

DOI: 10.11779/CJGE202002006

# 适用于弹黏塑性本构模型的修正切面算法

李 舰<sup>1,2</sup>, 蔡国庆<sup>1,2</sup>, 尹振宇<sup>\*3</sup>

(1. 北京交通大学城市地下工程教育部重点实验室, 北京 100044; 2. 北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044;

3. 香港理工大学土木与环境工程学系, 香港)

**摘 要:** 针对弹黏塑性本构模型将原始切面算法进行了修正。该弹黏塑性本构模型结合了修正剑桥模型和过应力理论。首先对弹黏塑性本构模型的应力-应变关系式进行了调整, 基于过应力理论给出了动态加载面硬化参数的演化方程。其次, 利用切面算法对调整后应力-应变关系式进行了数值实现。在弹性试算过程中, 该算法假设黏塑性应变率为常数, 以此确保时间增量引起的当前应力点与动态加载面间的偏离。在塑性修正过程中, 对动态加载面函数进行泰勒级数展开, 依此获得黏塑性应变率增量。再次, 提出了一种自动分步方法, 有效地稳定了大应变步情况下算法的计算精度和收敛性。最后, 对变应变率的固结试验和三轴剪切不排水试验进行了模拟, 分析了修正切面算法的计算能力。

**关键词:** 黏塑性; 本构模型; 切面算法; 半隐式算法; 数值积分

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2020)02-0253-07

**作者简介:** 李 舰(1985—), 男, 博士, 讲师, 主要从事土的本构模型及其数值计算方面的研究工作。E-mail: jianli@bjtu.edu.cn。

## Modified cutting-plane integration scheme for elasto-viscoplastic models

LI Jian<sup>1,2</sup>, CAI Guo-qing<sup>1,2</sup>, YIN Zhen-yu<sup>3</sup>

(1. Key Laboratory of Urban Underground Engineering of Ministry of Education, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China;

2. School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China; 3. Department of Civil and Environmental Engineering,

The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, China)

**Abstract:** The elasto-viscoplastic model can be regarded as a combination of the modified Cam-clay model and the overstress theory. Firstly, the stress-strain formulas for the model are rearranged, in which an evolution equation for the hardening parameter of dynamic loading surface is deduced based on the overstress theory. Secondly, the rearranged stress-strain formulas are numerically implemented by the cutting-plane integration scheme. In an elastic prediction process, the viscoplastic strain rate is assumed to be constant, which guarantees the deviation of the current stress state from dynamic loading surface due to time increments. In a plastic corrector process, a Taylor series approximation of the dynamic loading function is used to obtain the increment of viscoplastic multiplier rate. Thirdly, an adaptive substepping method is proposed to maintain the accuracy and convergence of the proposed algorithm at a large loading step. Finally, the performances of the modified cutting-plane algorithm are analyzed by the calculated results of step-changed oedometer tests and undrained triaxial tests.

**Key words:** viscoplasticity; constitutive model; cutting-plane algorithm; semi-implicit scheme; numerical integration

## 0 引 言

土的应力-应变关系具有明显的时间相关性, 例如蠕变、应力松弛、应变率效应等<sup>[1-4]</sup>。土的时间相关性会引起地基的次固结沉降、长期强度降低等相关工程问题。为了准确地描述土的时间相关性, 研究者们建立了适用于饱和土的弹黏塑性本构模型<sup>[5-11]</sup>, 并利用模型对与土的时间相关性有关的岩土工程问题开展了模拟研究。当选取弹黏塑性本构模型开展有限元分析时, 需要根据每一高斯点的状态变量、应变增量和时间增量确定应力增量。依据求解方法的不同, 一般

弹塑性本构模型的应力积分算法可分为显式、隐式积分算法。显式算法需要利用增量步起始点的应力计算屈服面和塑性势函数的梯度, 从而本构矩阵可直接给出。因此, 显式算法代码易编写, 然而其计算精度较低。隐式算法需要利用未知的应力来确定屈服面和塑性势梯度, 从而本构矩阵亦是未知的。因此, 隐式算法需要利用迭代法求解本构方程。迭代过程增加了数

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金项目(2019JBM083)

收稿日期: 2019-07-07

\*通信作者(E-mail: zhenyu.yin@polyu.edu.hk)

值实现的难度。然而,隐式算法计算准确,全局收敛速度快。

Ortiz 等<sup>[12]</sup>针对弹塑性模型框架提出了切面(cutting-plane)算法,该算法属于半隐式算法。该算法的计算步骤与一般的隐式算法一致,可分解为弹性试算和塑性修正阶段。在塑性修正阶段,区别于隐式算法,半隐式算法的试算应力的回归映射方向是已知应力点的塑性势函数的梯度。这避免了迭代过程需要利用屈服面函数、塑性势函数对应力、硬化参数的二阶导数,降低了数值实现的难度。并且,半隐式算法和隐式算法均具有二阶收敛的速度。

对于率无关的弹塑性本构模型而言,需要利用一致性条件确定塑性算子的大小。一致性条件亦成为隐式算法中塑性修正完成的判据。然而,弹黏塑性本构模型不需要一致性条件,塑性算子多基于过应力理论<sup>[13]</sup>确定而得。由于两类模型框架间的差异,过去几十年间不同学者针对弹黏塑性本构模型提出了不同类型的积分算法。Katona<sup>[14]</sup>针对一适用于岩土材料的弹黏塑性盖帽模型提出了单参数积分算法。参数 $\theta$ 控制着显式算法与隐式算法间的转换。当 $\theta=0$ 时,算法退化为显式类型;当 $\theta=1$ 时,算法退化为基于 Newton-Raphson 迭代方法的隐式类型。其次,基于 Borja<sup>[15]</sup>提出的最近点映射隐式算法,Stolle 等<sup>[16]</sup>对适用于软黏土的弹黏塑性盖帽模型进行了数值实现。再次,Ortiz 等<sup>[12]</sup>和 Higgins 等<sup>[17]</sup>将切面隐式算法扩展至弹黏塑性本构模型。Yin 等<sup>[18]</sup>在高斯点尺度和有限元尺度比较了上述典型的适用于弹黏塑性本构模型的隐式算法的计算精度和收敛性。结果表明,切面算法虽然易于数值实现,然而其计算精度和收敛性远劣于其他隐式算法的。如果能有效地提高计算精度和收敛性,切面算法将会很受欢迎。

为此,本文旨在保留切面算法优势的前提下,针对弹黏塑性本构模型提出一种结合自动分步方法的修正切面算法。首先,对弹黏塑性本构模型进行简单介绍。其次,从本构模型框架、弹性预测、塑性修正、分步方法等方面提出修正切面算法的具体推导和细节。最后,以变应变速率的固结试验和三轴试验模拟为例,分析修正切面算法的计算能力。

## 1 弹黏塑性模型

本文对一个具有代表性的简单弹黏塑性本构模型进行数值实现。该模型根据 Yin 等<sup>[5-6]</sup>提出的 ANICREEP 模型简化而得,忽略了原有模型中考虑各向异性、结构性的因素。简化的模型保留了原模型的基本框架,即结合了修正剑桥模型和过应力理论<sup>[13]</sup>,并可称之为基于修正剑桥模型的弹黏塑性模型

(elasto-viscoplastic modified Cam-Clay model, EVP-MCC)。模型框架如下所述。

总应变速率张量 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 分解为弹性和黏塑性两部分,即

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}, \quad (1)$$

式中,上标 $e$ 和 $vp$ 分别代表弹性和黏塑性部分。弹性部分的表达式与修正剑桥模型一致。黏塑性应变速率张量定义为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \mu \langle \Phi \rangle f_{d,\sigma'} \quad (2)$$

式中 $\mu$ 为流变参数; $\Phi$ 为过应力函数,与动态加载面和参考面间的距离相关; $f_d$ 为过当前应力点的动态加载面函数; $\sigma'$ 为有效应力张量,定义为 $\sigma' = \sigma - u_w \delta$ ;  $\sigma$ 为总应力张量; $u_w$ 为孔隙水压力; $\delta$ 为 Kronecker 符号; $f_{d,\sigma'}$ 为动态加载面函数对应力张量的导数。

过应力函数定义为

$$\Phi = (p_m^d / p_m^r)^\beta, \quad (3)$$

式中, $p_m^d$ 和 $p_m^r$ 分别代表动态加载面 $f_d$ 和参考面 $f_r$ 的大小,如图1所示, $\beta$ 为应变速率系数。参数 $\mu$ 和 $\beta$ 可根据次固结系数 $C_{\alpha c}$ 确定<sup>[5-6]</sup>。

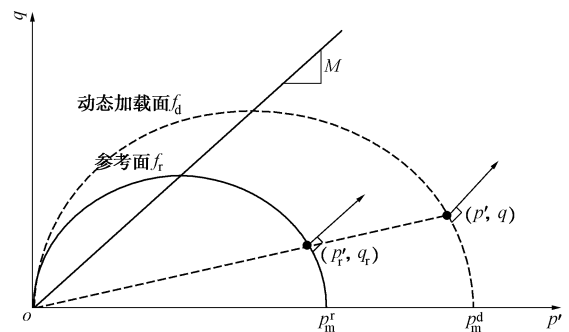


图1 EVP-MCC 模型的动态加载面和参考面

Fig. 1 Dynamic loading surface and reference surface of EVP-MCC model

在 $p' - q$ 坐标系中,过当前应力点的动态加载面 $f_d$ 具有椭圆形状(如图1所示),其表达式为

$$f_d = q^2 / M^2 p' + p' - p_m^d = 0 \quad (4)$$

其中, $M$ 为三轴压缩条件下 $p' - q$ (平均有效应力-偏应力)坐标系中临界状态线的斜率。参考面 $f_r$ 具有与动态加载面 $f_d$ 相同的形状,其硬化参数 $p_m^r$ 的演化方程,即硬化方程为

$$dp_m^r = p_m^r [(1 + e_0) / (\lambda - \kappa)] d\varepsilon_v^{vp} \quad (5)$$

式中 $e_0$ 为初始孔隙比; $\lambda$ 和 $\kappa$ 分别为正常固结线和回弹曲线的斜率; $d\varepsilon_v^{vp}$ 为黏塑性体应变增量。

## 2 修正切面算法

### 2.1 原始切面算法的局限性

率无关的弹塑性模型中假设对于每一个时间增量,材料有足够松弛时间,塑性应变发生完全。这一假设确保经松弛后的应力状态落在屈服面上。因此,

率无关的弹塑性模型框架中, 塑性应变增量的大小需要根据一致性条件确定。并且, 当前应力点位于屈服面上是隐式算法中塑性阶段判断迭代完成的判据。

对于弹黏塑性模型而言, 应力松弛时间为真实时间, 塑性应变发生不完全。如式 (2), (3) 所示, 黏塑性应变率由过应力函数确定。这意味着即使在加载阶段, 当前应力点不须要位于参考面上。因此, 弹黏塑性模型的隐式算法的迭代完成判据不同于弹塑性模型的。并且, 弹黏塑性模型的隐式算法中须要考虑时间的影响。由于弹塑性模型与弹黏塑性模型框架间的差异, Ortiz 等<sup>[12]</sup>和 Higgins 等<sup>[17]</sup>提出了适用于弹黏塑性模型的切面算法, 本文将其称之为原始切面算法。

同其他隐式算法一致, 该算法亦分解为弹性预测和塑性修正阶段。对于适用于率无关的弹塑性模型的切面算法, 在塑性修正阶段进行第  $i$  迭代步时, 须要对屈服函数  $f^{i+1}$  进行泰勒级数展开。由于屈服函数  $f$  的目标值是 0, 因此假设  $f^{i+1} = 0$ 。依据当前步屈服函数取值  $f^i$  便可以计算修正塑性算子量, 进而更新应力和硬化参数。然而, 对于弹黏塑性本构模型的原始切面算法, 在进行第  $i$  迭代步时, 对过应力函数  $\Phi^{i+1}$  进行了泰勒级数展开。对于给定的时间增量步,  $\Phi$  的目标值并不是 0。 $\Phi$  的目标值随时间增量步的大小而变, 并且对于任一增量步而言不是已知条件。原始切面算法中假设  $\Phi^{i+1} = 0$ 。该假设显然并不合理, 并导致使算法计算精度低, 收敛速度慢<sup>[18]</sup>。

## 2.2 应力 - 应变关系式

对于切面算法而言, 选取合适的函数对其进行泰勒级数展开是提高适用于弹黏塑性模型的切面算法计算能力的关键。在原始切面算法中, 没有选取参考面函数  $f_r$  进行泰勒级数展开的原因是不能确定  $f_r$  的目标值; 没有选取动态加载面函数  $f_d$  的原因是缺少描述变量  $p_m^d$  的演化方程。

根据黏塑性应变率的定义式和过应力函数的定义式, 即式 (2) 和 (3), 黏塑性算子变化率可表示为

$$\dot{\lambda} = \mu \langle \Phi \rangle = \mu (p_m^d / p_m^r)^\beta \quad (6)$$

根据式 (6), 变量  $p_m^d$  可表示为

$$p_m^d = p_m^r (\dot{\lambda} / \mu)^{1/\beta} \quad (7)$$

根据式 (7) 可以确定  $p_m^d$  的演化方程。其后, 对动态加载面应用一致性便可以获得新的黏塑性算子的表达式。

## 2.3 弹性预测

基于整理的 EVP-MCC 模型的应力 - 应变关系式, 可应用切面算法进行应力积分计算。在有限元计算中对于每一高斯点而言, 应力变量和状态变量是已知的, 应变增量  $\Delta \epsilon$  和时间增量  $\Delta t$  亦是已知的。需要根据已知量计算应力  $\sigma'$  和硬化参数  $p_m^d$  和  $p_m^r$ 。

对于率无关的弹塑性本构模型而言, 在弹性预测阶段假设塑性应变增量  $\Delta \epsilon^p = 0$ , 总应变增量  $\Delta \epsilon$  引起弹性试算应力增量  $\Delta \sigma^r$ , 进而造成试算应力点与屈服面间的偏离。然而, 对于弹黏塑性本构模型而言, 在弹性预测阶段假设  $\Delta \epsilon^p = 0$  不再适用。这是由于对于应力松弛路径, 即  $\Delta \epsilon = 0$  且  $\Delta t \neq 0$  时, 该假设使得  $\Delta \sigma^r = 0$ , 即试算应力点继续位于动态加载面上, 其暗示不需要进行塑性修正。这显然与实际情况不相符。造成这个问题的原因是在弹性预测阶段忽略了  $\Delta t$  的影响。 $\Delta \epsilon$  和  $\Delta t$  作为任一计算步的已知量, 且影响着  $\Delta \epsilon^p$ , 需要在弹性阶段同时考虑两者的影响。

为此, 对于弹黏塑性本构模型而言, 在弹性试算阶段, 假设黏塑性应变变化率  $\dot{\epsilon}^p \neq 0$ 。对于给定增量步, 塑性算子变化率的初值  $\dot{\lambda}^0$  及塑性算子增量的初值  $d\lambda^0$  可表示为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}^0 = \mu (p_m^{d,0} / p_m^{r,0})^\beta, \\ \Delta \lambda^0 = \dot{\lambda}^0 \Delta t. \end{cases} \quad (8)$$

式中, 上角标 0 代表当前增量步的变量初值,  $\Delta t$  为当前增量步的时间增量。

弹性试算应力  $\sigma'^r$  可表示为

$$\sigma'^r = \sigma'^0 + \mathbf{D} : (\Delta \epsilon - \Delta \lambda^0 f_{d,\sigma'}^0) \quad (9)$$

$p_m^{d,r}$  和  $p_m^{r,r}$  可表示为

$$\begin{cases} p_m^{d,r} = p_m^{d,0} + \eta^0 \Delta \lambda^0, \\ p_m^{r,r} = p_m^{r,0} + \iota^0 \Delta \lambda^0. \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{式中, } \eta = \frac{\partial p_m^d}{\partial p_m^r} \frac{\partial p_m^r}{\partial \epsilon_v^p} \frac{\partial f_d}{\partial p'}, \quad \iota = \frac{\partial p_m^r}{\partial \epsilon_v^p} \frac{\partial f_d}{\partial p'}.$$

根据  $\sigma'^r$  和  $p_m^{d,r}$  确定  $f_d^r$ 。当  $f_d^r > F_{\text{TOL}} \cdot p_m^{d,0}$  时, 进入塑性修正阶段; 反之, 更新应力和状态变量, 计算结束。其中,  $F_{\text{TOL}}$  为屈服面误差。屈服面误差  $F_{\text{TOL}}$  的典型取值范围为  $10^{-6} \sim 10^{-9}$ <sup>[19]</sup>。

## 2.4 塑性修正

在塑性修正阶段, 动态加载面函数  $f_d^{i+1}$  的泰勒级数展开式可表示为

$$\begin{aligned} f_d^{i+1} &= f_d^i - f_{d,\sigma'}^i : \mathbf{D} : f_{d,\sigma'}^i d\lambda^i \Delta t + \\ &+ f_{d,p_m^d}^i \zeta^i d\lambda^i + f_{d,p_m^d}^i \eta^i d\lambda^i \Delta t \end{aligned} \quad (11)$$

式中,  $\zeta = \partial p_m^d / \partial \dot{\lambda}$ 。 $f_d$  目标值为 0, 因此假设  $f_d^{i+1} = 0$ 。则式 (11) 整理有

$$d\lambda^i = \frac{f_d^i}{(f_{d,\sigma'}^i : \mathbf{D} : f_{d,\sigma'}^i - f_{d,p_m^d}^i \eta^i) \Delta t - f_{d,p_m^d}^i \zeta^i} \quad (12)$$

其后, 利用塑性算子增量  $d\lambda^i$  更新  $\sigma'$ ,  $p_m^d$  和  $p_m^r$

$$\begin{cases} \sigma'^{i+1} = \sigma'^i - d\lambda^i \Delta t \mathbf{D} : f_{d,\sigma'}^i, \\ p_m^{d,i+1} = p_m^{d,i} + p_m^{d,i} \zeta^i d\lambda^i + p_m^{d,i} \eta^i d\lambda^i \Delta t, \\ p_m^{r,i+1} = p_m^{r,i} + p_m^{r,i} \iota^i d\lambda^i \Delta t. \end{cases} \quad (13)$$

根据更新后的  $\sigma'$  和  $p_m^d$  确定  $f_d^{i+1}$ 。当  $f_d^{i+1} > F_{\text{TOL}}$  ·  $p_m^{d,0}$  时, 进入第  $i+1$  迭代步; 反之, 迭代计算结束。

## 2.5 自动分步方法

算法的计算精度、收敛性会随着计算步长的增加降低。塑性应变增量与应力增加间的非线性关系是影响算法计算能力的主要因素。为了提高算法的计算能力, 可将给定计算步划分为若干个子步, 降低应力 - 应变关系间的非线性程度<sup>[20-21]</sup>。

对于黏塑性本构模型而言, 计算步的大小不仅与  $\Delta \varepsilon$  相关, 而且与  $\Delta t$  相关。为了同时考虑两者的影响, 可定义弹性试算应力增量的模为

$$\|\Delta \sigma^{\text{tr}}\| = \|\sigma^{\text{tr}} - \bar{\sigma}_d'\|, \quad (14)$$

式中,  $\bar{\sigma}_d'$  为映射应力, 对应初始应力在弹性预测调整后的动态加载面上的映射点, 并且  $\bar{\sigma}_d'$  可表示为

$$\bar{\sigma}_d' = (p_m^{\text{dtr}}/p_m^{\text{d0}})\sigma^{\text{r0}}. \quad (15)$$

计算步的大小可表示为

$$k = \|\Delta \sigma^{\text{tr}}\|/\|\sigma^{\text{r0}}\|, \quad (16)$$

式中,  $k$  为分步参数。为了维持算法的计算精度和收敛性需要限制  $k$  的最大值。

结合自动分步方法的修正切面算法的计算流程可整理为: ①设  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_j$  代表分步与当前加载步大小的比值, 变化范围是  $0 \sim 1$ , 下角标  $j$  代表分步步数; ②利用  $\alpha_j \Delta \varepsilon$  和  $\alpha_j \Delta t$  计算  $\sigma_j^{\text{tr}}$ ,  $p_{m,j}^{\text{dtr}}$  和  $p_{m,j}^{\text{rtr}}$ , 并根据  $p_{m,j}^{\text{dtr}}$  计算  $\bar{\sigma}_{d,j}$ ; ③比较  $\|\text{d}\sigma_j^{\text{tr}}\|$  和  $\|\bar{\sigma}_{d,j}\|$ , 如果  $\|\text{d}\sigma_j^{\text{tr}}\|/\|\bar{\sigma}_{d,j}^{\text{r0}}\| > k$ , 则  $\alpha_j = \alpha_j k \|\bar{\sigma}_{d,j}^{\text{r0}}\|/\|\text{d}\sigma_j^{\text{tr}}\|$ , 并返回第②步; ④利用塑性修正步骤计算  $\sigma_j'$ ,  $p_{m,j}^d$  和  $p_{m,j}^{\text{r}}$ ; ⑤检查  $\sum \alpha_j$  是否等于 1, 如果是, 则计算完成, 反之,  $\alpha_{j+1} = 1 - \sum \alpha_j$ , 返回第②步并进行下一分步计算。

## 3 数值计算

为了分析修正切面算法的计算能力, 选取 Saint-Herblain 黏土的变应变率固结试验和固结不排水三轴剪切试验结果进行预测。对不同应变步长下修正切面算法的计算结果进行了比较, 并与不使用分步方法的修正切面算法和原始切面算法的计算结果进行了对比。Saint-Herblain 黏土的模型参数确定步骤见文献[5], 其取值见表 1。此外, 算法中  $F_{\text{TOL}} = 10^{-6}$ ,  $k = 0.1$ 。

表 1 Saint-Herblain 黏土模型参数和状态变量初值

Table 1 Values of parameters and state constants of Saint-Herblain clay

$p_{m0}^{\text{r}}$ /kPa	$e_0$	$\mu$	$\kappa$	$\lambda$	$M$	$C_{\alpha e}$
39	2.26	0.2	0.038	0.48	1.2	0.034

为了确定计算结果的相对误差, 需要获得一组精确解。可取应变步长为 0.0001% 时的计算结果为精确解。相对误差  $E$  定义为

$$E = \sqrt{(E_p^2 + E_q^2)/2}, \quad (17)$$

且

$$\begin{cases} E_p = \sqrt{\sum_{i=1}^N [(p_i' - p_i^{\text{ex}})/p_i^{\text{ex}}]^2} / N, \\ E_q = \sqrt{\sum_{i=1}^N [(q_i - q_i^{\text{ex}})/q_i^{\text{ex}}]^2} / N. \end{cases} \quad (18)$$

式中,  $p^{\text{ex}}$  和  $q^{\text{ex}}$  为精确解,  $N$  为比较应力点的个数。

### 3.1 变应变率的固结试验预测

对于变应变率固结试验, 起始的竖向应力和侧向应力分别是 10 和 4.9 kPa。试验过程中, 土样先后以 0.02%/min, 0.004%/min, 0.02%/min 的应变率固结至 12%, 15.5%, 25% 的轴向应变。固结试验中的竖向应变步长的变化范围分别是 0.01%~1.0%。

图 2 给出了不同加载步长下计算结果的比较。计算结果表明修正切面算法可以处理固结路径下的变应变率情况。图 3 给出了修正切面算法 (modified cutting-plane, MCP)、不考虑分步方法的修正切面算法 (modified cutting-plane without stepping procedure, MCP-w/o) 和原始切面算法 (original cutting-plane, OCP) 在不同加载步长下的计算精度和迭代步数。首先, 对比结果表明在变应变率的固结路径下, 原始切面算法的计算误差和总迭代步数远高于另外两种算法。在比较的计算步长范围内, 原始切面算法的计算误差与另外两种算法的相差 1 个数量级; 原始切面算法的总迭代步数与另外两种算法的相差 1 至 2 个数量级。其次, 在较小加载步长情况, 修正切面算法和不考虑分步方法的修正切面算法的计算误差相近。然而, 随着应变步长的增加, 后者的计算误差大于前者的。再次, 修正切面算法和不考虑分步方法的修正切面算法的总迭代步数相近。最后, 当步长大于等于 0.5% 时, 3 种算法中仅修正切面算法仍收敛。不考虑分步方法的修正切面算法和原始切面算法的计算收敛对应的步长上限分别是 0.1% 和 0.25%。

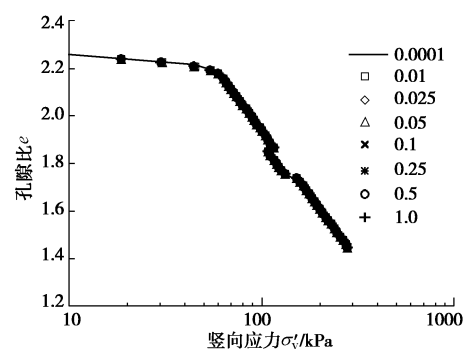


图 2 变应变率固结试验计算结果

Fig. 2 Calculated results of step-changed oedometer tests

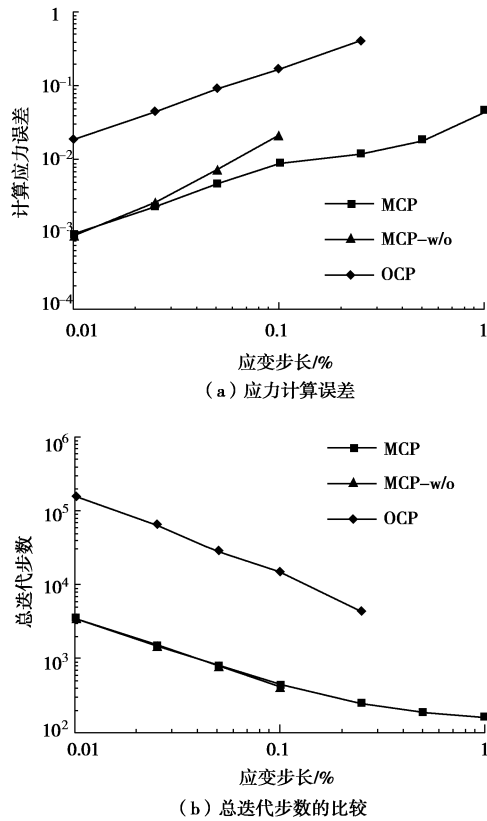


图3 3种算法变应变速率固结试验

Fig. 3 Comparison of calculation errors and total iteration number of three kinds of algorithms for step-changed oedometer tests

### 3.2 变应变速率的三轴试验预测

对于变应变速率固结不排水三轴剪切试验, 土样的起始应力状态与固结试验的一致。在试验过程中, 土样首先固结至轴向应力 86 kPa 和径向应力 77 kPa, 时长 24 h。其次, 土样先后以 1%/h, 0.1%/h, 10%/h 和 0.1%/h 的应变率剪切至 2%, 2.5%, 4.7% 和 6.3% 的轴向应变。三轴剪切试验中轴向应变步长的变化范围是 0.01% 至 1.0%。

图 4 给出了不同加载步长下计算结果的比较。计算结果表明修正切面算法可以处理三轴路径下的变应变速率情况。图 5 给出了修正和原始切面算法在不同加载步长下的计算精度和迭代步数。值得注意的是, 不考虑分步方法的修正切面算法即使在应变步长等于 0.01% 时亦不收敛, 所以没有对其进行比较。三轴路径下两种算法间计算精度和总迭代步数间的差异与固结路径下的一致。在比较的加载应变步长范围内, 原始切面算法的计算误差与修正切面算法的相差 1 个数量级; 原始切面算法的总迭代步数与修正切面算法的相差 1 至 2 个数量级。当步长等于 1.0% 时, 仅修正切面算法仍收敛。

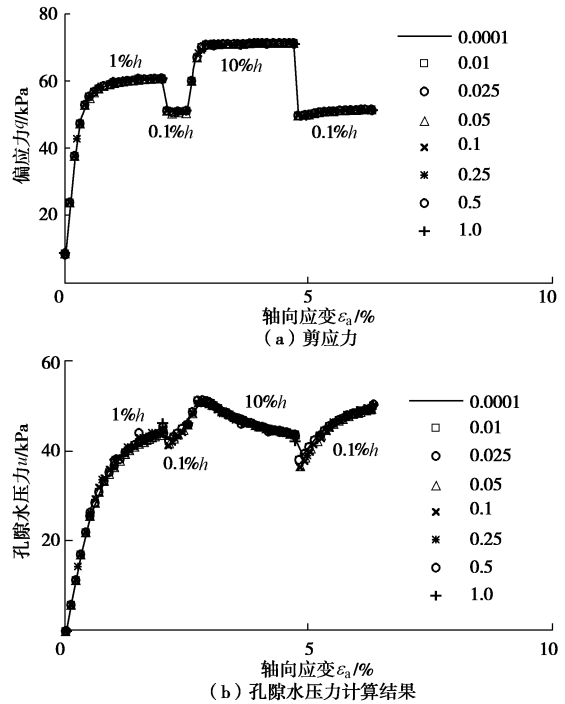


图4 变应变速率三轴剪切不排水试验

Fig. 4 Calculated results of deviatoric stress and pore-water pressure for step-changed undrained triaxial tests

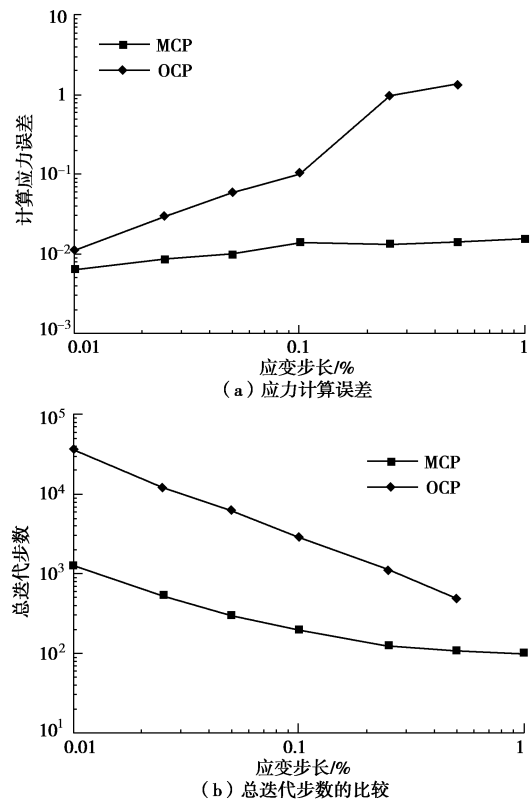


图5 两种算法变应变速率三轴试验

Fig. 5 Comparison of calculation errors and total iteration number of two kinds of algorithms for step-changed undrained triaxial tests

## 4 结 论

本文分析了原始切面算法误差的来源,调整了弹黏塑性本构关系表达式,结合切面算法和自动分布方法对其进行了实现,并对比了修正切面算法、不考虑自动分步方法的修正切面算法和原始切面算法在应变率试验路径下的计算能力。通过研究得到以下4点结论。

(1) 原始切面算法中,选取过应力函数 $\Phi$ 进行泰勒级数展开是不合理的。由于 $\Phi$ 的目标值随时间增量步的大小而变,并且对于任一增量步而言不是已知条件。因此,假设 $\Phi^{i+1}=0$ 致使原始切面算法计算精度低,收敛速度慢。

(2) 为了选取动态加载面函数 $f_d$ 进行泰勒级数展开,基于过应力理论给出了动态加载面硬化参数 $p_m^d$ 的演化方程,并根据动态加载面的一致性条件给出了黏塑性应变率增量 $d\epsilon^p$ 的表达式。调整后的弹黏塑性本构关系式是提出修正切面算法的基础。

(3) 对于弹黏塑性本构模型而言,在弹性预测阶段须要同时考虑 $\Delta\epsilon$ 和 $\Delta t$ 对应力和硬化参数的影响。因此,假设弹性预测阶段黏塑性应变变化率 $\dot{\epsilon}^p \neq 0$ 。在自动分步方法中,利用分步参数 $k$ 控制分步的大小,以维持算法的计算精度和收敛性。

(4) 在应变率的固结和三轴路径下,修正切面算法的计算误差和迭代步数明显低于原始切面算法的,相差1至2个数量级。并且,自动分步方法保证了算法在大加载步情况下的计算能力。

## 参考文献:

- [1] YIN Z Y, ZHU Q Y, YIN J H, et al. Stress relaxation coefficient and formulation for soft soils[J]. Géotechnique Letters, 2014, 4(1): 45 - 51.
- [2] YAO Y P, KONG L M, ZHOU A N, et al. Time-dependent unified hardening model: three-dimensional elastoviscoplastic constitutive model for clays[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2015, 141(6): 0414162.
- [3] 尹振宇, 朱启银, 朱俊高. 软黏土蠕变特性试验研究: 回顾与发展[J]. 岩土力学, 2013, 24(增刊 2): 1 - 17. (YIN Zhen-yu, ZHU Qi-yin, ZHU Jun-gao. Experimental investigation on creep behavior of soft clays: Review and development[J]. Rock and Soil Mechanics, 2013, 24(S2): 1 - 17. (in Chinese))
- [4] 韩 剑, 姚仰平, 尹振宇. 超固结度对超固结饱和黏土不排水蠕变特性的影响研究[J]. 岩土工程学报, 2018, 40(3): 426 - 430. (HAN Jian, YAO Yang-ping, YIN Zhen-yu. Influences of overconsolidation ratio on undrained creep behavior of overconsolidated saturated clay[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2018, 40(3): 426 - 430. (in Chinese))
- [5] YIN Z Y, CHANG C S, KARSTUNEN M, et al. An anisotropic elastic-viscoplastic model for soft clays[J]. International Journal of Solids and Structures, 2010, 47(5): 665 - 677.
- [6] YIN Z Y, KARSTUNEN M, CHANG C S, et al. Modeling time-dependent behavior of soft sensitive clay[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2011, 137(11): 1103 - 1113.
- [7] 殷建华. 等效时间和岩土材料的弹黏塑性模型[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, 18(2): 124 - 128. (YIN Jian-hua. Equivalent time and elastic visco-plastic modelling of geomaterials[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1999, 18(2): 124 - 128. (in Chinese))
- [8] 王立忠, 但汉波.  $K_0$  固结软黏土的弹黏塑性本构模型[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(9): 1344 - 1354. (WANG Li-zhong, DAN Han-bo. Elastic viscoplastic constitutive model for  $K_0$ -consolidated soft clays[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 29(9): 1344 - 1354. (in Chinese))
- [9] 李兴照, 黄茂松, 王录民. 流变性软黏土的弹黏塑性界面本构模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(7): 1393 - 1401. (LI Xing-zhao, HUANG Mao-song, WANG Lu-min. Bounding surface elasto-viscoplastic constitutive model for rheological behaviors of soft clays[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(7): 1393 - 1401. (in Chinese))
- [10] 尹振宇. 天然软黏土的弹黏塑性本构模型: 进展及发展[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(9): 1357 - 1369. (YIN Zhen-yu, Elastic viscoplastic models for natural soft clay: review and development[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, 33(9): 1357 - 1369. (in Chinese))
- [11] 孔令明, 罗 汀, 姚仰平. 率相关本构模型的临界状态描述[J]. 岩土力学, 2015, 36(9): 2442 - 2450. (KONG Ling-ming, LUO Ting, YAO Yang-ping. Description of critical state for rate-dependent constitutive models[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, 36(9): 2442 - 2450. (in Chinese))
- [12] ORTIZ M, SIMO J C. An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations[J]. International Journal for Numerical Methods in

- Engineering, 1986, **23**(3): 353 – 366.
- [13] PERZYNA P. Fundamental problems in viscoplasticity[J]. Advances in Applied Mechanics, 1966, **9**: 243 – 377.
- [14] KATONA M G. Evaluation of viscoplastic cap model[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1984, **110**(8): 1106 – 1125.
- [15] BORJA R I. Cam-clay plasticity: part II implicit integration of constitutive equation based on a nonlinear elastic stress predictor[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1991, **88**: 225 – 240.
- [16] STOLLE D F E, VERMEER P A, BONNIER P G. Time integration of a constitutive law for soft clays[J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 1999, **15**(8): 603 – 609.
- [17] HIGGINS W, CHAKRABORTY T, BASU D. A high strain-rate constitutive model for sand and its application in finite-element analysis of tunnels subjected to blast[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2013, **37**(15): 2590 – 2610.
- [18] YIN Z Y, LI J, JIN Y F, et al. Estimation of robustness of time integration algorithms for elasto-viscoplastic modeling of soils[J]. International Journal of Geomechanics, 2019, **19**(2): 04018197.
- [19] SHENG D, SLOAN S W, GENS A, et al. Finite element formulation and algorithms for unsaturated soils: part I theory[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2003, **27**(9): 745 – 765.
- [20] WANG W, DATCHEVA M, SCHANZ T, et al. A sub-stepping approach for elastoplasticity with rotational hardening[J]. Computational Mechanics, 2006, **37**(3): 266 – 278.
- [21] SLOAN S W. Substepping schemes for the numerical integration of elastoplastic stress-strain relations[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987, **24**(5): 893 – 911.

## 第 29 届全国土工测试学术研讨会通知 (2020 年 7 月 18, 19 日, 呼和浩特) 第 1 号通知

**主办单位:** 中国土木工程学会土力学及岩土工程分会, 中国水利学会岩土力学专业委员会。

**承办单位:** 内蒙古工业大学等。

**协办单位:** 《岩土工程学报》编委会等。

**大会邀请及主题:** 中国土木工程学会土力学及岩土工程分会, 中国水利学会岩土力学专业委员会拟定于 2020 年 7 月在呼和浩特召开“第 29 届全国土工测试学术研讨会”, 会议主题: “岩土工程勘察技术及土工测试新技术、新方法”。中国土木工程学会土力学及岩土工程分会, 中国水利学会岩土力学专业委员会邀请全国相关学科的专家、学者、科技工作者与工程技术人员, 特别是青年岩土工程工作者踊跃撰稿, 集聚呼和浩特, 围绕会议主题探讨与交流土工测试最新研究成果与实践经验。

**会议要点:** 本次学术研讨会组织委员会、学术委员会由承办、协办单位, 学会专委会专家组成。会议将邀请国内著名土工测试专家进行特邀报告和主题报告, 并进行新编《土工试验方法标准》(GB/T50123—2019) 宣贯。

**会议专题:** ①岩土工程勘察技术; ②土基本性质测试; ③

土工物理模型试验; ④土工原测试技术; ⑤现场土工监测技术; ⑥环境土工测试技术; ⑦特殊土性质测试技术; ⑧土工微观测试新技术; ⑨土工测试新型技术设备。

**会议论文与出版:** 会议投稿论文要求为原创、未公开发表的内容, 论文篇幅一般在 5 页以内, 格式请参考《岩土工程学报》。会议期间将通过投票遴选优秀论文推荐到《岩土工程学报》(增刊)(EI 收录)、《地下空间与工程学报》、《内蒙古农业大学学报》、《内蒙古科技大学学报》、《内蒙古工业大学学报》其他论文将在论文集中刊出。

**投稿邮箱:** geotest2020@163.com。

**重要日期:** ①2019 年 12 月 30 日前提交论文全文; ②2020 年 2 月 15 日前返回论文录用通知; ③2020 年 3 月 15 日前返回修改后论文。

**会议联系方式:** 地址: 内蒙古呼和浩特市新城区爱民街 49 号内蒙古工业大学土木工程学院, 邮政编码: 010051, 联系人: 刘俊芳: 18647964316; 杜强: 15560924010; 马建国: 18847187706。

(大会组委会 供稿)