙岩体中裂隙尖端的扩展起裂角  $\theta_0$  满足<sup>[15]</sup>:

$$\theta_0 = 2 \arctan \frac{1 - \sqrt{1 + 8(K_{II}^A / K_I^A)^2}}{4(K_{II}^A / K_I^A)} \quad , \quad (14)$$

式中,  $K_I^A$ ,  $K_{II}^A$  分别为卸荷条件下双裂隙岩体应力状态 I 型和 II 型应力强度因子, 可通过式(9)和(10)计算求得。根据文献[12, 15], 在某种意义上可将 I-II

复合型裂隙等效为纯 I 型裂隙, 则此时裂隙尖端的临界起裂条件为

$$K_e^A = \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\theta_0}{2} \cdot [K_I^A (1 + \cos \theta_0) - 3K_{II}^A \sin \theta_0] = K_{lc} \quad , \quad (15)$$

式中,  $K_e^A$  为卸荷条件下等效纯 I 型裂隙尖端应力强度因子,  $K_{lc}$  为材料的断裂韧度 (本文中相似材料的断裂韧度为  $0.51 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ )。则根据上述理论分析方法计算得到的不同试件在卸荷条件下的轴向起裂应力  $\sigma_{lt}$  与卸载过程中测得的裂隙实际轴向起裂应力  $\sigma_{ls}$  如表 4 所示。

表 4 卸荷条件下不同试件的裂隙轴向起裂应力

Table 4 Axial-initiation stresses of cracks in different specimens under unloading conditions

试件 编号	起裂位置	理论轴向 起裂应力 $\sigma_{lt}/\text{kN}$	实际轴向 起裂应力 $\sigma_{ls}/\text{kN}$	相对误差 $W_2/\%$
1	主裂隙外尖端	89.03	85.17	4.5
2	主裂隙内尖端	93.16	89.71	3.8
3	主裂隙内尖端	96.11	92.13	4.3
4	次裂隙外尖端	85.64	83.52	2.5
5	次裂隙内尖端	83.25	79.68	4.5
6	主裂隙内尖端	86.22	82.33	4.7
7	次裂隙内尖端	97.17	94.28	3.1

注:  $W_2 = |\sigma_{lt} - \sigma_{ls}| / \sigma_{ls}$ 。

由表 4 可知: 裂隙理论轴向起裂应力  $\sigma_{lt}$  与实际轴向起裂应力  $\sigma_{ls}$  两者相对误差比例  $W_2$  均在 4.7% 以内, 说明利用本文中的理论公式计算裂隙的临界起裂应力是合理可行的。

## 4 结 论

本文基于叠加原理与经典 Kachanov 法, 对卸荷条件下的平行偏置双裂隙的扩展规律与相互作用影响规律行了理论分析, 并通过类岩石材料卸荷试验进行了验证, 得到以下 4 点结论:

(1) 裂隙间的裂隙错距和岩桥长度的对裂隙间的相互作用规律有着重要的影响: 主次裂隙之间的裂隙之间的裂隙错距或岩桥长度越小, 裂隙尖端处的相互作用 (强化作用或屏蔽作用) 变化愈剧烈。

(2) 裂隙长度对裂隙间的相互作用规律有着重要的影响: 随着裂隙长度的增大, 裂隙尖端的相互作用范围会随之变大, 裂隙之间的相互作用影响越显著, 且离裂隙尖端一定距离的位置可在 3 种效应(屏蔽区、强化区和零效应区) 之间相互转化。

(3) 裂隙倾角对裂隙间的相互作用规律有着重要的影响: 随着裂隙倾角的增大, 裂隙尖端张拉破坏的趋势愈发明显, 而剪切破坏趋势减弱, 且裂隙间的岩桥长度越大, 裂隙倾角对裂隙尖端处相互作用的影响

越显著。

(4)本文从理论上计算了不同试件在侧向卸荷条件下的裂隙临界起裂应力,通过与卸荷试验测得的裂隙实际起裂应力进行比较发现,两者相对误差均在4.7%以内,说明利用本文中的理论公式计算裂隙的临界起裂应力是合理可行的。

## 参考文献:

- [1] HUANG D, CEN D F, MA G W, et al. Step-path failure of rock slopes with intermittent joints[J]. *Landslides*, 2015, **12**(5): 911 - 926.
- [2] TANG C A, LIN P, WONG R H C, et al. Analysis of crack coalescence in rock-like materials containing three flaws—Part II: Numerical approach[J]. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 2001, **38**(7): 925 - 939.
- [3] BOBET A, EINSTEIN H H. Fracture coalescence in rock-type materials under uniaxial and biaxial compression[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 1998, **35**(7): 863 - 888.
- [4] WONG R H C, CHAU K T. The coalescence of frictional cracks and the shear zone formation in brittle solids under compressive stresses[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 1997, **34**(3): 335.
- [5] 杨圣奇. 断续三裂隙砂岩强度破坏和裂隙扩展特征研究[J]. 岩土力学, 2013, **34**(1): 31 - 39. (YANG Sheng-qi. Study of strength failure and crack coalescence behavior of sandstone containing three pre-existing fissures[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2013, **34**(1): 31 - 39. (in Chinese))
- [6] 赵程, 鲍冲, 田加深, 等. 基于应变局部化的双裂纹岩样贯通模式及强度试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2015, **34**(11): 239 - 2318. (ZHAO Cheng, BAO Chong, TIAN Jia-shen, et al. Experimental study of coalescence mode of cracks and strength of rock with double flaws based on strain localization[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2015, **34**(11): 2309 - 2318. (in Chinese))
- [7] 黄达, 金华辉, 黄润秋. 拉剪应力状态下岩体裂隙扩展的断裂力学机制及物理模型试验[J]. 岩土力学, 2011, **32**(4): 997 - 1002. (HUAND Da, JIN Hua-hui, HUANG Run-qiu. Mechanism of fracture mechanics and physical model test of rocks crack expanding under tension-shear stress[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2011, **32**(4): 997 - 1002. (in Chinese))
- [8] 刘磊, 贾洪彪, 马淑芝. 考虑卸荷效应的岩质边坡断裂损伤模型及应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2015, **34**(4): 747 - 754. (LIU Lei, JIA Hong-biao, MA Shu-zhi. A fracture damage model for rock slopes under unloading and its application[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2015, **34**(4): 747 - 754. (in Chinese))
- [9] 黄润秋. 岩石高边坡发育的动力过程及其稳定性控制[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, **27**(8): 1525 - 1544. (HUANG Run-qiu. Geodynamical process and stability control of high rock slope development[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2008, **27**(8): 1525 - 1544. (in Chinese))
- [10] 何庆芝, 邝正能. 工程断裂力学[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1993. (HE Qing-zhi, LI Zheng-neng. *Engineering Fracture Mechanics*[M]. Beijing: Beihang University Press, 1993. (in Chinese))
- [11] KACHANOV M. A simple technique of stress analysis in elastic solids with many cracks[J]. *International Journal of Fracture*, 1985, **28**(1): 11 - 19.
- [12] 席婧仪, 陈忠辉, 朱帝杰, 等. 岩石不等长裂纹应力强度因子及起裂规律研究[J]. 岩土工程学报, 2015, **37**(4): 727 - 733. (XI Jing-yi, CHEN Zhong-hui, ZHU Di-jie, et al. Stress intensity factors and initiation of unequal collinear cracks in rock[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2015, **37**(4): 727 - 733. (in Chinese))
- [13] 中国航空研究院. 应力强度因子手册(修订版)[M]. 北京: 科学出版社, 1996: 38 - 39. (Chinese Aeronautical Establishment. *Handbook of Stress Intensity Factors (Revised Edition)*[M]. Beijing: SciencePress, 1996: 38 - 39. (in Chinese))
- [14] 宋彦琦, 李名, 王晓, 等. 基于高速摄影的双预制裂纹大理岩加卸载试验[J]. 岩石力学与工程学报, 2015, **34**(增刊1): 2679 - 2689. (SONG Yan-qi, LI Ming, WANG Xiao, et al. Experimental test on marble containing two pre-existing cracks under loading and unloading conditions based on high-speed photography[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2015, **34**(S1): 2679 - 2689. (in Chinese))
- [15] 范天佑. 断裂理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 73 - 100. (FAN Tian-you. *Theoretical Basis of Fracture*[M]. Beijing: Science Press, 2003: 73 - 100. (in Chinese))