

DOI: 10.11779/CJGE202001008

# 非饱和砂土及黏土的水-力耦合双屈服面模型

李 舰<sup>1</sup>, 刘 凯<sup>2</sup>, 尹振宇<sup>\*2</sup>, 崔玉军<sup>3</sup>, 殷建华<sup>2</sup>

(1. 北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044; 2. 香港理工大学土木与环境工程学系, 香港; 3. 法国国立路桥大学, 巴黎)

**摘 要:** 使用精细的本构模型来同时分析非饱和砂土和黏土水力耦合特性依旧是一个挑战。提出了一种包含加载湿陷及剪切滑移双重塑性机制的水-力耦合模型。力学模型中选取 Bishop 应力作为应力变量, 采用孔隙比和有效饱和度作为状态变量。模型中给出了孔隙比-平均土骨架应力的半对数坐标系内依赖于有效饱和度的临界状态线的表达式, 其与剪切滑动屈服面的非关联流动准则的结合保证了模型可以更合理地预测非饱和土(包括砂土和黏土)的剪胀和剪缩性质。通过模拟粉砂和高岭土的三轴试验, 对该模型预测非饱和土主要特征的能力进行了分析。

**关键词:** 剪胀性; 有效饱和度; 临界状态; 水-力耦合; 非饱和土

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2020)01-0072-09

**作者简介:** 李 舰(1985—), 男, 讲师, 主要从事非饱和土本构模型及其数值计算方面的研究工作。E-mail: jianli@bjtu.edu.cn。

## Hydro-mechanical double-yield-surface model for unsaturated sand and clay

LI Jian<sup>1</sup>, LIU Kai<sup>2</sup>, YIN Zhen-yu<sup>2</sup>, CUI Yu-jun<sup>3</sup>, YIN Jian-hua<sup>2</sup>

(1. School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China; 2. Department of Civil and Environmental Engineering,

The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, China; 3. Ecole des Ponts ParisTech, Laboratoire Navier/CERMES, Paris, France)

**Abstract:** Hydro-mechanical coupling behavior analysis with a sophisticated model for both unsaturated sand and clay is still a challenge. In this study, a hydro-mechanical coupling model with two plastic deformation mechanisms, i.e., loading collapse and shear sliding, for unsaturated soils is formulated using the Bishop's stress as the stress variable and using the void ratio and the effective degree of saturation as the state variables. An expression for the critical state line related to the effective degree of saturation in the void ratio-soil skeleton stress semilog plane is explicitly implemented, which is combined with a non-associated flow rule for the shear sliding yield surface to guarantee the satisfactory simulation of the dilation or contraction during shear for unsaturated soils including sand and clay. The predictive capability of the model to reproduce the main features of unsaturated soil behavior is analyzed by simulating the triaxial tests on silty sand and kaolin.

**Key words:** dilatancy; effective degree of saturation; critical state; hydro-mechanical coupling; unsaturated soil

## 0 引 言

近二十年来,学者们利用直剪试验和三轴试验对各种类型的非饱和土的力学性质进行了试验研究<sup>[1-10]</sup>。这些试验研究表明非饱和土的剪胀性质不仅取决于应力水平和孔隙比,还取决于吸力和饱和度。通常,非饱和土的剪切强度随围压和吸力的增加而增加,剪胀性随围压的增加而降低,随吸力的增加而增加。

剪切强度与围压和吸力两个变量的取值具有正相关性,并且这种正相关性可以利用非饱和土的有效应力公式即 Bishop<sup>[11]</sup>提出的应力表达式对其进行反映。这是由于 Bishop 应力表达式充分考虑了基质吸力对土骨架应力的贡献。Bishop 应力  $\sigma'_{ij}$  由两部分组成,即  $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij,net} + s\chi\delta_{ij}$ 。其中,  $\sigma_{ij,net}$  为净应力张量,  $s$  为吸力,  $\chi$  为有效饱和度参数,  $\delta_{ij}$  为克罗内克函数。然而,剪切过程中土的剪胀性随围压和吸力的变化趋势是相

反的。造成这种相反趋势的原因是吸力,更确切地说是非饱和状态,以两种不同方式影响着非饱和土的力学性质<sup>[12]</sup>: ①吸力降低了土孔隙中流体的平均压力,从而使土骨架应力增加; ②因毛细现象,吸力使土颗粒接触处产生额外“黏结”作用。这种“黏结”作用使得给定吸力或饱和度下的  $e - \ln p'$  坐标系(孔隙比-平均有效应力坐标系)内的临界状态线(critical state line, CSL)互不重合。其中,  $p' = \frac{1}{3}(\sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33})$ 。因此,“黏结”效应影响着土密实状态(土密实状态可用  $e/e_c$  或  $e - e_c$  表示,其中  $e_c$  是当前平均有效应力对应的临界孔隙比),并控制土的剪胀性质。

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金项目(2019JBM083)

收稿日期: 2018-08-21

\*通信作者(E-mail: zhenyu.yin@polyu.edu.hk; zhenyu.yin@gmail.com)

为了描述非饱和土的力学行为, 需要区分非饱和状态的两种影响。平均孔隙压力可表示为吸力与有效应力参数的乘积, 并作为 Bishop 应力的一部分。额外“黏结”作用的影响程度与非饱和土中弯液面个数密切相关, 并可利用有效饱和度表征<sup>[13]</sup>。在常规的非饱和土室内试验中, 净应力和吸力通常是一对可控或可测的独立变量。因此, Fredlund 等<sup>[14]</sup>、Tarantino 等<sup>[15]</sup>、张龙等<sup>[16-17]</sup>等建议使用这组变量建立本构方程, 描述土的力学行为特征。然而, 通过上述分析不难发现, 为了区分非饱和状态对土力学行为的影响, 需要选取 Bishop 应力作为本构变量, 并选取有效饱和度作为状态变量, 用于描述额外“黏结”作用。为了考虑额外“黏结”作用, Zhou 等<sup>[18]</sup>、Zhang 等<sup>[19]</sup>建立的本构模型中提出了  $e - \ln p'$  坐标系中非饱和土的正常固结线和临界状态线的斜率或截距随有效饱和度的变化关系式。

为了描述非饱和土的剪胀特性, 研究者们建立了本构模型。大致上, 这些本构模型可分为两类: Cam-Clay 类模型<sup>[6, 12-13, 18-25]</sup>和多重机制模型<sup>[26-28]</sup>。

(a) 在 Cam-Clay 类模型中,  $e - \ln p'$  坐标系内 CSL 的位置受  $p' - q$  坐标系内屈服面与 CSL 的交点控制。因此, 这类模型通常难以准确地描述土体的剪胀行为。另外, 若以  $e - \ln p'$  坐标系内 CSL 的表达式作为建立 Cam-Clay 类模型的起点, 则推导而得的屈服函数非常复杂<sup>[19]</sup>。

(b) 殷宗泽<sup>[29]</sup>、Yin 等<sup>[30]</sup>提出了适用于饱和土的多重机制模型。通过引入状态相关的剪胀公式与非相关联的流动法则, 使得模型能够较好地预测剪切过程中的剪胀和剪缩性质。其后, 卢再华等<sup>[26-27]</sup>、Chiu 等<sup>[28]</sup>将其扩展至非饱和土。这些非饱和土本构模型均采用净应力和吸力作为应力变量。

本文提出一个新的具有加载湿陷及剪切滑移双重塑性机制的适用于非饱和砂土和黏土的水-力耦合模型。该模型给出了  $e - \ln p'$  坐标系内有效饱和度相关的 CSL 的表达式, 以此反映非饱和土的剪胀性。此外, 通过力学与持水模型中硬化方程间的耦合关系反映变形和持水性质间的相关作用。最后, 通过对比粉砂和高岭土的三轴试验结果与模型模拟结果验证模型可以描述非饱和砂土和黏土水力耦合特性。

## 1 本构模型的建立

模型采用 Bishop 应力  $\sigma'_{ij}$  作为本构变量建立力学模型。此外, 采用有效饱和度  $S_{re}$  和孔隙比  $e$  作为力学模型的状态变量。以往学者们开展了关于 Bishop 应力中有效应力参数确定的研究<sup>[31-33]</sup>, 陈正汉等<sup>[34]</sup>对其进

行了总结。此处, 采用 Alonso 等<sup>[31]</sup>和 Lu 等<sup>[33]</sup>的方法, 利用有效饱和度变量  $S_{re}$  作为有效应力参数, 依此准确考虑负的孔隙水压力对有效应力的贡献。需要注意的是此处忽略了交界面对有效应力的影响。有效饱和度表示为

$$S_{re} = \frac{S_r - S_{res}}{1 - S_{res}}, \quad (1)$$

式中,  $S_{res}$  为剩余饱和度, 定义为吸附水体积与孔隙体积的比值。当毛细作用占优时, 吸附水对粒间力的影响可被忽略<sup>[33]</sup>。实际上, 吸附水含量并不是常数, 其随着吸力的减小先增加后减小<sup>[35-36]</sup>。Tuller 等<sup>[37]</sup>、Konrad 等<sup>[38]</sup>和 Zhou 等<sup>[39]</sup>提出了考虑吸附水含量变化的持水模型的表达式。然而, 为了简化, 此处假设吸附水含量为一常数。

### 1.1 弹性性质

假设弹性变形是各向同性的, 则弹性应变可表示为

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} d\sigma'_{ij} - \frac{\nu}{E} d\sigma'_{kk} \delta_{ij} \quad (2)$$

式中  $\nu$  为泊松比;  $E$  为杨氏模量, 且  $E = 3K(1-2\nu)$ ;  $K$  为弹性体积模量, 且  $K = p'(1+e_0)/\kappa$ ,  $\kappa$  为回弹线斜率,  $e_0$  为初始孔隙比。

### 1.2 塑性性质

#### (1) 加载湿陷屈服机制

模型中引入加载湿陷 (loading collapse, LC) 和剪切滑动 (shear slide, SS) 两个塑性机制来反映非饱和土的塑性力学性质。加载湿陷机制用于描述土的加载湿陷特性。对于具有双重塑性机制的弹塑性模型而言, 屈服面将应力区域分界为弹性和塑性部分。并且, 塑性区域可进一步细分为单一塑性机制屈服与全部塑性机制屈服。为了准确地反映从弹性至塑性变形、从单一塑性机制屈服至全部塑性机制屈服过程中的力学行为, 对加载湿陷机制采用边界面理论。边界面理论中, 加载湿陷边界面  $f_{LC}^b$  和加载湿陷当前应力面  $f_{LC}^c$  具有形同的形状 (如图 1 所示), 并表示为

$$f_{LC}^b = \bar{p}'^2 + \frac{3}{2} \frac{\bar{s}_{ij} \bar{s}_{ij}}{R^2} - p_c'^{b2}, \quad (3)$$

$$f_{LC}^c = p'^2 + \frac{3}{2} \frac{s_{ij} s_{ij}}{R^2} - p_c'^{c2} \quad (4)$$

式中 映射应力点  $\bar{\sigma}'_{ij}$  位于加载湿陷边界面上, 根据径向映射规则定义, 此映射点具有与当前应力点相同的应力比, 即  $\eta = \bar{q} / \bar{p}' = q / p'$ ;  $p'$  和  $q$  分别为平均 Bishop 应力和偏应力;  $s_{ij}$  为偏应力张量, 并定义为  $s_{ij} = \sigma'_{ij} - p' \delta_{ij}$ ;  $R$  是一个控制椭圆的长轴和短轴比率的材料参数, 其取值可根据  $K_0$  系数获得<sup>[30]</sup>;  $p_{LC}^b$  和  $p_{LC}^c$

分别控制加载湿陷边界面和加载湿陷当前应力面的尺寸。

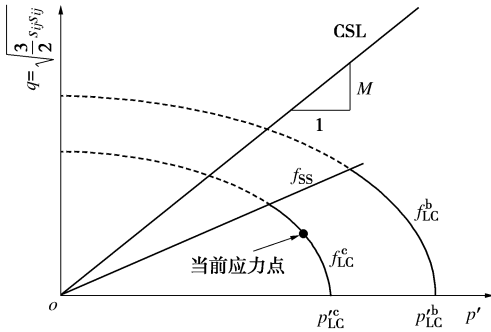


图 1 在  $p' - q$  平面上加载湿陷边界面、加载湿陷当前应力面和剪切滑动屈服面

Fig. 1 Loading collapse bounding surface, loading collapse current stress surface and shear-sliding yield surface on  $p' - q$  plane

对于非饱和土而言, 在各向同性应力状态下, 不可逆的体积收缩变形不仅取决于  $p'$  的增加, 而且与湿化引起的湿陷密切相关。加载湿陷边界面右侧与  $q = 0$  平面的相交线便定义了加载-湿陷屈服曲线。LC 屈服曲线代表了  $p_c^b$  随吸力<sup>[20-21]</sup>或其他变量的变化情况, 例如饱和度<sup>[13, 22]</sup>、吸力与饱和度的组合<sup>[6, 25]</sup>。在湿化过程中, 当土的应力状态达到 LC 屈服曲线时, 土孔隙将发生湿陷现象, 这主要可归功于弯液面个数的减少所引起的土体结构的弱化。通常可采用两种方法获得 LC 屈服曲线的表达式。第一种方法是通过不同非饱和状态下正常固结线 (normal consolidation line, NCL) 的表达式间接获得。这使得 LC 屈服函数依赖于 NCL 的截距和斜率的表达式<sup>[20-21]</sup>。第二种方法是依据吸力或其他变量对  $p_c^b$  的影响机制直接给出<sup>[6, 13, 25]</sup>。

根据 Wheeler 等<sup>[13]</sup>提出的简化方法, 假设  $p_{LC}^b$  的大小与土颗粒接触处气液交界面的数量相关。气液交界面的数量可以用有效饱和度表示。因此,  $p_{LC}^b$  变化不仅取决于塑性体积应变增量, 还取决于塑性有效饱和度增量, 可表示为

$$\frac{dp_c^b}{p_c^b} = \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} d\varepsilon_{v(LC)}^p - b_{sw} \frac{dS_{re}^p}{\lambda_w - \kappa_w} \quad (5)$$

$p_c^c$  变化可表示为

$$\frac{dp_c^c}{p_c^c} = \frac{1}{\Omega} \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} d\varepsilon_{v(LC)}^p - b_{sw} \frac{dS_{re}^p}{\lambda_w - \kappa_w} \quad (6)$$

式中  $\varepsilon_{v(LC)}^p$  为加载湿陷机制引起的塑性体应变;  $\lambda$  为饱和状态下 NCL 的斜率;  $\Omega$  为控制加载湿陷当前应力面硬化率的比例函数, 且  $\Omega = (p_c^b / p_c^c)^4$ ;  $\kappa_w$  和  $\lambda_w$  分别为持水模型中扫描线斜率和主干燥线或主浸润线的斜率;  $b_{sw}$  为耦合参数, 控制着塑性有效饱和度增量  $dS_{re}^p$  对硬化参数变化的影响程度。

## (2) 剪切滑动屈服机制

剪切滑动屈服面用于描述土颗粒间的剪切滑动行为。由于选取 Bishop 应力作为本构变量, 该变量中考虑了气压和水压间差值对粒间力的贡献, 因此非饱和土的剪切滑动屈服面亦采用与饱和土模型相同的形状 (如图 1 所示)。剪切滑动屈服面可表示为<sup>[30]</sup>

$$f_{ss} = \sqrt{\frac{3}{2}} r_{ij} r_{ij} - H \quad (7)$$

式中,  $r_{ij} = s_{ij} / p'$ ,  $H$  为硬化参数。硬化参数  $H$  在  $H - \varepsilon_d^p$  坐标系内定义为一个双曲函数, 并表示为<sup>[30]</sup>

$$H = \frac{M_p \varepsilon_{d(SS)}^p}{1/G_p + \varepsilon_{d(SS)}^p} \quad (8)$$

式中  $\varepsilon_{d(SS)}^p$  为剪切滑动机制引起的塑性剪应变;  $G_p$  和  $M_p$  为土性参数;  $G_p$  决定着  $\eta' - \varepsilon_d^p$  坐标系内双曲线的初始斜率;  $M_p$  表征峰值应力比, 且与峰值摩擦角  $\phi_p$  间满足关系式  $M_p = 6 \sin \phi_p / (3 - \sin \phi_p)$ 。

Yin 等<sup>[30]</sup>提出通过建立剪切模量与超固结比 (OCR) 的关系来考虑硬化效应:

$$G_p = G_{p0} \left( \frac{p_c^b}{p_c^c} \right)^{n_G} \quad (9)$$

式中,  $G_{p0}$  为土性参数,  $n_G$  决定着  $G_p$  随 OCR 的变化率。

此外, Yin 等<sup>[30]</sup>指出峰值摩擦角  $\phi_p$  与内摩擦角  $\phi_\mu$  满足关系式:

$$\tan \phi_p = \left( \frac{e_c}{e} \right)^{n_p} \tan \phi_\mu \quad (10)$$

其中, 参数  $n_p$  决定  $\tan \phi_p$  随土密实状态 ( $e_c / e$ ) 的变化率。

由于气液交界面产生的额外“黏结”效应, 非饱和土状态下  $e - \ln p'$  坐标系内的 CSL 线并不重合。Zhang 等<sup>[19]</sup>选取有效饱和度作为状态变量, 给出了一组相互平行的临界状态线的表达式:

$$e_c = \Gamma_c - \lambda_c \ln p' \quad (11a)$$

$$\Gamma_c(S_{re}) = \Gamma_{csat} - a_r S_{re} \quad (11b)$$

式中  $\Gamma_c$  和  $\lambda_c$  分别为  $(e - \ln p')$  坐标系内 CSL 的截距和斜率, 通常可认为  $\lambda_c$  等于  $\lambda$ <sup>[19]</sup>;  $\Gamma_{csat}$  为饱和状态下 CSL 的截距;  $a_r$  为土性参数,  $a_r S_{re}$  表征“黏结”效应对非饱和土临界状态性质的影响。Zhang 等<sup>[19]</sup>证实了临界状态线截距随有效饱和度线性变化。这一线性关系可通过压实高岭土的排水三轴试验结果<sup>[40]</sup>进一步证实, 如图 2 所示。其中, 图 2 (b) 给出的拟合公式即为式 (11b)。

为了考虑剪胀和剪缩行为特性, 引入了非关联流动规则, 且塑性势函数的一阶导数可表示为

$$\frac{\partial g_{ss}}{\partial p'} = D \left( M_{pt} - \sqrt{\frac{3}{2}} r_{ij} r_{ij} \right), \quad \frac{\partial g_{ss}}{\partial s_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{r_{ij}}{\sqrt{r_{ij} r_{ij}}} \quad (12)$$

式中,  $D$  和  $M_{pt}$  为土性参数。参数  $D$  控制剪胀程度。

参数  $M_{pt}$  为相变线的斜率, 其值取决于相变角  $\varphi_{pt}$ , 且  $M_{pt} = 6 \sin \varphi_{pt} / (3 - \sin \varphi_{pt})$ 。与  $\varphi_p$  表达式一样,  $\varphi_{pt}$  也依赖于  $\varphi_\mu$  和  $(e_c/e)$ , 且

$$\tan \varphi_{pt} = \left( \frac{e_c}{e} \right)^{-n_{pt}} \tan \varphi_\mu \quad (13)$$

其中, 参数  $n_{pt}$  控制  $\tan \varphi_{pt}$  随土密实状态  $(e_c/e)$  的变化率。

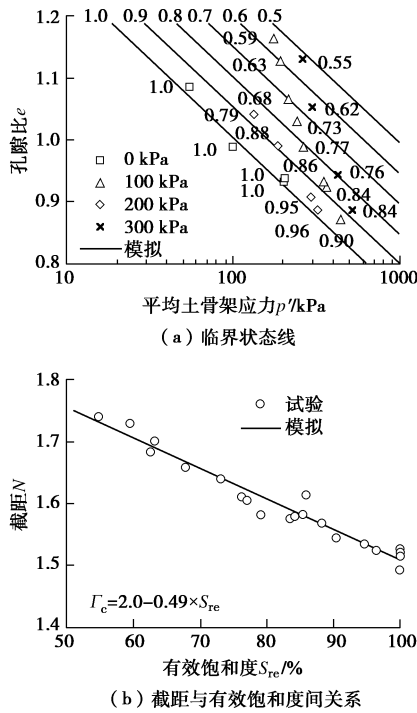


图 2 压实高岭土的临界状态线以及截距与有效饱和度间关系<sup>[40]</sup>

Fig. 2 Critical state lines, and relationship between intercept and effective degree of saturation of compacted Speswhite kaolin<sup>[40]</sup>

式 (10) 和 (13) 表明对于密实结构的土体而言, 存在  $\varphi_{pt} \leq \varphi_\mu \leq \varphi_p$  关系。这一关系式与式 (12) 使得土体在剪切过程中体积先收缩后膨胀, 并且偏应力先增加直到峰值然后减小至稳定值。另一方面, 对于松散结构的土体而言, 存在  $\varphi_p \leq \varphi_\mu \leq \varphi_{pt}$  的关系。这使得土体在剪切过程中产生剪缩, 同时偏应力在加载期间逐渐增加。因此, 式 (10) 和 (13) 保证密实和松散结构的土体在剪切过程中逐渐达到临界状态。

### 1.3 持水曲线

持水曲线 (soil water retention curve, SWRC), 亦称之为土水特征曲线, 描述了土的含水率与吸力间的关系, 表征了非饱和土的持水性质。非饱和土的持水性质有两个重要特征, 即水力滞回性和密实度依赖性。这意味着同一吸力下土的  $S_{re}$  可能明显不同。典型的考虑水力滞回效应的持水特征曲线模型由主浸润曲线、主干燥曲线和扫描线组成 (如图 3 所示)。若初始点  $A$  在主浸润曲线和主干燥曲线所包围的区域内, 干

化过程中  $A$  点将沿扫描线移至主干燥曲线上的  $B$  点, 或在湿化过程中沿扫描线移至主浸润曲线上的  $C$  点。在该区域内  $S_{re}$  产生弹性变化, 此变化对应着土孔隙中气液交界面的可逆运动。若进一步发生干化或湿化,  $B$  点或  $C$  点将沿着主干燥曲线或主浸润曲线移动,  $S_{re}$  产生弹塑性变化, 此变化伴随着孔隙中水的吸收和排出。此外, 为了描述土的持水性质的密实度依赖性, SWRC 在  $s - S_{re}$  平面上的位置应随土的干密度的变化而变化。一般来说, SWRC 随着干密度的增加会向右移动, 随着干密度的降低会向左移动。这表明在相同吸力和水力路径条件下, 密实土样的  $S_{re}$  值高于松散土样的  $S_{re}$  值。

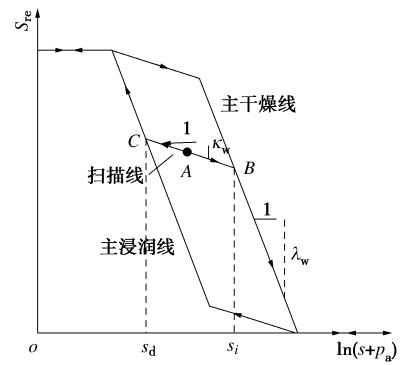


图 3 土持水特征曲线模型

Fig. 3 Model for water-retention behaviors

为了描述非饱和土持水性质的水力滞回性和密实度依赖性, 以往学者建立了相关的本构模型<sup>[41-44]</sup>。此处采用弹塑性模型框架<sup>[13]</sup>。首先, 定义了一组屈服面, 即吸力增加和减少屈服面 ( $f_{sl}$  和  $f_{sd}$ ):

$$\begin{cases} f_{sl} = s - s_i & (\text{干化路径}) \\ f_{sd} = s_d - s & (\text{湿化路径}) \end{cases} \quad (14)$$

式中,  $s_i$  和  $s_d$  为硬化参数, 分别为扫描线与主干燥曲线和主浸润线的交叉点所对应的吸力。

饱和度的增量分为弹性和塑性部分, 弹性部分定义为

$$dS_{re}^e = \kappa_w \frac{ds}{s + p_a} \quad (15)$$

式中  $\kappa_w$  为常数, 为  $\ln(s + p_a) - S_{re}$  平面上扫描线的斜率;  $p_a$  为一常数, 以防式 (15) 等号右侧项分母等于 0, 通常  $p_a$  可取为大气压力。

其次, 为了考虑持水性质的密实度依赖性, 采用双重硬化法则来描述  $s_i$  和  $s_d$  的变化:

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds_i}{s_i + p_a} &= \frac{1}{\lambda_w - \kappa_w} dS_{re}^p + b_{ws} \frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa} d\varepsilon_v^p, \\ \frac{ds_d}{s_d + p_a} &= \frac{1}{\lambda_w - \kappa_w} dS_{re}^p + b_{ws} \frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa} d\varepsilon_v^p. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中  $\lambda_w$  是在  $\ln(s + p_a) - S_{re}$  平面上主干燥曲线或主浸润曲线的斜率, 该值可以假设为常数或由主干燥曲线或主浸润曲线的表达式确定;  $b_{ws}$  为另一个耦合参数, 控制着塑性体应变增量  $d\varepsilon_v^p$  对硬化参数变化的影响程度。

对加载湿陷、剪切滑动和吸力变化屈服面应用一致性条件, 并结合弹性本构方程 (2) 和 (15), 便可以得到广义应力 - 广义应变增量方程。

#### 1.4 模型参数

模型包含了 17 个材料参数, 可分为 3 组, 分别为与加载湿陷准则相关的参数 ( $\lambda$ ,  $\kappa$ ,  $\nu$  和  $b_{sw}$ )、与剪切滑动准则相关的参数 ( $\varphi_\mu$ ,  $G_{p0}$ ,  $n_G$ ,  $n_p$ ,  $\Gamma_{csat}$ ,  $a_r$ ,  $D$  和  $n_{pt}$ ) 及与 SWRC 相关的参数 ( $\lambda_w$ ,  $\kappa_w$ ,  $p_a$ ,  $b_{ws}$  和  $S_{res}$ )。模型参数的确定方法如下所述。

正常固结线斜率  $\lambda$  和回弹线斜率  $\kappa$  可通过饱和状态下的等向固结试验进行确定。 $\nu$  可通过三轴试验中应力 - 应变曲线的起始段确定。耦合参数  $b_{sw}$  可以通过非饱和状态下的等向固结试验进行标定。

内摩擦角  $\varphi_\mu$  可通过公式  $M_c = 6 \sin \varphi_\mu / (3 - \sin \varphi_\mu)$  求得,  $M_c$  为  $p'-q$  坐标系内 CSL 斜率。与 CSL 相关的参数  $\varphi_\mu$ ,  $\Gamma_{csat}$  和  $a_r$  均可以通过非饱和土三轴剪切试验进行确定。

塑性刚度  $G_{p0}$  和参数  $n_G$  可通过饱和及非饱和状态下小应变水平的偏应力 - 应变曲线的拟合获得。参数  $n_p$  可以通过排水三轴试验中偏应力 - 应变曲线拟合获得。剪胀常数  $D$  和参数  $n_{pt}$  可以通过排水三轴试验中的体变曲线拟合获得。

为了简单, 假设  $\ln(s + p_a) - S_{re}$  平面内主浸润线、主干燥线和扫描线均为直线, 即  $\lambda_w$  和  $\kappa_w$  为常数。这些参数可通过恒定体积条件下的持水特征试验获得。耦合参数  $b_{ws}$  可通过常吸力下的固结试验进行标定。残余饱和度  $S_{res}$  可以根据 Alonso 等<sup>[31]</sup>提出的方法获得。

建立的本构模型同时适用于砂土和黏土。在剪切过程中, 松砂和正常固结黏土均表现出剪缩特性; 密砂和超固结黏土均表现出剪胀特性。两种行为特征均可以通过本构模型中的剪切滑动机制进行描述。另一方面, 砂土的压缩模量远大于黏土的。本构模型中利用参数  $\kappa$  和  $\lambda$  表征回弹线和正常固结线的斜率。通过这组参数的不同取值便可有效地区分砂土和黏土压缩性的差异。

#### 1.5 模型计算

本文提出的适用于非饱和土的本构模型是在水-力耦合框架下建立。水-力耦合模型由力学子模型和持水子模型组成。持水行为通过 Bishop 应力、硬化方程

(式 (5), (6))、临界状态线的表达式 (式 (11a), (11b)) 影响着力学行为; 力学行为通过持水模型中的硬化方程 (式 (16)) 影响着持水行为。待求解的力学子模型和持水子模型可以联立组成方程组, 并进行求解。对于适用于非饱和土有限元方法而言, 应变增量和吸力增量是通过控制方程进行求解; 随后对于某一高斯点, 需要根据应变增量和吸力增量更新应力和饱和度。根据非饱和土本构模型的特点, 研究者们提出了不同的应力积分算法<sup>[45-48]</sup>。

笔者曾提出一种适用于具有多重塑性机制的本构模型的应力积分算法<sup>[47-48]</sup>。对于水-力耦合模型而言, 存在 4 种塑性屈服情况, 分别是弹性情况、仅力学模型屈服、仅持水模型屈服、力学和持水模型同时屈服。求解时需要对 4 种情况分别进行试算, 并且根据试算的塑性算子的符号限制条件 (非负) 确定唯一的情况。需要注意的是, 对于 4 种情况, 待求解的方程组的形式是不一致的。对于没有发生塑性的子模型, 仅考虑弹性应力 - 应变关系; 对于发生塑性的子模型, 需要根据一致性条件确定塑性算子, 推导弹塑性应力 - 应变关系。限于篇幅, 此处不再对本构模型的求解方式进行详细地展开。

## 2 模型验证

在各相同性条件下, 本文建立的非饱和土本构模型框架与 Wheeler 等<sup>[13]</sup>提出的弹塑性变形和持水滞回耦合模型框架一致。Wheeler 等<sup>[13]</sup>对各向同性条件下的非饱和土的湿陷性、干化引起的收缩变形等特性进行了较好的预测。限于篇幅, 本文仅开展了剪切条件下非饱和土的剪胀特性的模拟。

选择两组非饱和土排水三轴试验对模型预测能力进行了验证。第一组是由 Rampino 等<sup>[49]</sup>开展的压实粉砂的三轴试验。第二组是由 Sivakumar<sup>[40]</sup>开展的压实高岭土的三轴试验。

#### 2.1 粉砂

Rampino 等<sup>[49]</sup>对压实的粉砂进行了排水三轴试验。试验过程中首先将试样在 10 kPa 净平均应力下湿化至目标基质吸力 (100, 200, 300 kPa)。然后将土样在常基质吸力条件下固结至 100 或 400 kPa。最后土样在恒定围压和基质吸力下完成排水剪切试验。剪切过程中, 编号 #5、#7、#10、#14 土样的基质吸力分别为 100, 200, 200, 300 kPa, 相应的围压分别为 400, 100, 400, 400 kPa。模型预测时使用的参数均根据 1.4 节进行确定。表 1 给出了预测粉砂剪切试验结果所需的模型参数和初始状态参数。

表 1 粉砂和高岭土模型参数及初始状态参数表  
Table 1 Values of model parameters and initial values of soil state  
for tests on silty sand and kaolin

类型	$\lambda$	$\kappa$	$\nu$	$b_{sw}$	$M$	$G_{p0}$
粉砂	0.019	0.003	0.3	5.5	1.523	2000
高岭土	0.110	0.011	0.3	3.0	0.793	40
类型	$\Gamma_{csat}$	$a_r$	$n_G$	$n_p$	$D$	$n_{pt}$
粉砂	0.560	0.140	1.0	2.5	1.0	30.0
高岭土	2.000	0.490	1.0	2.0	0.7	2.0
类型	$\lambda_w$	$\kappa_w$	$p_a$	$b_{ws}$	$S_{res}/\%$	
粉砂	0.04	0.001	1.0	3.2	45.5	
高岭土	0.23	0.010	101.3	1.1	25.0	
类型	$e_0$	$\rho_d/(g \cdot cm^3)$	$S_{r0}/\%$	$p_c^c/kPa$	$s_i/kPa$	$s_d/kPa$
粉砂	0.347	2.00	75.0	450	1000	800
高岭土	1.206	1.20	60.1	210	350	300

图 4 展示了三轴试验过程中偏应力、比体积和饱和度的变化情况。试验结果与模拟计算结果对比表明该模型能够较好地预测粉砂在不同围压和基质吸力下的剪胀性质。由于初始孔隙比低于相应的临界孔隙比，所有土样在剪切过程中均产生先剪缩后剪胀的行为。由于土的持水性质依赖于密实度，在恒定吸力条件下土样的饱和度随着的轴向应变的增加先增加后减小。这种趋势与体应变变化趋势一致。

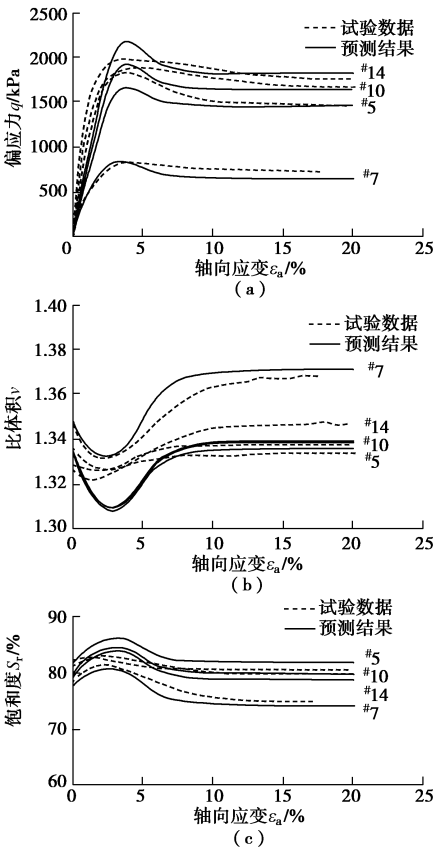


图 4 粉砂在不同基质吸力和净平均应力下排水三轴试验结果与模拟结果对比  
Fig. 4 Comparison between measured and computed results from drained triaxial compression tests at different suctions and net confining stresses on silty sand

2.2 高岭土  
Sivakumar<sup>[40]</sup>对压实高岭土进行了排水三轴试验。试验过程中首先将试样在 50 kPa 的净平均应力下湿化至不同的基质吸力 (100, 200, 300 kPa)。然后将土样在常基质吸力条件下固结至 100 或 150 kPa。最后，土样在恒定的围压和基质吸力下完成排水剪切试验。剪切过程中，编号 8c、9c、13c、17c 和 18c 土样的吸力分别为 200, 200, 100, 300 和 300 kPa，相应的围压分别为 150, 100, 100, 100 和 150 kPa。表 1 给出了预测高岭土剪切试验结果所需的模型参数和初始状态参数。

图 5 展示了三轴试验过程中偏应力、比体积和饱和度的变化情况。试验结果与模型预测结果间的对比表明该模型能够较好地预测不同围压和吸力下的非饱和土的力学性质。由于初始孔隙比大于对应的临界孔隙比，所有土样在剪切过程中均表现出连续的应变硬化性质。此外，由于土样在剪切过程中发生体积收缩变形，在恒定吸力的条件下土样的饱和度随着的轴向应变增加而增加。

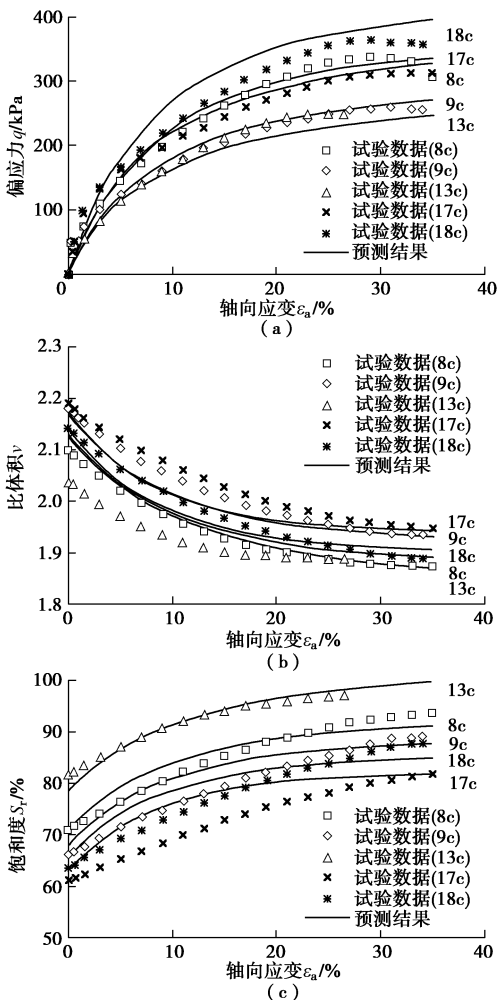


图 5 高岭土在不同基质吸力和净平均应力下排水三轴试验结果与模拟结果对比  
Fig. 5 Comparison between measured and computed results from drained triaxial compression tests at different suctions and net confining stresses on kaolin

### 3 结 论

本文建立了一个基于临界状态理论的弹塑性模型。该模型具有加载湿陷和剪切滑动两种塑性变形机制。本构模型特点如下所述。

(1) 模型中选取 Bishop 应力作为应力变量, 选取有效饱和度作为状态变量, 以此区分非饱和状态对土体力学行为的两种影响。

(2) 提出的 CSL 表达式与  $S_{re}$  相关。与修正剑桥框架下的模型相比, 模型中 CSL 与 NCL 之间的关系更加灵活。

(3) 通过两个双重硬化法则以及 CSL 表达式直接地考虑了持水性质与力学性质的耦合。

(4) 通过对粉砂和高岭土三轴试验结果与计算结果间的比较表明所提出的模型可以更合理地预测非饱和土的剪胀和剪缩性质。

#### 参考文献:

- [1] 陈正汉. 重塑非饱和黄土的变形、强度、屈服和水量变化特性[J]. 岩土工程学报, 1999, **21**(1): 82 - 90. (CHEN Zheng-han. Deformation, strength, yield and moisture change of a remolded unsaturated loess[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1999, **21**(1): 82 - 90. (in Chinese))
- [2] 黄 海, 陈正汉, 李 刚. 非饱和土在  $p-s$  平面上的屈服轨迹及土-水特征曲线的探讨[J]. 岩土力学, 2000, **21**(4): 316 - 321. (HUANG Hai, CHEN Zheng-han, LI Gang. A study on yield locus of unsaturated soil on  $p-s$  plane and soil-water characteristic curve[J]. Rock and Soil Mechanics, 2000, **21**(4): 316 - 321. (in Chinese))
- [3] 詹良通, 吴宏伟. 吸力对非饱和膨胀土抗剪强度及剪胀特性的影响[J]. 岩土工程学报, 2007, **29**(1): 82 - 87. (ZHAN Liang-tong, NG Charles W W. Effect of suction on shear strength and dilatancy of an unsaturated expansive clay[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, **29**(1): 82 - 87. (in Chinese))
- [4] 姚仰平, 牛 雷, 韩黎明, 等. 超固结非饱和土的试验研究[J]. 岩土力学, 2011, **32**(6): 1601 - 1606. (YAO Yang-ping, NIU Lei, HAN Li-ming, et al. Experimental study of behaviors of overconsolidated unsaturated clays[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, **32**(6): 1601 - 1606. (in Chinese))
- [5] 陈存礼, 张登飞, 董玉柱, 等. 常含水率三轴条件下非饱和和原状黄土的吸力和力学特性[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(7): 1195 - 1202. (CHEN Cun-li, ZHANG Deng-fei, DONG Yu-zhu, et al. Suction and mechanical behaviours of unsaturated intact loess from constant water content triaxial tests[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(7): 1195 - 1202. (in Chinese))
- [6] MA T, WEI C, WEI H. Hydraulic and mechanical behavior of unsaturated silt: experimental and theoretical characterization[J]. International Journal of Geomechanics, 2016, **16**(6): D4015007.
- [7] 高登辉, 陈正汉, 郭 楠, 等. 干密度和基质吸力对重塑非饱和黄土变形与强度特性的影响[J]. 岩石力学与工程学报, 2017, **36**(3): 736 - 744. (GAO Deng-hui, CHEN Zheng-han, GUO Nan, et al. The influence of dry density and matric suction on the deformation and the strength characteristics of the remolded unsaturated loess soils[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2017, **36**(3): 736 - 744. (in Chinese))
- [8] 徐 筱, 赵成刚. 高吸力下黏性土的抗剪强度和体变特性[J]. 岩土力学, 2018, **39**(5): 1598 - 1610. (XU Xiao, ZHAO Cheng-gang. Shear strength and volume change behavior of clay-rich soil at high suctions[J]. Rock and Soil Mechanics, 2018, **39**(5): 1598 - 1610. (in Chinese))
- [9] 陈 皓, 吕海波, 陈正汉, 等. 考虑温度影响的高庙子膨润土强度与变形特性试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2018, **37**(8): 1962 - 1979. (CHEN Hao, LÜ Hai-bo, CHEN Zheng-han, et al. Strength and volume change of buffer material under high temperature and pressure[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2018, **37**(8): 1962 - 1979. (in Chinese))
- [10] 朱青青, 苗强强, 陈正汉, 等. 非饱和含黏砂土的弹塑性剪胀特性研究[J]. 岩土工程学报, 2018, **40**(增刊 1): 65 - 72. (ZHU Qing-qing, MIAO Qiang-qiang, CHEN Zheng-han, et al. Elastoplastic dilatancy relations of unsaturated clayey sand[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2018, **40**(S1): 65 - 72. (in Chinese))
- [11] BISHOP A W. The principle of effective stress[J]. Teknisk Ukeblad, 1959, **39**: 113 - 143.
- [12] GALLIPOLI D, GENS A, SHARMA R, et al. An elasto-plastic model for unsaturated soil incorporating the effects of suction and degree of saturation on mechanical behaviour[J]. Géotechnique, 2003, **53**(1): 123 - 135.
- [13] WHEELER S J, SHARMA R S, BUISSON M S R. Coupling of hydraulic hysteresis and stress-strain behaviour in unsaturated soils[J]. Géotechnique, 2003, **53**(1): 41 - 54.
- [14] FREDLUND D G, MORGENSTERN N R. Stress state

- variables for unsaturated soils[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1977, **103**(GT5): 447 - 466.
- [15] TARATINO A, MONGIOVŌÁ L, BOSCO G. An experimental investigation on the independent isotropic stress variables for unsaturated soils[J]. *Géotechnique*, 2000, **50**(3): 275 - 282.
- [16] 张 龙, 陈正汉, 周凤玺, 等. 非饱和土应力状态变量试验验证研究[J]. *岩土工程学报*, 2017, **39**(2): 380 - 384. (ZHANG Long, CHEN Zheng-han, ZHOU Feng-xi, et al. Test verification of stress state variables for unsaturated soils[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2017, **39**(2): 380 - 384. (in Chinese))
- [17] 张 龙, 陈正汉, 周凤玺, 等. 从变形、水量变化和抗剪强度三个方面验证非饱和土的两个应力状态变量[J]. *岩土工程学报*, 2017, **39**(5): 906 - 915. (ZHANG Long, CHEN Zheng-han, ZHOU Feng-xi, et al. Verification of rationality of two stress state variables of unsaturated soil from deformation, moisture change and strength[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2017, **39**(2): 380 - 384. (in Chinese))
- [18] ZHOU A N, SHENG D, SLOAN S W, et al. Interpretation of unsaturated soil behaviour in the stress-saturation space I: volume change and water retention behaviour[J]. *Computers and Geotechnics*, 2012, **43**: 178 - 187.
- [19] ZHANG F, IKARIYA T. A new model for unsaturated soil using skeleton stress and degree of saturation as state variables[J]. *Soils and Foundations*, 2011, **51**(1): 67 - 81.
- [20] ALONSO E E, GENS A, JOSA A. A constitutive model for partially saturated soils[J]. *Géotechnique*, 1990, **40**(3): 405 - 430.
- [21] 孙德安. 非饱和土的水力和力学特性及其弹塑性描述. *岩土力学*, 2009, **30**(11): 3217 - 3231. (SUN De-an. Hydro-mechanical behaviours of unsaturated soils and their elastoplastic modelling [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2009, **30**(11): 3217 - 3231. (in Chinese))
- [22] 马田田, 韦昌富, 陈盼, 等. 非饱和土毛细滞回与变形耦合弹塑性本构模型. *岩土力学*, 2012, **33**(11): 3263 - 3270. (MA Tian-tian, WEI Chang-fu, CHEN Pan, et al. An elastoplastic constitutive model of unsaturated soils with capillary hysteresis and deformation coupling[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2012, **33**(11): 3263 - 3270. (in Chinese))
- [23] LI J, YIN Z Y, CUI Y J, et al. Work input analysis for soils with double porosity and application to the hydro-mechanical modeling of unsaturated expansive clays[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2017, **54**(2): 173 - 187.
- [24] YAO Y P, NIU L, CUI W J. Unified hardening (UH) model for overconsolidated unsaturated soils[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2014, **51**(7): 810 - 821.
- [25] LI X S. Thermodynamics-based constitutive framework for unsaturated soils: 2 a basic triaxial model[J]. *Géotechnique*, 2007, **57**(5): 423 - 435.
- [26] 卢再华, 陈正汉, 曹继东. 原状膨胀土的强度变形特性及其本构模型研究[J]. *岩土力学*, 2001, **22**(3): 339 - 342. (LU Zai-hua, CHEN Zheng-han, CAO Ji-dong. A study on the strength and deformation characteristics and the constitutive model of natural expansive soils[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2001, **22**(3): 339 - 342. (in Chinese))
- [27] 卢再华, 陈正汉. 非饱和和原状膨胀土的弹塑性损伤本构模型研究[J]. *岩土工程学报*, 2003, **25**(4): 422 - 426. (LU Zai-hua, CHEN Zheng-han. An elastoplastic damage constitutive model of unsaturated undisturbed expansive soil[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2003, **25**(4): 422 - 426. (in Chinese))
- [28] CHIU C F, NG C W W. A state-dependent elasto-plastic model for saturated and unsaturated soils[J]. *Géotechnique*, 2003, **53**(9): 809 - 829.
- [29] 殷宗泽. 一个土体的双屈服面应力 - 应变模型[J]. *岩土工程学报*, 1988, **10**(4): 64 - 71. (YIN Zong-ze. A stress-strain model of soil with double yield surfaces[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1988, **10**(4): 64 - 71. (in Chinese))
- [30] YIN Z Y, XU Q, HICHER P Y. A simple critical-state-based double-yield-surface model for clay behavior under complex loading[J]. *Acta Geotechnica*, 2013, **8**(5): 509 - 523.
- [31] ALONSO E E, PEREIRA M J, VAUNAT J, et al. A microstructurally-based effective stress for unsaturated soils[J]. *Géotechnique*, 2010, **60**(12): 913 - 925.
- [32] KHALILI N, ZARGARBASHI S. Influence of hydraulic hysteresis on effective stress in unsaturated soils[J]. *Géotechnique*, 2010, **60**(9): 729 - 734.
- [33] LU N, GODT J W, WU D T. A closed-form equation for effective stress in unsaturated soil[J]. *Water Resources Research*, 2010, **46**(5): W05515.
- [34] 陈正汉, 郭 楠. 非饱和土与特殊土力学及工程应用研究的新进展[J]. *岩土力学*, 2019, **40**(1): 1 - 54. (CHEN Zheng-han, GUO Nan. New developments of mechanics and application for unsaturated soils and special soils[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2019, **40**(1): 1 - 54. (in Chinese))



- [35] CHRISTENSON H K. Capillary condensation due to van der Waals attraction in wet slits[J]. *Physical Review Letters*, 1994, **73**(13): 1821 - 1824.
- [36] TULLER M, OR D, DUDLEY L M. Adsorption and capillary condensation in porous media: liquid retention and interfacial configurations in angular pores[J]. *Water Resources Research*, 1999, **35**(7): 1949 - 1964.
- [37] TULLER M, OR D. Water films and scaling of soil characteristic curves at low water contents[J]. *Water Resources Research*, 2005, **41**(9): W09403.
- [38] KONRAD J M, LEBEAU M. Capillary-based effective stress formulation for predicting shear strength of unsaturated soils[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2015, **52**(12): 2067 - 2076.
- [39] ZHOU A N, HUANG R Q, SHENG D. Capillary water retention curve and shear strength of unsaturated soils[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2016, **53**(6): 974 - 987.
- [40] SIVAKUMAR V. A Critical State Framework for Unsaturated Soil[D]. Sheffield: University of Sheffield, 1993.
- [41] WEI C F, DEWOOLKAR M M. Formulation of capillary hysteresis with internal state variables[J]. *Water Resources Research*, 2006, **42**(7): W074051-16.
- [42] 胡冉, 陈益峰, 周创兵. 基于孔隙分布的变形土土水特征曲线模型[J]. *岩土工程学报*, 2013, **35**(8): 1451 - 1462. (HU Ran, CHEN Yi-feng, ZHOU Chuang-bing. A water retention curve model for deformable soils based on pore size distribution[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2013, **35**(8): 1451 - 1462. (in Chinese))
- [43] 张俊然, 许强, 孙德安. 多次干湿循环后土-水特征曲线的模拟[J]. *岩土力学*, 2014, **35**(3): 689 - 695. (ZHANG Jun-ran, XU Qiang, SUN De-an. Simulation of soil-water characteristic curves during drying and wetting cycles[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2014, **35**(3): 689 - 695. (in Chinese))
- [44] 刘艳, 赵成刚, 李舰, 等. 相间交界面对非饱和土应力状态的影响[J]. *力学学报*, 2017, **49**(2): 335 - 343. (LIU Yan, ZHAO Cheng-gang, LI Jian, et al. The influence of interfaces on the stress state in unsaturated soils[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, **49**(2): 335 - 343. (in Chinese))
- [45] SHENG D, SLOAN S W, GENS A, et al. Finite element formulation and algorithms for unsaturated soils: part I theory[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2003, **27**(9): 745 - 765.
- [46] 李锡夔, 范益群. 非饱和土变形及渗流过程的有限元分析[J]. *岩土工程学报*, 1998, **20**(4): 20 - 24. (LI Xi-kui, FAN Yi-qun. Finite element analysis of deformation and seepage process in unsaturated soils[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1998, **20**(4): 20 - 24. (in Chinese))
- [47] 李舰, 赵成刚, 刘艳, 等. 适用于膨胀性非饱和土的边界模型数值实现的数值实现[J]. *岩石力学与工程学报*, 2017, **36**(10): 215 - 226. (LI Jian, ZHAO Cheng-gang, LIU Yan, et al. Numerical implementation of a bounding surface model for unsaturated expansive clays [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2017, **36**(10): 215 - 226. (in Chinese))
- [48] 李舰, 王鹏月, 海路, 等. 膨胀性非饱和土本构模型的隐式和显式积分算法的比较[J]. *岩石力学与工程学报*, 2018, **37**(7): 1731 - 1740. (LI Jian, WANG Peng-yue, HAI Lu, et al. Implicit and explicit integration schemes of a constitutive model for unsaturated expansive clays[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2018, **37**(7): 1731 - 1740. (in Chinese))
- [49] RAMPINO C, MANCUSO C, VINALE F. Experimental behaviour and modelling of an unsaturated compacted soil[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2000, **37**(4): 748 - 763.