

DOI: 10.11779/CJGE2019S2013

# 黏性土一维松弛及其与次压缩的关系

高彦斌<sup>1, 2</sup>, 刘佳丹<sup>1, 2</sup>

(1. 同济大学土木工程学院地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

**摘要:** 国内外学者对一维松弛规律进行了丰富的研究, 但推导过程较为复杂。基于 Buisman 次压缩方程, 结合 Bjerrum 提出的等时间压缩线的概念, 采用一个简单的方法推导得出了双对数形式和单对数形式的一维应力松弛公式。给出了这两种形式的应力松弛关系曲线的斜率与参数  $c_a/c_c$  之间的关系, 其中  $c_a$  为次压缩指数,  $c_c$  为压缩指数。并采用上海黏土进行了一维次压缩和松弛试验, 验证了这两种形式的应力松弛关系的可靠性。最后还根据 Mesri 和 Godlewski 给出的  $c_a/c_c$  的范围, 预估了一般黏性土的一维应力松弛速率。

**关键词:** 黏性土; 应力松弛; 次压缩; 一维压缩

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2019)S2-0049-04

**作者简介:** 高彦斌(1973—), 男, 副教授, 博士生导师, 主要从事软土力学特性和软土工程方面的研究工作。E-mail: yanbin\_gao@tongji.edu.cn。

## One-dimensional stress relaxation of cohesive soils and its relationship with secondary compression

GAO Yan-bin<sup>1,2</sup>, LIU Jia-dan<sup>1,2</sup>

(1. Department of Geotechnical Engineering College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** The behaviors of one-dimensional relaxation have been studied by many researchers. However, the method for deducing the stress relax formulas is usually complicated. Two simple stress relaxation formulas in single-logarithmic form and double-logarithmic form are derived, which are based on the Buisman secondary compression equation and the concept of the equal-time compression line proposed by Bjerrum. The relationships between the slopes of these two types of stress relaxation formulas and the parameter  $c_a/c_c$  are proposed, here  $c_a$  is the secondary compression index and  $c_c$  is the compression index. One-dimensional secondary compression and the stress relaxation tests using Shanghai clay are conducted. The reliability of the stress relaxation formulas is verified. Moreover, the one-dimensional stress relaxing rate of general cohesive soils is estimated according to the values of  $c_a/c_c$  proposed by Mesri and Godlewski.

**Key words:** cohesive soil; stress relaxation; secondary compression; one-dimensional compression

## 0 引言

一维压缩试验中, 黏性土在恒定的竖向应力  $p$  作用下, 在主固结完成后进入次压缩阶段。Buisman 方程是目前普遍接受的描述次压缩的数学表达式, 其中次压缩指数  $c_a$  是描述黏性土流变特性的一个最重要的参数。应力松弛是饱和黏土的另外一个流变现象, 指的是在应变恒定情况下竖向应力  $p$  随时间减小的过程。

在一维应力松弛的理论研究中, 采用的方法多是选取一个能够描述黏性土一维次压缩特性的本构模型, 推导得出恒定变形下的应力松弛方程, 从而建立应力松弛参数与次压缩参数之间的关系。Alexandre 等<sup>[1]</sup>根据 Martins<sup>[2]</sup>提出的一维流变模型, 推导了一维

应力松弛方程, 并与试验结果进行了对比。Tong 等<sup>[3]</sup>进行了 3 种人工制备土样的一维松弛试验, 采用一个一维弹-黏塑性模型推导得出了一维松弛应力方程, 并与试验结果进行了对比, 但该表达式较为复杂。朱启银<sup>[4]</sup>根据 Kutter 等<sup>[5]</sup>以及 Vermeer 等<sup>[6]</sup>一维弹-黏塑性模型, 最终推导得出了一个双对数应力松弛表达式。Yin 等<sup>[7]</sup>则收集了一些试验结果, 验证了这个关系式能够较好的模拟试验结果。

可以看出, 在一维松弛规律的理论研究中, 多数学者采用了较为复杂的黏弹塑性本构模型, 且给出的

收稿日期: 2019-04-28

\*通讯作者 (E-mail: yanbin\_gao@tongji.edu.cn)

结果大多也较为复杂。另外,在一维松弛试验结果整理方面,有单对数坐标和双对数坐标两种方式,这两种坐标系下的应力松弛曲线之间的关系也值得探讨。

本文基于 Buisman 次压缩方程开展一维应力松弛的理论研究,给出一维应力松弛与次压缩之间的关系;讨论双对数和单对数坐标系下两种松弛曲线之间的关系;并通过上海黏土的一维次压缩和松弛试验结果,评价理论研究成果的可靠性。

## 1 基于 Buisman 次压缩方程的一维应力松弛方程

### 1.1 应力松弛方程的推导

图 1 中给出了正常固结土的两条压缩曲线,一个是初始  $t_1$  时刻的压缩曲线,另外一条是任意  $t$  时刻的压缩曲线。这两条不同时刻的压缩曲线相互平行而具有相同的斜率,即压缩指数  $c_c$ 。这也就是 Bjerrum<sup>[8]</sup>提出的等时间压缩线的概念,即同一条压缩线具有相同的次压缩时间,这样就唯一地确定了次压缩过程中的应力-应变-时间关系。假设土样初始时刻  $t_1$  位于点  $A$ ,然后在恒定应力  $p_0$  的作用下产生次压缩,在  $t$  时刻到达  $B$  点。根据 Buisman 方程,次压缩造成的孔隙比变化可以表示为

$$\Delta e = e_1 - e_2 = c_a \lg \left( \frac{t}{t_1} \right) \quad (1)$$

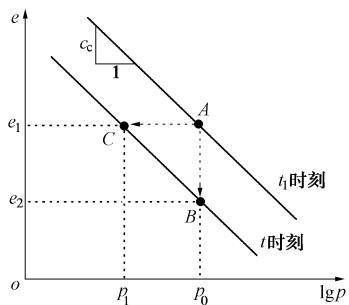


图 1 一维应力松弛与次压缩关系图

Fig. 1 Relationship between one-dimensional stress relaxation and secondary compression

如果土样在点  $A$  的状态下进行孔隙比恒定的松弛试验,竖向应力  $p$  会随时间的增长逐渐减小。假设松弛过程中,土样的一维应力-应变-时间关系仍然符合 Buisman 提出的等时间压缩线,那么在  $t$  时刻,将达到  $C$  点,  $C$  点与  $B$  点在同一条时间线上,其对应的应力为  $p_1$ 。根据图 1 给出的关系,显然存在以下关系:

$$\Delta e = e_1 - e_2 = c_c \lg \left( \frac{p_0}{p_1} \right) \quad (2)$$

根据式 (1), (2) 可得

$$\lg \left( \frac{p_1}{p_0} \right) = -\frac{c_a}{c_c} \lg \left( \frac{t}{t_1} \right) \quad (3)$$

这样就建立了一维松弛与次压缩之间的关系。如果将松弛试验的结果按  $\lg(p(t)/p_0) - \lg(t/t_p)$  双对数关系整理,则试验结果为一条直线,直线的斜率绝对值为  $c_a/c_c$ ,也就是次压缩指数  $c_a$  与压缩指数  $c_c$  的比值。

### 1.2 应力松弛方程的单对数形式

对松弛方程式 (3) 的左边稍作变换可得

$$\lg \left( \frac{p(t)}{p_0} \right) = \frac{1}{2.3} \ln \left( \frac{p(t)}{p_0} \right) \quad (4)$$

根据泰勒方程,当  $y=1$  时,有  $\ln y \approx y-1$ 。因此,当  $p(t)/p_0 \approx 1$  时,式 (4) 可进一步转化为

$$\lg \left( \frac{p(t)}{p_0} \right) \approx \frac{1}{2.3} \left[ \frac{p(t)}{p_0} - 1 \right] \quad (5)$$

把式 (5) 代入式 (3),并稍作调整可得

$$\frac{p(t)}{p_0} \approx 1 - 2.3 \frac{c_a}{c_c} \lg \left( \frac{t}{t_p} \right) \quad (6)$$

这就是单对数形式的应力松弛方程。这个式子表明,如果按照  $p(t)/p_0 - \lg(t/t_p)$  整理试验结果,那么得到的关系应该为一条直线,直线的斜率的绝对值为  $2.3c_a/c_c$ 。是双对数关系斜率绝对值的 2.3 倍。

然而式 (6) 仅是一个近似关系式,只有在  $p(t)$  接近  $p_0$  时误差才较小。在松弛试验中,随着  $p(t)$  的减小,误差将逐渐增大。因此,如果将试验结果按照  $p(t)/p_0 - \lg(t/t_p)$  关系整理,得到的直线斜率的绝对值并不完全等于  $2.3c_a/c_c$ 。图 2 给出了在假定  $c_a/c_c=0.04$  情况下的式 (6) 表示的  $p(t)/p_0$  与  $t/t_p$  的关系图,注意采用的是单对数坐标。可以看出式 (6) 在单对数坐标系下同样可近似拟合为一条直线,但直线的斜率绝对值并不是  $2.3 c_a/c_c$ ,而大约是  $2.0 c_a/c_c$ ,这就是误差造成的结果。

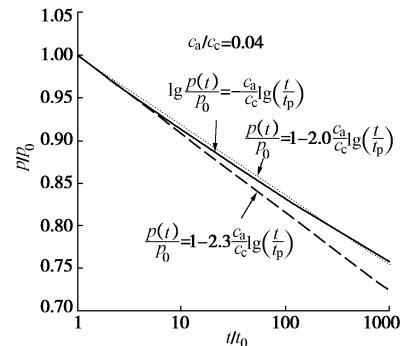


图 2 单对数曲线和双对数曲线之间的关系

Fig. 2 Relationship between single-logarithmic curve and double-logarithmic curve

因此,单对数的一维松弛关系式采用下式表示:

$$\frac{p(t)}{p_0} = 1 - \beta \frac{c_a}{c_c} \lg \left( \frac{t}{t_p} \right) \quad (7)$$

式中, 采用参数  $\beta$  替代常数 2.3, 考虑了泰勒公式的误差造成的影响。由于松弛试验中  $p(t)/p_0$  是小于 1 的,  $\beta$  是一个小于 2.3 的数。根据上面给出的试算结果, 约为 2.0。

## 2 一维蠕变与松弛试验

### 2.1 试验方案

试验采用的试样为上海第四层重塑的淤泥质黏土。土样相对密度  $G_s$  为 2.75, 液限  $w_L$  为 44%, 塑限  $w_p$  为 22%, 塑限指数  $I_p$  为 22。试验采用可以自动控制竖向应力和竖向变形的 GDS 压缩仪, 试验整个过程中室温控制在 22℃~23℃。试样直径为 61.8 mm, 高度为 20 mm。土样在不同的荷载  $p_0$  作用下固结, 固结后进行恒定应力下的次压缩试验或恒定变形下的应力松弛试验, 具体试验方案见表 1。

表 1 一维蠕变与松弛试验方案

Table 1 The test schemes of one-dimensional creep and stress relaxation tests

压力 $p_0$ /kPa	100	200	400	800
时间 $t$ /min	3020 (固结+ 次压缩)	130 (固结)	4420 (固结+ 次压缩)	30 (固结)
松弛时间 $t$ /min	—	4200	5540	2500
松弛后应力 $p$ /kPa	—	151	366	610

### 2.2 一维次压缩试验结果

土样在每一级荷载下固结、蠕变或松弛后的孔隙比  $e$  见图 3 所示。由固结后孔隙比得到土样的一维压缩曲线, 即  $e - \lg p_0$  曲线 (见图 3), 其斜率也就是压缩指数  $c_c$  0.302。图 4 给出了蠕变试验得到的一维次压缩曲线, 即  $e - \lg t$  曲线。根据这些曲线可求得不同固结压力  $p_0$  下的次压缩指数  $c_a$  值。然后进一步计算得到  $c_a/c_c$  值, 具体结果见表 2,  $c_a/c_c$  的平均值为 0.0365。

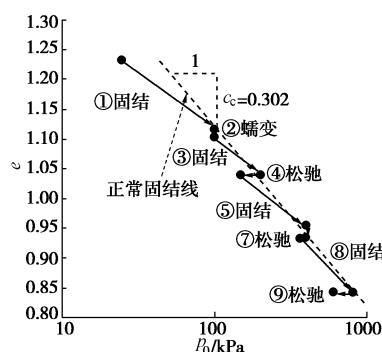


图 3  $e - \lg p_0$  曲线

Fig. 3 Curves of  $e - \lg p_0$  of samples

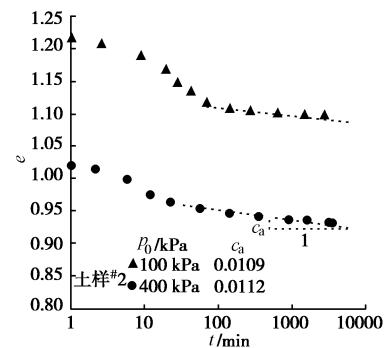


图 4 土样的次压缩曲线

Fig. 4 Curves of secondary compression behavior of samples

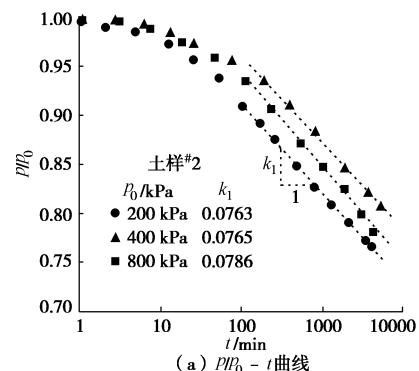
表 2 一维次压缩试验结果

Table 2 Results of one-dimensional creep tests

压力 $p_0$ /kPa	次压缩指数 $c_a$	压缩指数 $c_c$	比值 $c_a/c_c$
100	0.0109	0.302	0.036
400	0.0112	0.302	0.037

### 2.3 一维松弛试验结果

图 5 给出了土样的一维松弛试验结果整理得到的单对数坐标系下的  $p/p_0 - \lg t$  曲线, 以及双对数坐标系下的  $\lg(p/p_0) - \lg t$  曲线。由表 3 可知, 土样的  $k_1$  平均值为 0.0771,  $k_2$  平均值为 0.0412。可以看出, 松弛曲线的斜率与初始固结压力  $p_0$  的大小基本无关, 不同荷载等级下的斜率相差不大。



(a)  $P/p_0 - t$  曲线

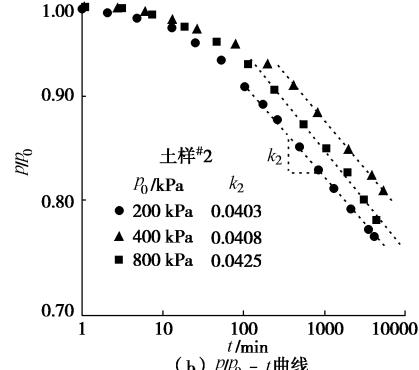


图 5 土样的一维松弛曲线

Fig. 5 Curves of one-dimensional stress relaxation of samples

表 3 土样的一维松弛试验结果

Table 3 Results of one-dimensional stress relaxation texts

压力 $p_0/\text{kPa}$	单对数斜率 $k_1$	双对数斜率 $k_2$	斜率比 $k_1/k_2$
200	0.0763	0.0403	1.893
400	0.0765	0.0408	1.875
800	0.0786	0.0425	1.849

### 3 试验结果的讨论

由表 2 给出的土样的蠕变结果可知,  $c_a/c_c$  的平均值约为 0.037, 而由松弛试验得到的双对数坐标下的松弛曲线的斜率  $k_2$  的平均值约为 0.041, 二者十分接近。这与理论关系式给出的结果一致, 说明式 (3) 能够合理描述一维松弛规律。如果将一维松弛试验结果按  $\lg(p/p_0) - \lg t$  双对数关系整理, 拟合直线的斜率的绝对值就是  $c_a/c_c$ 。这样就可以通过  $c_a/c_c$  的值来预测一维松弛了。

表 3 给出了两种坐标下的松弛曲线斜率的比值  $k_1/k_2$ , 为 1.875~1.893。这与前面的理论分析的结果也是一致的。证明了如果按照  $p(t)/p_0 - \lg(t/t_p)$  单对数关系整理试验结果, 拟合得到的直线的斜率是  $c_a/c_c$  的  $\beta$  倍。理论上  $\beta$  是一个接近但小于 2.3 的参数, 在 2.0 左右。

Mesri 等根据试验数据提出了  $c_a/c_c$  概念: 任何土体在次压缩阶段,  $c_a$  与相对应的  $c_c$  的比值为一常数。大多数黏性土的  $c_a/c_c$  一般在 0.03~0.05, 变化范围并不大。恒定  $c_a/c_c$  概念的提出为一维应力松弛的预估提供了方便。如果假定  $c_a/c_c$  在 0.03~0.05, 那么根据式 (3), (7), 时间  $t$  每增大 10 倍, 应力  $p$  松弛至原来的 0.93 至 0.89 倍, 平均约为 0.91 倍。也就是讲, 时间  $t$  每增大 10 倍, 竖向应力约降低 9%。

### 4 结语

本文基于 Buisman 次压缩方程, 结合 Bjerrum 提出的等时间压缩线的概念, 采用一个简单的方法推导得出了双对数形式的一维应力松弛公式。在此基础上采用泰勒公式, 给出了单对数形式的一维应力松弛公式。理论研究结果表明, 如果将一维松弛试验结果按  $\lg(p/p_0) - \lg t$  双对数关系整理, 拟合直线的斜率的绝对值就是  $c_a/c_c$ ; 如果按  $p(t)/p_0 - \lg(t/t_p)$  单对数关

系整理试验结果, 拟合得到的直线的斜率的绝对值是  $c_a/c_c$  的  $\beta$  倍。理论上  $\beta$  是一个接近但小于 2.3 的参数, 约为 2.0。采用上海黏土进行的一维次压缩和松弛试验结果验证了以上结论的可靠性。

这样可方便的用  $c_a/c_c$  这个参数来预测一维应力松弛。由于大多数黏性土的  $c_a/c_c$  值在 0.03~0.05, 因此时间  $t$  每增大 10 倍, 竖向应力约降低 9%左右。

### 参考文献:

- [1] ALEXANDRE G, MARTINS I. Stress relaxation under various stress and drainage conditions[J]. Archive Ouverte HAL, 2012: 1~54.
- [2] MARTINS I S M. Fundamentals of a behavioral model for saturated clayey soils[D]. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 1992.
- [3] TONG F, YIN J H. Experimental and constitutive modeling of relaxation behaviors of three clayey soils[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2013, 139(11): 1973~1981.
- [4] 朱启银. 软黏土的流变特性及流变参数统一性研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2014. (ZHU Qi-yin. Time-dependent behavior and uniqueness of its key parameters for soft clays[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2014. (in Chinese))
- [5] KUTTER B L, SATHIALINGAM N. Elastic-viscoplastic modelling of the rate-dependent behavior of clays[J]. Géotechnique, 1992, 42(3): 427~441.
- [6] VERMEER P A, STOLLE D F A, BONNIER P G. From the classical theory of secondary compression to modern creep analysis[C]//Proceedings of the 9th International Conference on Computer Methods and Advances in Geomechanics. Wuhan, 1997: 2469~2478.
- [7] YIN Z Y, ZHU Q Y, YIN J H, et al. Stress relaxation coefficient and formulation for soft soils[J]. Géotechnique Letters, 2014, 4(1): 45~51.
- [8] BJERRUM L. Engineering geology of Norwegian normally-consolidated marine clays as related to settlements of buildings[J]. Géotechnique, 1967, 17(2): 83~118.

(责编: 胡海霞)