

DOI: 10.11779/CJGE2019S1052

基于粒子群与 Markov 优化的 PMIGM (1,1) 模型 预测路基沉降方法研究

刘海明¹, 周小贵¹, 王忠伟², 黄 涤³, 杨怀皓¹

(1. 云南省土木工程防灾重点实验室(筹), 昆明理工大学建筑工程学院, 云南 昆明 650500; 2. 施甸县保施高速公路投资开发有限公司, 云南 施甸 678200; 3. 中国石油天然气股份有限公司云南销售分公司, 云南 昆明 650215)

摘 要: 高速公路路基沉降的准确预测对高速公路病害预防和治理有着极其重要的指导意义。以往的路基沉降预测模型多为单一模型或简单改进模型, 提出了一种基于粒子群与 Markov 优化的 PMIGM (1,1) 预测模型。首先, 基于灰色理论, 提出了改进的 IGM (1,1) 预测模型; 然后, 利用 Markov 理论对 IGM(1,1) 预测模型的相对残差序列进行修正, 使得该模型能反映数据的波动特征, 得到了 MIGM (1,1) 预测模型; 在此基础上, 采用粒子群算法对残差序列参数进行白化, 建立了 PMIGM (1,1) 预测模型。将该预测模型应用于云南保施高速公路高填方路基, 分析结果表明该模型可提高预测模型的精度。

关键词: 灰色理论; Markov 链; 粒子群; 路基沉降; PMIGM (1,1) 模型

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2019)S1-0205-04

作者简介: 刘海明(1982—), 男, 湖南邵阳人, 博士, 从事环境岩土工程以及岩土地震工程研究。E-mail: haiming0871@163.com。

Prediction of subgrade settlement using PMIGM(1,1) model based on particle swarm optimization and Markov optimization

LIU Hai-ming¹, ZHOU Xiao-gui¹, WANG Zhong-wei², HUANG Di³, YANG Huai-hao¹

(1. Yunnan Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering, Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China; 2. Shidian County Baoshi Expressway Investment Development Co., Ltd., Shidian 678200, China; 3. Yunnan Sales Branch, Chinese National Petroleum Corporation, Kunming 650215, China)

Abstract: Accurate prediction of subgrade settlement of expressways is of great significance to their disease prevention and treatment. The previous prediction models for the subgrade settlement are mostly single models or simple improved models. A PMIGM(1,1) prediction model based on the particle swarm optimization (PSO) and Markov optimization is proposed. Firstly, based on the grey theory, an improved GM(1,1) prediction model is put forward. Then, according to the theory knowledge of Markov chains, an MIGM(1, 1) model is built to correct the relative residuals of IGM(1, 1) model, which can reflect the volatility characteristics of the data. Based on the principle of PSO, an optimization of PMIGM(1, 1) model is set up, which crystallizes the parameters of grey interval. The forecasting model is applied to a high-fill subgrade of Baoshan-Shidian Expressway in Yunnan Province. The analysis results show that the proposed model can improve the accuracy of the forecasting model.

Key words: grey theory; Markov Chain; particle swarm optimization; subgrade settlement; PMIGM(1,1) model

0 引 言

云南的复杂地质环境和高山地貌造成了大量的高填方路基, 高填方路基的沉降控制对于高速公路的安全和运营非常重要^[1], 而准确预测高速公路路基沉降是沉降控制的前提和关键。目前, 沉降预测的方法可分为: ①基于土力学理论的预测方法: 主要有分层总和法、有限元法、有限差分法等, 该方法一般存在几

何条件、边界条件或本构模型与工程实际不一致的弊端^[2], 从而影响预测结果的准确性; ②基于监测数据的预测方法: 主要有 Asaoka 法、双曲线法、三点法、沉降差法、遗传算、神经网络法等, 该类方法普遍存

基金项目: 国家自然科学基金项目(51764020); 国家“十三五”重点研发计划(2017YFC0804601)

收稿日期: 2019-04-28

在建模所需的数据量较大、样本数据需要呈规律性分布的弊端。

鉴于灰色预测理论所需的数据样本小的优势,该理论自邓聚龙提出以来,其在沉降预测方面开展了较多的研究,并获得了一些成果和认识。柳治国等^[3]建立了非等步长灰色时变参数预测模型。李洪然等^[4]构建了参数累积估计的灰色沉降预测模型。Guo 等^[5]提出了一种新的多变量灰色自记忆耦合预测模型。韩晋等^[6]建立了一种基于非等时距加权灰色模型和神经网络的组合预测算法。上述这些模型没有考虑残余误差的波动性,而实际工程中,由于监测数据受多种因素的影响,其残余误差的波动性对监测结果影响比较大。

本文基于灰色理论,提出改进的灰色 IGM (1,1) 预测模型;结合 Markov 链理论,对残差序列进行预测,建立了基于 Markov 优化的 MIGM (1,1) 模型,该模型能考虑原始序列的波动性特征;在此基础上,通过粒子群优化算法白化模型的参数,建立 PMIGM (1,1) 预测模型。以云南省某高速公路高填方路基的沉降监测数据为例,采用不同预测模型进行对比分析,验证了 PMIGM (1,1) 模型的可行性。

1 改进的灰色 IGM (1,1) 模型

1.1 传统的灰色 GM (1,1) 模型

通常,对原始数据进行累加可得到指数型增长序列,然后采用 GM (1,1) 模型进行建模,获得的数据累减得到原始数据的预测值。

设原始数据为

$$X^{(0)} = (X^{(0)}(1), X^{(0)}(2), \dots, X^{(0)}(n)) \quad (1)$$

累加得到

$$X^{(1)} = (X^{(1)}(1), X^{(1)}(2), \dots, X^{(1)}(n)) \quad (2)$$

其中, $X^{(1)}(i) = \sum_{k=1}^i X^{(0)}(k)$, $i = 1, 2, \dots$ 。

由此, $X^{(1)}$ 满足微分方程:

$$\frac{dX^{(1)}}{dt} + aX^{(1)} = \mu \quad (3)$$

鉴于数据序列的离散性,将式 (3) 进行离散化处理,

$$\frac{dX^{(1)}}{dt} = X^{(1)}(k) - X^{(1)}(k-1) \quad (k = 2, 3, 4, \dots, n) \quad (4)$$

将式 (3) 的 $X^{(1)}$ 视为 $X^{(1)}(k)$, 用 $X^{(1)}(k)$ 和 $X^{(1)}(k-1)$ 的权重 μ 的加权值 $Z^{(1)}(k)$ 来表示, $\mu \in [0, 1]$,

$$Z^{(1)}(k) = \mu X^{(1)}(k) + (1 - \mu)X^{(1)}(k-1) \quad (k = 2, 3, 4, \dots, n) \quad (5)$$

结合式 (4), (5) 可得

$$X^{(1)}(k) - X^{(1)}(k-1) = -aZ^{(1)}(k) + \mu \quad (6)$$

记: $\hat{\alpha} = (a, \mu)^T$ 。

基于最小二乘法可得

$$\hat{\alpha} = (B_{\mu}^T B_{\mu})^{-1} B_{\mu}^T Y_n \quad (7)$$

式中,

$$Y_n = \begin{bmatrix} X^{(0)}(2) & X^{(0)}(3) & \dots & X^{(0)}(n) \end{bmatrix}^T, \\ B_{\mu} = \begin{bmatrix} -(\mu X^{(1)}(2) + (1 - \mu)X^{(1)}(1)) & \dots & 1 \\ -(\mu X^{(1)}(3) + (1 - \mu)X^{(1)}(2)) & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -(\mu X^{(1)}(n) + (1 - \mu)X^{(1)}(n-1)) & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

其中, B_{μ} 的下标 μ 表示 B_{μ} 与参数 μ 相关。

1.2 基于残差序列优化的 IGM (1,1) 模型

记 a_{μ} 为 a , μ 为 μ_{μ} , 求得 a_{μ} 和 μ_{μ} , 得微分方程式 (3) 的解为

$$\hat{X}^{(1)} = c \cdot e^{-a_{\mu} t} + \mu_{\mu} / a_{\mu} \quad (8)$$

其中, $\hat{X}^{(1)}(1) = X^{(0)}(1)$, 将式 (8) 具体展开, 得

$$\hat{X}^{(0)}(1) = \hat{X}^{(1)}(1) = c + \mu_{\mu} / a_{\mu} \quad (9)$$

$$\hat{X}^{(0)}(k+1) = \hat{X}^{(1)}(k+1) - \hat{X}^{(1)}(k) = c \cdot e^{-a_{\mu} k} (1 - e^{-a_{\mu}}) \\ (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (10)$$

要寻找合适的 c 值使残差序列的平方和最小, 以使预测模型的精度最高。设实际值与预测值的残差平方和为 S ,

$$S = \sum_{k=1}^n (\hat{X}^{(0)}(k) - X^{(0)}(k))^2 = \left(c + \frac{\mu_{\mu}}{a_{\mu}} - X^{(0)}(1) \right)^2 + \\ \sum_{k=2}^n \left[c \cdot e^{-a_{\mu} k} (1 - e^{-a_{\mu}}) - X^{(0)}(k) \right]^2 \quad (11)$$

$$\frac{ds}{dc} = 2c \left(1 + \sum_{k=2}^n e^{-2a_{\mu} k} (1 - e^{-a_{\mu}})^2 \right) + 2 \left[\frac{\mu_{\mu}}{a_{\mu}} - X^{(0)}(1) \right] - \\ 2 \sum_{k=2}^n X^{(0)}(k) e^{-a_{\mu} k} (1 - e^{-a_{\mu}}) \quad (12)$$

令 $ds/dc = 0$ 解得

$$c^* = \frac{\left[X^{(0)}(1) - \frac{\mu_{\mu}}{a_{\mu}} \right] + \sum_{k=2}^n X^{(0)}(k) \cdot e^{-a_{\mu} k} (1 - e^{-a_{\mu}})}{1 + \sum_{k=2}^n e^{-2a_{\mu} k} (1 - e^{-a_{\mu}})^2} \quad (13)$$

用式 (13) 求得的 c^* 代入式 (10), (11), 即可确定式中的 μ_{μ} 值, 并将其用于预测。

2 基于 Markov 优化的 MIGM (1,1) 模型

灰色预测模型反映了数据呈指数型变化的特点, 鉴于预测值受到较多因素的影响, 其预测误差具有波动性, 可通过 Markov 理论进行优化。基于模型的相对误差, 有

$$x^{(0)}(i) = \hat{x}^{(0)}(i) / 1 - \varepsilon(i) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (14)$$

根据 $\varepsilon(1), \dots, \varepsilon(i), \dots$, 确定 $\varepsilon(n+1)$, 在 $k = n+1$ 情况下, 考察式 (14), $\hat{x}^{(0)}(n+1)$ 为式 (4) 外推的预测值, 若能求出 $\varepsilon(n+1)$, 则用式 (14) 的 $x^{(0)}(n+1)$ 作

为其预测值。

Markov 优化的基本思路, 对原始序列的残差 $\varepsilon(1), \varepsilon(2), \varepsilon(3) \cdots, \varepsilon(n)$ 设定为 l 个状态, 一般等间距划分为 l 个状态区间, $S_i (i=1, 2, 3, \cdots, l)$, 记第 i 个状态的上限为 S_i^u 和下限 S_i^l , 求得残差序列的状态转移矩阵 p , 根据状态转移矩阵 p 对残差进行预测。

一步状态转移矩阵为

$$p = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1l} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nl} \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中 $P_{ij} = N_{ij} / N_i$; $i, j = 1, 2, \cdots, l$; P_{ij} 表示由状态 S_i 转移到状态 S_j 的概率; N_i 为状态 S_i 出现的次数; N_{ij} 为由状态 S_i 转移到状态 S_j 的次数。

设 $k = n$ 时的状态为

$$\varepsilon(n) = (p_1, p_2, p_3, \cdots, p_l) \quad (16)$$

当 $\varepsilon(n) \in S_i$ 时, p_i 为 1; 当 $\varepsilon(n) \notin S_i$, $p_i = 0$, $i = 1, 2, \cdots, l$ 。

则 $k = n + 1$ 时的状态为

$$\varepsilon(n)p = (\sum_{i=1}^l p_i p_{i1}, \sum_{i=1}^l p_i p_{i2}, \cdots, \sum_{i=1}^l p_i p_{in}) \quad (17)$$

根据式 (17) 确定相应状态的概率, 从而确定残差的预测值。

$$\varepsilon(n+1) = \sum_{j=1}^l \bar{S}_j \cdot \sum_{j=1}^l p_i p_{ij} \quad (18)$$

确定基于 Markov 优化的 MIGM (1,1) 模型的预测值。

$$\hat{x}_{MGM}^0(k+1) = \hat{x}^0(k+1) + \frac{S_{k+1}^u + S_{k+1}^l}{2} \quad (19)$$

式中, S_{k+1}^u, S_{k+1}^l 为表示 $k+1$ 时残差序列所处区间的上、下界限值。

3 基于粒子群的 PMIGM (1,1) 模型

粒子的速度与位置按式 (20), (21) 更新:

$$v_{kd}^{i+1} = \omega v_{kd}^i + c_1 \eta (h_{kd}^i - x_{kd}^i) + c_2 \xi (h_{gd}^i - x_{kd}^i) \quad (20)$$

$$x_{kd}^{i+1} = x_{kd}^i + v_{kd}^{i+1} \quad (21)$$

式中 $x_{kd} = (x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{kc})$ 为第 k 个粒子的位置; $v_{kd} = (v_{k1}, v_{k2}, \cdots, v_{kc})$ 为第 k 个粒子的速度, 限定在区间 (v_{\min}, v_{\max}) 内; $h_{kd} = (h_{k1}, h_{k2}, \cdots, h_{kc})$ 为第 k 个粒子的历史最优点; $h_{gd} = (h_{g1}, h_{g2}, \cdots, h_{gc})$ 为领域内所有粒子经过的历史最优点; c_1, c_2 为分别为认知加速系数和社会加速系数, 一般情况下, $c_1 \in [0, 4], c_2 \in [0, 4]$, 可取 $c_1 = c_2 = 2$; η, ξ 为伪随机数, $\eta \in U[0, 1], \xi \in U[0, 1]$; ω 为惯性权重, 适当地选取 ω 可改变粒子群的搜索能力, 当 $\omega = 1$, 称作基本粒子群算法。

为了提高粒子群的搜索效率, 避免采用单一的惯

性权重 ω 使搜索陷入局部优化, 本文提出了使用动态的惯性权重 ω_{iter} :

$$\omega_{\text{iter}} = \omega_{\max} - \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{N_{\text{iter}_{\max}}} \times N_{\text{iter}} \quad (22)$$

式中 $N_{\text{iter}_{\max}}$ 为模型的最大迭代次数; N_{iter} 为迭代次数, $N_{\text{iter}} \in (0, N_{\text{iter}_{\max}})$; ω_{\max} 为最大的惯性权重, 取为 1.0; ω_{\min} 为最小的惯性权重, 取为 0。

基于 PSO 优化的 PMIGM (1,1) 预测模型的计算流程如图 1 所示。

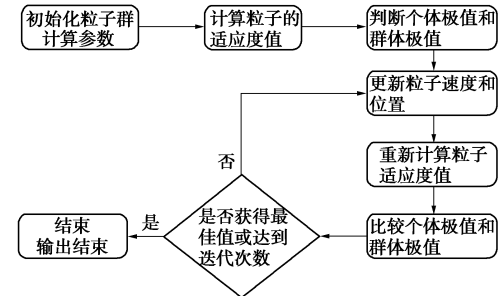


图 1 PSO 优化的 PMIGM (1,1) 预测模型的流程示意图

Fig. 1 Flow chart of PMIGM(1,1) prediction model optimized by PSO algorithm

4 案例

云南保施高速公路是杭瑞高速的纵向连接线, 保施高速具有工程量大、地形地质条件复杂、施工难度大等特点。保施高速多处路基位于“V”形冲沟中, 路基填方厚度高达 29 m, 于 2017 年 8 月—2018 年 7 月对其进行监测, 其检测见表 1 所示。按照本文建立灰色 PMIGM (1,1) 预测模型。PSO 优化的参数设置如下: 粒子群数量 $m = 200$, 最大迭代次数 $\text{iter}_{\max} = 200$, 粒子速度 $v \in [-0.2, 0.2]$, 粒子位置 $y \in [-2, 2]$, $c_1 = c_2 = 2$ 。通过粒子群优化算法得到不同状态的白化权函数为 $a_1 = 0.4334$, $a_2 = 0.1892$, $a_3 = 0.2751$ 。将 PMIGM (1, 1) 预测模型与 MIGM (1, 1) 预测模型、IGM (1, 1) 预测模型、灰色 Verhulst 预测模型 (GVM) 及 GM (1,1) 模型进行对比。把 2017 年 8 月—2018 年 7 月的监测数据作为已知数据, 分别用以上几种建模方法建立模型来预测 2018 年 8 月—2019 年 1 月的沉降量, 表 1 给出了不同预测模型的预测结果。

根据式 (23) 计算不同预测模型的绝对误差, 在此基础上, 按式 (24) 计算其平均相对误差, 按式 (25) 计算均方根误差。

$$\varepsilon = |x^{(0)}(i) - \hat{x}^{(0)}(i)| \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad (23)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\hat{x}^{(0)}(i) - x^{(0)}(i) / x^{(0)}(i)| \quad (24)$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [\hat{x}^{(0)}(i) - \bar{x}^{(0)}(i)]^2} \quad (25)$$

式中 $\hat{x}^{(0)}(i)$ 为表示各月的沉降量预测值; $x^{(0)}(i)$ 为

表 1 不同预测模型对保施高速高填方路基沉降量预测值及其误差分析表

Table 1 Predicted settlement values and error analysis of high-fill subgrade of Baoshan-Shidian Expressway by different prediction models

年份	月份	$X^{(0)}(k)$	GM(1,1)		GVM		IGM(1,1)		MIGM(1,1)		PMIGM(1,1)	
			$\hat{X}^{(0)}(k)$	ε	$\hat{X}^{(0)}(k)$	ε	$\hat{X}^{(0)}(k)$	ε	$\hat{X}^{(0)}(k)$	ε	$\hat{X}^{(0)}(k)$	ε
2015 年	8 月	17.6	17.6	—	17.6	—	17.60	—	17.67	—	17.57	—
	9 月	17.1	17.51	2.38	17.04	0.33	17.42	1.87	17.25	0.89	17.18	0.47
	10 月	16.6	16.65	0.32	16.46	0.87	16.63	0.18	16.72	0.72	16.62	0.14
	11 月	15.9	15.84	0.38	15.84	0.36	15.81	0.57	15.90	0.01	15.81	0.56
	12 月	15.3	15.07	1.53	15.2	0.63	15.23	0.46	15.41	0.69	15.39	0.57
	1 月	14.8	14.33	3.18	14.54	1.73	14.50	2.03	14.65	1	14.63	1.12
2016 年	2 月	13.7	13.63	0.51	13.87	1.21	13.65	0.36	13.68	0.12	13.61	0.69
	3 月	13.1	12.96	1.04	13.18	0.57	12.96	1.07	13.02	0.64	12.94	1.21
	4 月	12.3	12.33	0.25	12.48	1.42	12.38	0.65	12.38	0.65	12.31	0.07
	5 月	11.7	11.73	0.24	11.77	0.61	11.76	0.51	11.78	0.64	11.71	0.07
	6 月	10.9	11.16	2.35	11.07	1.54	11.03	1.19	10.99	0.86	10.95	0.43
	7 月	10.4	10.61	2.03	10.37	0.29	10.56	1.54	10.46	0.54	10.41	0.12
$\bar{\varepsilon}$			1.18		0.80		0.87		0.60		0.47	
S			0.22		0.13		0.15		0.09		0.09	

注：预测值单位为 mm； ε 与 $\bar{\varepsilon}$ 的单位为%。
为各月的沉降量实测值； n 为数据总和， $n=12$ 。

表 1 与图 2 表示不同预测模型的相对误差、平均相对误差以及均方差误差，GM（1,1）、GVM、IGM（1,1）以及 MIGM（1,1）模型的平均相对误差分别为 1.18%、0.80%、0.87%以及 0.60%，PMIGM（1,1）的平均相对误差为 0.47%，表明了 PMIGM（1,1）预测模型的有效性。采用 PMIGM（1,1）模型预测该填方路基沉降量如表 2 所示。

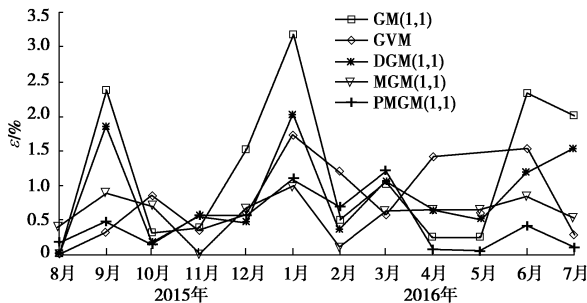


图 2 不同预测模型的绝对误差对比图

Fig. 2 Contrast of absolute errors by different prediction models

表 2 基于 PMIGM（1,1）模型的高填方路基沉降量预测

Table 2 Predicted settlements of high-fill subgrade based on PMIGM(1,1) model (mm)						
日期	2018-08	2018-09	2018-10	2018-11	2018-12	2019-01
预测值	10.07	9.58	9.11	8.67	8.11	8.02

5 结 论

（1）由于 PMIGM（1,1）模型源于灰色理论，而 GM（1,1）模型适用于呈指数型规律的数据，故 PMIGM（1,1）预测模型对指数型规律的数据序列适应性较好。

（2）结合灰色理论、Markov 链以及粒子群优化理论，建立了 PMIGM（1,1）预测模型，对云南省保施高速公路高填方路基进行预测，研究分析表明，PMIGM（1,1）预测模型优于 MIGM（1,1），IGM（1,1），

GVM 以及 GM（1,1）预测模型，表明本文提出的 PMIGM（1,1）模型的有效性。

参考文献：

[1] DJONKAMLA Y, DORE G, BILODEAU J P. Development of a prediction model of permanent deformation considering the physical properties of subgrade soil[J]. Canadian Journal of Civil Engineering, 2016, 43(11): 958 - 967.

[2] POTTS D M. Numerical analysis: a virtual dream or practical reality (42nd Rankine Lecture)[J]. Géotechnique, 2003, 53(6): 535 - 573.

[3] 柳治国, 陈善雄, 徐海滨. 沉降预测的非等步长灰色时变参数模型[J]. 岩土力学, 2004, 32(12): 1 - 4. (LIU Zhi-guo, CHEN Shan-xiong, XU Hai-bin. Unequal step lengths grey time-varying parameters model for settlement prediction[J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, 32(12): 1 - 4. (in Chinese))

[4] 李洪然, 张阿根, 叶为民. 参数累积估计灰色模型及地面沉降预测[J]. 岩土力学, 2008, 29(12): 3417 - 3421. (LI Hong-ran, ZHANG A-gen, YE Wei-min. Accumulating method GM(1,1) model and prediction of land subsidence[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(12): 3417 - 3421. (in Chinese))

[5] GUO X, LIU S, WU L, et al. A multi-variable grey model with a self-memory component and its application on engineering prediction[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2015, 42: 82 - 93.

[6] 韩 晋, 杨 岳, 陈 峰, 等. 基于非等时距加权灰色模型与神经网络的组合预测算法[J]. 应用数学和力学, 2013, 34(4): 408 - 419. (HAN Jin, YANG Yue, CHEN Feng, et al. Combination forecasting algorithm based on non-equal interval weighted grey model and neural network[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2013, 34(4): 408 - 419. (in Chinese))