

DOI: 10.11779/CJGE2019S2003

土体软化条件下条形基础地基承载力数值模拟

吕玺琳^{1, 2}, 薛大为^{1, 2}

(1. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092; 2. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092)

摘要: 为克服材料软化导致的有限元网格敏感性难题, 提出了一个压力相关隐式梯度塑性模型来模拟土体软化条件下条形基础地基承载力。通过引入微应变作为附加运动学变量, 推导了包含高阶广义应力的微力平衡和经典动量方程, 并基于热力学第二定律, 将附加的微力平衡转化为宏观等效塑性应变与微应变耦合的 Helmholtz 方程。进一步建立能耦合位移和微变量的有限元算法, 并通过软化材料双轴压缩试验模拟, 验证了该算法在应变局部化数值模拟中的适用性。将建立的方法用于条形基础地基承载力特性模拟, 并通过与理想弹塑性模型计算结果对比表明, 土体软化将导致地基承载能力降低, 破坏模式表现为失稳区域变小且塑性应变幅值增大。

关键词: 隐式梯度模型; 应变软化; 剪切带; 地基承载力; 网格敏感性

中图分类号: TU432

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2019)S2-0009-04

作者简介: 吕玺琳(1981—), 男, 重庆人, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事岩土力学与工程方面的研究。E-mail: xilinlu@tongji.edu.cn。

Numerical simulation of bearing capacity of a strip footing on strain-softening soil ground

LÜ Xi-lin^{1, 2}, XUE Da-wei^{1, 2}

(1. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: To overcome the mesh sensitivity induced by strain softening, an implicit gradient plasticity model is put forward to simulate the bearing capacity of a rigid strip foundation on strain-softening soil. A micro-variable is introduced to serve as the additional kinematic variable, and a micro-force balance containing higher-order generalized stresses together and the classical balance of momentum equation are derived. Based on the second law of thermodynamics, the additional micro-force balance is converted into a Helmholtz equation that couples the effective plastic strain and micro-strain. Furthermore, a finite element procedure coupling both displacements and micro-strain is implemented. The applicability of the proposed methodology to capture strain localization is verified by the plane strain compression tests. Finally, the established methodology is used to simulate the bearing capacity of a rigid strip foundation on strain-softening soil, and compared to the calculations from perfectly plasticity model. The simulations show that the strain softening induces a decreasing bearing capacity. The resulted failure mode shows a smaller instability range and a larger maximum deformation magnitude.

Key words: implicit gradient plasticity; strain softening; shear band; bearing capacity of foundation; mesh sensitivity

0 引言

应变软化是密砂、超固结土等的一种典型特性, 其发生将导致工程结构承载力显著降低^[1]。土体软化常伴随着剪切带发生, 常被看作是连续介质的变形分叉现象。

当前应变局部化理论预测已取得显著成果, 但应变局部化扩展过程模拟目前还没有得到较好的解决。由于经典连续介质模型没有引入材料长度参数, 因而在模拟土体软化阶段力学响应数值模拟时存在网格敏感性。为克服这一难题, 积分非局部理论^[2]、梯度塑

性^[1, 3]等方法被用于模拟应变局部化问题。这类方法在连续介质力学框架下考虑宏观内变量的梯度或不相容微观变形场, 并通过引入材料特征长度体现剪切带厚度, 从而克服剪切带对网格尺寸^[2]。Aifantis等^[4]最早将显式梯度理论引入应变软化数值模拟中。为克服显式梯度理论物理意义不够明确且要求形函数 C1 连续性带来的数值难题, Engelen^[5]提出了隐式梯度理论

基金项目: 国家重点研发计划项目 (2016YFC0800200); 国家自然科学基金面上项目 (41672270)

收稿日期: 2019-04-30

模拟软化材料应变局部化问题。Peerlings 等^[6]进一步解决了梯度塑性理论的边界条件问题。

地基承载力分析是岩土领域经典问题, 工程中常通过刚塑性理论求解极限承载力。Etezzad 等^[7]基于刚塑性理论研究了软土地基破坏模式变化规律。由于刚塑性理论无法分析应力应变关系与变形规律, 存在局限性。基于有限元数值方法被用于地基承载力分析, Lee 等^[8]基于理想弹塑性模型, 研究了各向同性地基在环形基础下的承载特性, 但未考虑应变硬化/软化特性。Lu 等^[9]基于偏硬化本构模型, 获得应变硬化土体的地基破坏模式。然而, 目前还鲜有针对应变软化土体的地基承载特性分析。

为克服软化材料数值模拟存在的不足, 本文提出一种考虑压力相关的隐式梯度塑性本构模型。首先根据广义微形态方法建立了热力学一致性框架, 进而建立了应变软化梯度塑性本构模型。通过对平面应变试验进行网格敏感性验证分析。最后引入到地基承载力分析中, 并与理想塑性模型的分析结果进行对比分析。

1 应变软化隐式梯度模型的建立

1.1 热力学理论框架

基于广义微形态方法, 自由能密度函数为^[10]

$$\psi = \psi_{\text{conv}}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \kappa^p) + \frac{1}{2} \tilde{h}(\kappa^p - \tilde{\kappa}^p)^2 + \frac{1}{2} \tilde{h} l^2 (\nabla \tilde{\kappa}^p)^2, \quad (1)$$

式中 $\psi_{\text{conv}}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \kappa^p) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\sigma} + \frac{h}{2} (\kappa^p)^2$ 为自由能密度函数, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ 为弹性应变张量; κ^p 为等效塑性应变; $\tilde{\kappa}^p$ 为反映微观结构信息的标量微应变, $\nabla \tilde{\kappa}^p$ 是其梯度; h 和 \tilde{h} 为材料硬化模量; l 为材料微观特征长度。

内力功率和外力功率分别为

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{in}} &= \int (\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + Q \cdot \dot{\kappa}^p + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \dot{\tilde{\kappa}}^p) dB, \\ P_{\text{ex}} &= \int (\bar{\boldsymbol{t}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} + \bar{T} \cdot \dot{\tilde{\kappa}}^p) dS, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}$, Q , $\boldsymbol{\tau}_k$ 为应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, 微应变率 $\dot{\kappa}^p$ 及其梯度 $\nabla \dot{\tilde{\kappa}}^p$ 的共轭应力, $\bar{\boldsymbol{t}}$ 和 \bar{T} 为常规面力和高阶面力。根据虚功原理, $P_{\text{in}} = P_{\text{ex}}$, 将式 (2) 代入可得宏观应力平衡方程及微力平衡方程:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{x}} &= 0 & \text{in } B \\ \boldsymbol{u} &= \bar{\boldsymbol{u}} & \text{on } S_u \\ \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{n} &= \bar{\boldsymbol{t}} & \text{on } S_t \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} Q &= \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \boldsymbol{x}} & \text{in } B \\ \tilde{\kappa}^p &= \bar{\tilde{\kappa}}^p & \text{on } S_u \\ \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{n} &= \bar{T} & \text{on } S_t \end{aligned} \right. \quad (3)$$

根据热力学第二定律, 耗散功率 $D = P_{\text{in}} - \dot{\psi} \geq 0$ 。

根据标准 Coleman-Noll 方程, 可得以下应力分量:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}, \quad (4)$$

$$Q = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\kappa}^p} = \tilde{h}(\tilde{\kappa}^p - \kappa^p), \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \psi}{\partial \nabla \tilde{\kappa}^p} = \tilde{h} l^2 \nabla \tilde{\kappa}^p, \quad (6)$$

以及热力学力分量:

$$\alpha = \frac{\partial (\psi - \psi_{\text{conv}})}{\partial \kappa^p} = \tilde{h}(\kappa^p - \tilde{\kappa}^p), \quad (7)$$

$$\beta = \frac{\partial \psi_{\text{conv}}}{\partial \kappa^p} = h(\kappa^p). \quad (8)$$

利用应力分量 (5) 和 (6), 可将微力平衡方程 (3) 转换为 Helmholtz 方程

$$\tilde{\kappa}^p - \kappa^p = l^2 \nabla^2 \tilde{\kappa}^p. \quad (9)$$

1.2 压力相关本构模型

根据所述应力分量, 提出耦合微应变与等效塑性应变的屈服函数

$$F = q - c - p \tan \varphi - (\alpha + \beta), \quad (10)$$

式中, $q = \sqrt{\frac{3}{2}} \boldsymbol{s} : \boldsymbol{s}$ 为等效剪应力 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{I}$ 为偏

应力张量, $p = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$ 为球应力, c 为黏聚力, φ 为摩擦角。

根据应力回射算法, 可得到雅可比矩阵为

$$\begin{bmatrix} \left(C_{ijkl}^{-1} + \Delta \lambda \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \right) & 0 & 0 & \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} & -\tilde{h} & -H & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

2 有限元数值模拟

由于引入了不相容微变形场, 因而需对额外的微力平衡方程进行求解。控制方程 (3) 的弱形式为

$$\int_B w_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dv = \int_{S_t} w_i \bar{t}_i da - \int_B (\nabla^s w)_{ij} \sigma_{ij} dv = 0, \quad (12)$$

$$\int_B \boldsymbol{\sigma} \left[\frac{\partial \tau_k}{\partial x_k} - Q \right] dv = \int_{S_t} \boldsymbol{\sigma} \bar{T} da -$$

$$\int_B \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial x_k} h l^2 \frac{\partial \tilde{\kappa}^p}{\partial x_k} dv - \int_B \boldsymbol{\sigma} h (\tilde{\kappa}^p - \kappa^p) dv = 0, \quad (13)$$

式中, w_i 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 为权函数。

对式 (12) 与 (13) 进行线性化, 最终得到刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{uu} & \boldsymbol{K}_{u\tilde{\kappa}} \\ \boldsymbol{K}_{\tilde{\kappa}u} & \boldsymbol{K}_{\tilde{\kappa}\tilde{\kappa}} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

3 平面应变压缩试验模拟

首先对双轴试验进行模拟, 验证正则化效果。模型和边界条件如图 1 所示, 试样尺寸为 20 mm × 15

mm, 试样底部固定, 顶部受位移加载。采用四节点四边形单元生成网格, 由 1200 和 4800 个单元生成的网格。材料参数为: 弹性模量 $E=6.0 \times 10^4$ kPa, 泊松比 $\nu=0.3$, 黏聚力 $c=20$ kPa, 摩擦角 $\varphi=20^\circ$, 硬化模量 $h=5.0 \times 10^3$ kPa, $\tilde{h}=-1.0 \times 10^4$ kPa, 材料特征长度为 $l=1.0$ mm。

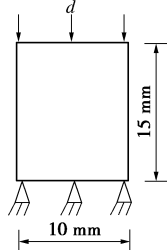


图 1 计算模型及边界条件

Fig. 1 Schematic graph of geometry and boundary conditions

常规模型计算结果如图 2 所示, 当单元数增加时, 剪切带宽度减小, 且带内等效塑性剪应变集度增加, 计算结果存在明显网格敏感性。梯度模型计算结果如图 3 所示, 随着单元数增加, 剪切带宽度和带内塑性应变几乎不变。从力 - 位移曲线 (见图 4) 对比可看出, 常规模型峰后响应随网格细化变化, 无法得到稳定解, 而梯度模型所得结果并不随网格细化明显变化。

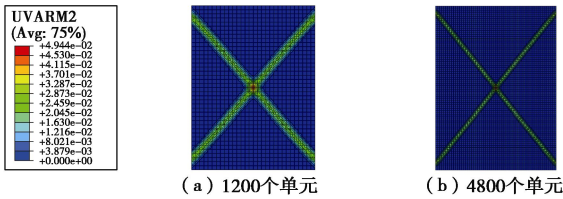


图 2 常规软化模型等效塑性应变云图

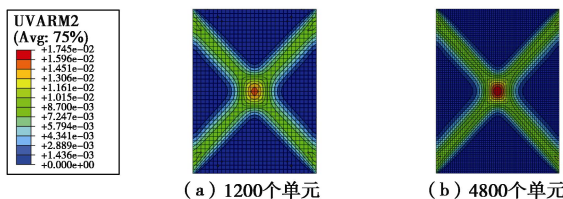


图 3 梯度塑性模型等效塑性应变云图

Fig. 3 Distribution of effective plastic strain obtained by strain gradient softening model

4 条形基础地基承载力分析

将建立的模型用于条形基础地基承载力分析, 计算模型如图 5 所示, 尺寸为 $30 \text{ m} \times 15 \text{ m}$, 底部固定, 水平变形受到约束。在 5 m 承载区域施加位移荷载, 并约束承载区水平向位移。使用 1800 和 7200 个平面应变单元生成的网格。材料参数为: 弹性模量 $E=4.0 \times 10^4$ kPa, 泊松比 $\nu=0.3$, 黏聚力 $c=40$ kPa, 摩擦角 $\varphi=20^\circ$, 塑性硬化模量 $h=1.0 \times 10^3$ kPa, $\tilde{h}=-2.0 \times 10^3$ kPa, 材料特征长度 $l=1.5$ m。

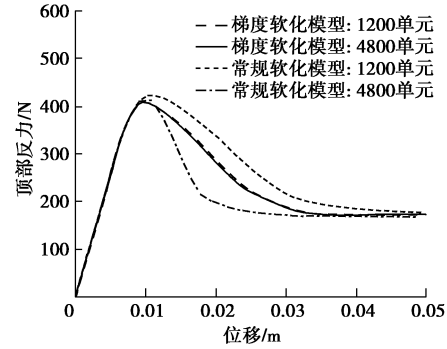


图 4 数值模拟得到的力 - 位移曲线

Fig. 4 Force-displacement curves obtained by simulation

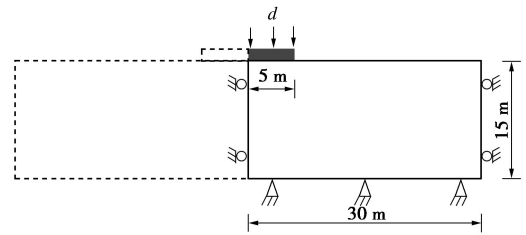


图 5 计算模型与边界条件

Fig. 5 Geometry and boundary conditions

通过理想弹塑性模型和梯度塑性软化模型计算的等效塑性应变分布如图 6, 7 所示。相对于理想弹塑性模型, 软化模型得到的破坏范围较集中。计算得到的地表变形曲线如图 8, 9 所示, 土体软化导致基础附近有更大竖向隆起和水平位移, 但地表变形影响范围却较小。产生这种现象的原因在于: 随着地基沉降增加, 基础附近土体先进入软化状态, 屈服应力降低导致抵抗变形能力减小, 并产生更大地表隆起和水平位移。距离基础较远土体软化程度较小, 当该处土体流动之前, 地基整体已达到残余极限状态。极限承载力随基础沉降变形曲线如图 10 所示, 理想弹塑性模型得到的最大极限承载力大于软化条件下的值。

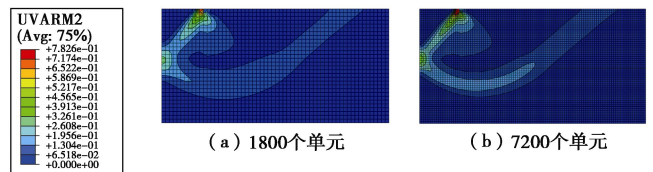


图 6 理想塑性模型等效塑性应变云图

Fig. 6 Countours of effective plastic strain using perfectly plasticity model

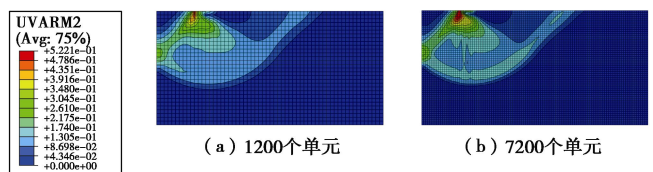


图 7 梯度软化模型等效塑性应变云图

Fig. 7 Countours of effective plastic strain using gradient softening model

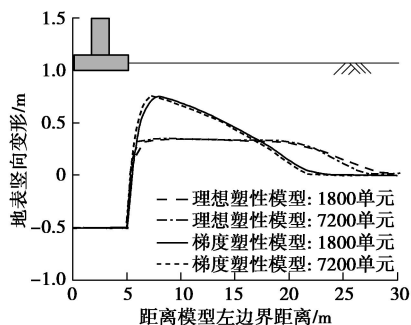


图8 不同模型地基表面竖向变形曲线

Fig. 8 Vertical deformations along foundation surface using different models

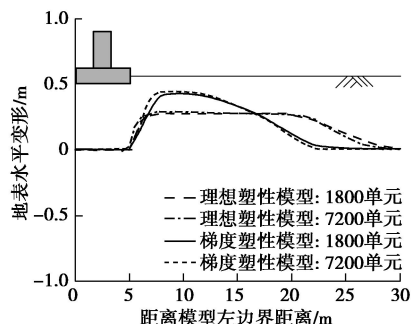


图9 不同模型地基表面水平变形曲线

Fig. 9 Horizontal deformations along foundation surface using different models

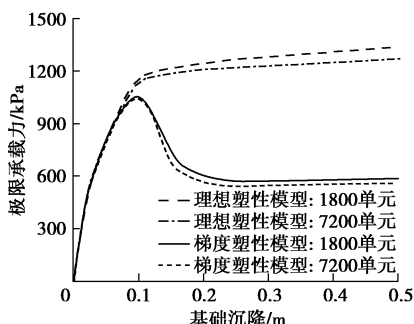


图10 不同模型极限承载力变化曲线

Fig. 10 Curves of bearing capacity using different models

5 结 语

为克服土体软化导致的数值模拟结果网格敏感性,提出了压力相关的应变软化梯度塑性模型,对土体渐进破坏过程进行模拟,主要得出的结论如下:

基于广义微形态学热力学一致性框架,在考虑摩擦项的屈服函数中引入微应变及梯度,建立了压力影响的隐式梯度塑性模型。建立了可耦合位移和微应变的有限元算法。平面应变试验模拟表明,梯度塑性模型能有效正则化应变软化边值问题,保证计算结果的网格客观性。地基承载力分析结果表明,应变软化导致地基失稳破坏范围相比理想塑性模型的小,靠近基础附近土体产生更大变形,土体极限承载力先增加后

减少最后达到稳定。

参考文献:

- [1] 李锡夔, CESCOTTO S. 梯度塑性的有限元分析及应变局部化模拟[J]. 力学学报, 1996, **28**(5): 575 - 584. (LI Xi-kui, CESCOTTO S. Finite element analysis for gradient plasticity and modeling of strain localization[J]. Acta Mechanica Sinica, 1996, **28**(5): 575 - 584. (in Chinese))
- [2] HUANG M S, QU X, LU X L. Numerical modeling of the progressive failure of soil with nonlocal regularized strain softening plasticity[J]. Computational Mechanics, 2017, doi:10.1007/s00466-017-1500-6.
- [3] 杜修力, 侯世伟, 路德春, 等. 梯度塑性理论的计算方法与应用[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(6): 1094 - 1101. (DU Xiu-li, HOU Shi-wei, LU De-chun, et al. Application of gradient plastic theory based on FEPG platform[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(6): 1094 - 1101. (in Chinese))
- [4] AIFANTIS E C. The physics of plastic deformation[J]. International Journal of Plasticity, 1987, **3**: 211 - 247.
- [5] ENGLER R A B, GEERS M G D, BAALJENS F P T. Nonlocal implicit gradient-enhanced elasto-plasticity for the modelling of softening behavior[J]. International Journal of Plasticity, 2003, **19**: 403 - 433.
- [6] PEERLINGS R H J. On the role of moving elastic-plastic boundaries in strain gradient plasticity[J]. Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, 2007, **15**: 109 - 120.
- [7] ETEZAD M, HANNA A M, KHALIFA M. Bearing capacity of a group of stone columns in soft soil subjected to local or punching shear failures[J]. International Journal of Geomechanics, 2018, **18**(12): 04018169.
- [8] LEE J K, S. LEE J S. Undrained bearing capacity factors for ring footings in heterogeneous soil[J]. Computers and Geotechnics, 2016, **75**: 103 - 111.
- [9] LU X L, XUE D W, HUANG M S, et al. A shear hardening plasticity model with nonlinear shear strength criterion for municipal solid waste[J]. Computers and Geotechnics, 2018, **104**: 204 - 215.
- [10] FOREST S. Micromorphic approach for gradient elasticity, viscoplasticity, and damage[J]. J Eng Mech, 2009, **135**(3): 117 - 131.

(责编: 黄贤沙)