

DOI: 10.11779/CJGE201912008

# 基于非连续面拓扑优化技术的块体结构体系 稳定性分析方法

黄齐武<sup>1, 2, 3</sup>

(1. 北京市轨道交通建设管理有限公司, 北京 100068; 2. 城市轨道交通全自动运行系统与安全监控北京市重点实验室, 北京 100068;  
3. 中国地质大学(北京)工程技术学院, 北京 100083)

**摘 要:** 计算块体结构体系的极限荷载和确定其相应的临界破坏模式是实际工程中的一项重要任务。非连续面拓扑优化技术(DLO)基于严谨塑性理论的速度非连续面(能量耗散)和优化理论从大量的潜在非连续面集中确定非连续面的临界布局,从而构成临界破坏模式。DLO 程序利用栅格点阵进行离散,节点间连线为潜在滑移面或速度跳跃的非连续面。相容性通过直接检验节点运动变量的线性方程来实现。最终的目标函数为速度变量的线性函数,依据所有非连续面的平动和转动总耗散能量建立。为提高计算效率,在传统基结构的基础上,提出考虑杆件激活和冗余删除的自适应节点连接算法。虽然优化解受离散节点初始位置的影响,但通过细分栅格节点,节点的确切位置将对优化解的影响相对较小。与相关文献的基准问题和算例进行对比,验证 DLO 方法的应用潜力。研究表明,改进的自适应节点连接算法,可应用处理常规的块体结构稳定性问题,不仅极大地提高了计算效率,而且避免数值计算的持续振荡。

**关键词:** 块体结构; 极限分析; 非连续面拓扑优化; 稳定分析; 平动和转动

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2019)12-2233-10

**作者简介:** 黄齐武(1979—),男,高级工程师,博士,主要从事城市轨道交通岩土工程技术和数值方法研究。E-mail: richardhuangqw@163.com。

## Stability analysis of blocky system structures based on discontinuity layout optimization technique

HUANG Qi-wu<sup>1, 2, 3</sup>

(1. Beijing MTR Construction Administration Corporation, Beijing 100068, China; 2. Beijing Key Laboratory of Fully Automatic Operation and Safety Monitoring for Urban Rail Transit, Beijing 100068, China; 3. School of Engineering and Technology, China University of Geosciences, Beijing 100083, China)

**Abstract:** Computing the collapse loads and identifying the associated mechanism of block assemblage structures is an important task in practical engineering. The discontinuity layout optimization (DLO) is proposed entirely based on velocity discontinuities with rigorous plasticity theory, which the optimization uses to determine the critical arrangement of the discontinuities from a large set of potential discontinuities. In DLO procedure, the initial problem is discretized using the nodes distributed across the body under consideration. The potential discontinuity lines or slip lines along which jumps in rate of displacement are created by linking each node to every other node. Compatibility can be straightforwardly checked at each node by a simple linear equation involving movement variables. Finally an objective function may be defined based on the total energy dissipated due to translation along all discontinuities, a linear function of the velocity variables. In order to improve the performance of the classical ground structure approach, the adaptive member refinement (adaptive nodal connection procedure) considers both deletion and addition of members in the iterative process. Although the solution will be influenced somewhat by the starting position of the nodes, when fine nodal refinement is used, the exact positions of individual nodes will have relatively little influence on the solution generated. The procedure is applied to the problems from the literature and also to new benchmark problems including masonry walls and jointed rock slopes so as to illustrate potentialities of the method. The results show that the proposed adaptive member refinement algorithm can deal with the stability analysis of practical blocky structures and avoid oscillating between two different

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目(41202219); 北京市重点实验室资助项目(SCJJ2018005)  
收稿日期: 2018-11-23

solutions at successive iterations with the results that the optimization efficiency is improved significantly.

**Key words:** blocky structure; limit analysis; discontinuity layout optimization; stability analysis; translation and rotation

## 0 引言

块体结构在土木工程中的重要性是不言而喻的。块体结构一般包括完整的块体单元（砌块、石材、砖和黏土等）和切割块体的结构面（体）（砂浆砌缝或节理）。非连续结构体系的块体破坏性能已经进行详细地研究，包括古建筑的砌块、研石和石笼挡墙或含节理裂隙面的块状岩体。

刚性块体分析法是一种极限分析计算方法，被广泛应用于分析如拱桥砌体重力式结构。Livesley<sup>[1]</sup>首次利用线性规划方法求解极限分析下限法问题，随后扩展到三维块体系统<sup>[2]</sup>。值得注意的是，Boothby 等<sup>[3]</sup>及 Boothby<sup>[4]</sup>基于能量泛函的极值特性建立块体结构的稳定性判据。Gilbert 等<sup>[5]</sup>、Melbourne 等<sup>[6]</sup>采用实验和理论佐证，指出摩擦因素在多拱圈（multi-ring）拱桥结构分析中尤其重要。Baggio 等<sup>[7-8]</sup>提出了面向计算机化的极限定理混合形式的数学规划方法。随后，Ferris 等<sup>[9]</sup>开发了一个高效、强大的松弛方案，以对二维块体结构的极限承载性能进行直接最小化计算。事实上，关于刚性块体结构的数学规划问题的极限分析构造涉及几个方面的问题：接触界面的建模、屈服函数和相互作用效应的定义以及塑性应变的流动规律假设。依据所选择的建模方法，极限分析问题最终形成线性或非线性的数学规划问题。屈服条件控制方程的非线性来源和数量与接触面的相互作用密切相关<sup>[8, 10-11]</sup>。

目前，极限分析研究的重点是开发高效和功能强大的数值工具，并在工程实践中应用。这需要借助数值离散化策略和应用数学规划工具。基于有限元的数值程序特别适合于极限分析问题相应的应力场或速度场的构造<sup>[12-14]</sup>。当然，当使用有限元时，所获得的最优解对初始网格具有高度敏感性或依赖性，特别是在应力或位移奇异区域。使用高阶单元或自适应网格划分技术<sup>[15-19]</sup>可克服这类问题，但引致问题求解的复杂化。因此，数值极限分析问题应当探索一系列替代方法。

非连续面拓扑优化技术（discontinuity layout optimization, DLO），一种无单元法，是砌体结构和岩土工程稳定性分析的有效手段或方法。现有研究表明<sup>[20]</sup>，DLO 克服了传统方法的诸多困难（例如，极限分析有限元法结果对应力或位移奇异点附近网格布置高度敏感）。DLO 不需要划分网格，研究域范围内离散栅格节点间的非连续面临界布置通过有效的优化过程来直接识别。本文旨在例证 DLO 可应用于包括砌

体和平面应变岩土等块体结构的稳定性问题。

## 1 非连续面拓扑优化技术

DLO 是确定结构极限荷载的极限分析上限法，主要利用栅格节点（ $n$ ）对问题域进行离散，而任意两个节点间的连线（ $m$ ）构成潜在的滑移线或速度非连续面。破坏模式由节点间的潜在非连续面组合构造而成。再通过对每个非连续面赋予材料特性（Mohr-Coulomb 类型材料）和定义边界条件，最终的临界破坏状态通过最小化内部能量的数学规划方法进行优化求解。

DLO 的数学构造形式完全基于非连续面的相对位移（本文为广义称谓，实际为应变率或速度），每个非连续面设置变量来定义相对滑动位移。如图 1 所示，问题研究域采用  $n$  个节点， $m$  个节点间连线（非连续线）进行构造，上限形式的数学线性规划可表述为

$$\text{minimize } \lambda f_L^T d = -f_D^T d + g^T p, \quad (1)$$

$$Bd = 0$$

$$\text{subject to } Np - d = 0, \quad (2)$$

$$f_L^T d = 1$$

$$p \geq 0$$

式中  $f_L[N]$ 、 $f_D[N]$  分别为  $(2m)$  活载、恒载的切向和法向分量矩阵； $\lambda$  为极限（或破坏）荷载系数； $g[N]$  为  $(2m)$  非连续面的长度  $l[m]$  和黏聚力  $c[kPa]$  的乘积； $B[-]$  为  $(2n \times 2m)$  相容矩阵； $N[-]$  为  $(2m \times 2m)$  塑性流动矩阵。在方程式（1）和（2）中， $d$  和  $p$  为线性规划问题的未知量，且  $d[m]$  是  $(2m)$  非连续面位移变量， $p[-]$  是  $(2m)$  塑性算子矩阵， $[-]$  内为物理单位。

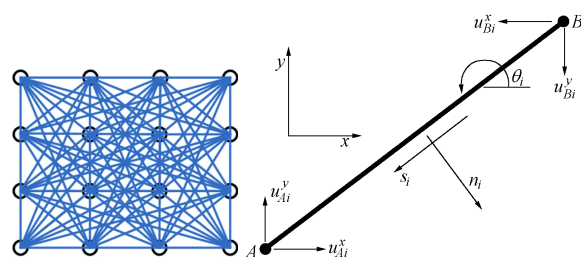


图 1 非连续面布置和节点连接非连续面  $i$  的示意图

Fig. 1 Discontinuity arrangement and discontinuity  $i$  with inter-node connection

### 1.1 相容性

机动形式从大量潜在的非连续面模式中确定临界模式。这些模式可以从刚性块体间的非连续面来构造。如图 1 所示，每个非连续面分别存在法向和切向的跳跃位移  $n_i[m]$  和  $s_i[m]$ 。相容性通过离散节点的约

束来实现。如图 2 所示, 在任意一个节点处, 式 (3) 必须成立即可满足相容性要求。其中,  $\alpha_i = \cos\theta_i$  和  $\beta_i = \sin\theta_i$ ,  $\theta_i$  为非连续面  $i$  和  $x$  轴逆时针夹角。在每个节点重复总和满足式 (3a), (3b)。

$$\sum_{i=1}^5 \alpha_i s_i - \beta_i n_i = 0, \quad (3a)$$

$$\sum_{i=1}^5 \beta_i s_i + \alpha_i n_i = 0, \quad (3b)$$

局部相容矩阵  $\mathbf{B}$  由  $x$  轴方向余弦  $\alpha_i = \cos\theta_i$  和  $\beta_i = \sin\theta_i$  推导, 分别与切向和法向位移变量  $s_i$  和  $n_i$  有关; 节点位移矢量  $\mathbf{u}_{Ai}$  [m] 和  $\mathbf{u}_{Bi}$  [m], 每个矢量有两个自由度, 即

$$\mathbf{B}_i \mathbf{d}_i = \mathbf{u}_i, \quad (4a)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_i & -\beta_i \\ \beta_i & \alpha_i \\ -\alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & -\alpha_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_i \\ n_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{Ai}^x \\ u_{Ai}^y \\ u_{Bi}^x \\ u_{Bi}^y \end{Bmatrix}. \quad (4b)$$

非连续面  $i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) 局部相容矩阵  $\mathbf{B}_i$  组装成整体相容矩阵  $\mathbf{B}$ 。该相容条件需确保节点  $j$  连接组成的非连续面切向和法向位移总和为零, 生成的  $\mathbf{B}\mathbf{d}=\mathbf{0}$  如式 (4a) 所示。对位于无约束边界的  $s_i$  和  $n_i$  可作为独立变量考虑。

由于考虑转动变量, 需修正上述式 (4) 数值形式, 基本变量  $\mathbf{d}^T = \{s_1, n_1, \omega_1, s_2, n_2, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ , 其中, 非连续面  $i$  的相对剪切和法向位移变量为  $s_i$  和  $n_i$  外, 增加相对转动变量  $\omega_i$ 。对于非连续面  $i$  的全域协调约束变为

$$\mathbf{B}_i \mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & -\beta_i & \frac{l_i \beta_i}{2} \\ \beta_i & \alpha_i & -\frac{l_i \alpha_i}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_i & \beta_i & \frac{l_i \beta_i}{2} \\ -\beta_i & -\alpha_i & -\frac{l_i \alpha_i}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_i \\ n_i \\ \omega_i \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

式中,  $\mathbf{B}_i$  和  $\mathbf{d}_i$  分别为局部协调矩阵和非连续面  $i$  位移,  $l_i$  为非连续面  $i$  的长度。

## 1.2 流动法则和能量耗散

对于其他的非连续面而言, 依据 Mohr-Coulomb 屈服准则, 法向位移  $n_i$  和切向位移  $s_i$  满足一定的关系, 即相关联流动法则  $n_i = s_i \tan\varphi_i$ 。其中,  $\varphi_i$  为摩擦角。引入的非连续面  $i$  塑性算子  $p_i^+$  和  $p_i^-$ , 对于切向位移, 如图 3 所示, 正剪切方向存在一致和相反两种不同的

模式。对于剪切位移在正方向  $s_i^+ = p_i^+ \geq 0$  且  $s_i^- = 0$ , 对剪切位移为负方向  $s_i^- = p_i^- \geq 0$  且  $s_i^+ = 0$ 。引入全部的剪切位移  $s_i = s_i^+ - s_i^-$  和  $n_i = n_i^+ + n_i^- = s_i^+ \tan\varphi_i + s_i^- \tan\varphi_i$ , 且  $s_i^+ = 0$  或  $s_i^- = 0$ , 以矩阵形式表述为

$$\mathbf{N}_i \mathbf{p}_i - \mathbf{d}_i = \mathbf{0}, \quad (6a)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \tan\varphi_i & \tan\varphi_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_i^+ \\ p_i^- \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} s_i \\ n_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (6b)$$

式中,  $p_i^+$  和  $p_i^-$  为线性规划问题的未知量。如考虑转动模式, 则非连续面  $i$  的局部塑性流动约束改写成

$$\mathbf{N}_i \mathbf{p}_i - \mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ \tan\varphi_i & \tan\varphi_i & u_i l_i & u_i l_i \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_i^1 \\ p_i^2 \\ p_i^3 \\ p_i^4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} s_i \\ n_i \\ \omega_i \end{Bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

$$u_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{1 + \exp(\pi \tan\varphi_i)}, \quad (8)$$

式中 塑性算子  $p_i^1, p_i^2$  及增加额外的变量  $p_i^3, p_i^4$ ;  $u_i$  为在临近屈服区域转动的距离因子, 或当转动仅在边界发生时, 可取常系数 0.5;  $\varphi_i$  为结构面摩擦角。需要指出的是, 无需事先知道塑性铰存在与否, 且非连续面重叠等情况也包含在分析过程中。此时, 功率方程  $\mathbf{g}^T = \{c_1 l_1, c_1 l_1, c_1 l_1^2 u_1 / \tan\varphi_1, c_2 l_2, c_2 l_2, c_2 l_2^2 u_2 / \tan\varphi_2, \dots, c_m l_m^2 u_m / \tan\varphi_m\}$ ,  $c_i l_i^2 u_i / \tan\varphi_i$  的推导过程不在此赘述。

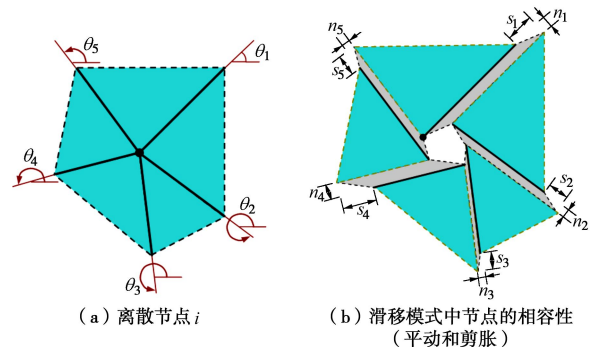


图 2 节点的相容性条件示意

Fig. 2 Compatibility at node in slip mechanism (translation and dilation)

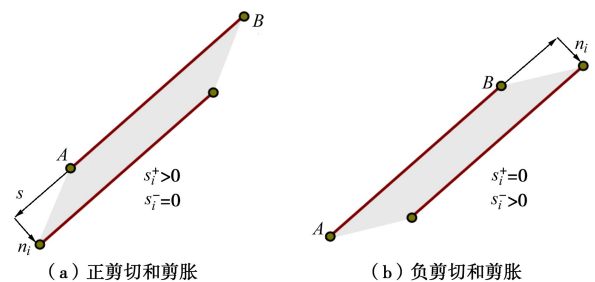


图 3 非连续面  $i$  位移的两种可能模式示意图

Fig. 3 Illustration of two possible modes of discontinuity  $i$

### 1.3 荷载类型

恒载可通过矢量  $f_D$  在目标函数或功能平衡中指定, 其中  $f_D^T = \{f_{D1}^s, f_{D1}^n, f_{D2}^s, f_{D2}^n, \dots, f_{Dm}^s, f_{Dm}^n\}$ , 且  $f_{Di}^s, f_{Di}^n$  分别为非连续面  $i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) 的切向和法向恒载; 活载作用通过矢量  $f_L$ , 其中,  $f_L^T = \{f_{L1}^s, f_{L1}^n, f_{L2}^s, f_{L2}^n, \dots, f_{Lm}^s, f_{Lm}^n\}$ , 且  $f_{Li}^s, f_{Li}^n$  分别为非接触面  $i$  切向和法向活载。对于结构自重非连续面的功率平衡可表述为

$$f_{Di}^T d_i = \{a_y m_i [\beta_i \quad \alpha_i] + a_x m_i [\alpha_i \quad -\beta_i]\} \begin{bmatrix} s_i \\ n_i \end{bmatrix}, \quad (9)$$

式中  $m_i$  为非连续面  $i$  以上竖直方向的材料总质量;  $a_x, a_y$  分别是水平和竖直加速度; 括弧左右项分别为非连续面以上竖直方向材料竖直和水平运动做的功。同时, 对常规重力作用下的塑性破坏, 一般有  $a_x=0$  和  $a_y=-g$ ,  $g$  为重力加速度。

根据对偶定理, 采用内点法求解式 (1) 和 (2)。因此, 采用  $n$  节点和  $m$  节点连接线对平面问题进行离散, 一般的对偶平衡形式可表述为

$$\text{maximize } \lambda, \quad (10)$$

$$\text{subject to } B^T t + \lambda f_L - q = -f_D, \quad (11a)$$

$$N^T q \leq g, \quad (11b)$$

其中,  $t[N]$  为在节点  $j$  ( $j=1, \dots, n$ ) 的等效节点作用力,  $t^T = \{t_x^1, t_y^1, t_x^2, t_y^2, \dots, t_x^n, t_y^n\}$ ,  $t_x^j$  和  $t_y^j$  分别为作用在节点  $j$  上  $x$  和  $y$  轴方向等效节点内力;  $q[N]$  为非连续面作用荷载矢量, 如  $q^T = \{S_1, N_1, S_2, N_2, \dots, S_m, N_m\}$ , 且  $S_i$  和  $N_i$  分别为作用在非连续面  $i$  ( $i=1, \dots, m$ ) 的切向和法向力。优化问题变量即为  $t$  和  $q$  以及活载作用系数  $\lambda$ 。因此, 目标即是最大化作用荷载系数  $\lambda$ 。

依据线性规划的对偶定理, 极限定理上限法与下限法的数值解可通过满足优化条件 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 获得。由于对偶性, DLO 数学优化问题最终借助线性规划的原-对偶内点法 (primal-dual interior point method) 进行求解。其内涵意指若原问题 (上限法) 通过构造和求解获得, 则其对偶问题 (下限法) 的变量即可知道。一旦对偶问题获得优化解, 那么原线性规划问题可直接得到。

## 2 自适应节点连接算法

上节介绍了 DLO 数学构造的基本形式, 对于在研究问题几何范围内获得上限定理的全域最优解, 还需要在初始值和更新迭代环节提升计算效率。这里借鉴桁架结构成熟的拓扑优化理论来表述 DLO 的自适应节点连接算法, 这也是学科交叉的裨益之处。

Dorn 等<sup>[21]</sup>首次提出了基结构法——桁架拓扑优化问题可基于塑性设计理论进行构造, 并通过线性规划

方法进行求解。该方法导致优化问题规模较大, 涉及许多设计变量和相应的约束, 因此, 被认为是一种穷举或低效的方法。传统基结构法的主要困难已经被新近发展的基于自适应基结构法的线性规划方法所克服。Gilbert 等<sup>[22]</sup>及笔者等<sup>[23]</sup>均对自适应基结构法进行了完善和修正, 成功求解超过百万量级的潜在非连续面边坡问题, 并与相关结果一致。为便于理解, 本节提及的结构优化中的杆件与上限定理允许速度场的非连续面几何内涵相同。

### 2.1 传统自适应计算程序

在传统自适应杆件增加技术中, 迭代第一步选择的初始基结构采用最小的节点连接, 该结构应该具备:

(1) 充分连接所有的外荷载, 通过优化求解并确保结构支承体系稳定。

(2) 固定所有的自由度以便于确定节点位移在对偶问题中可以被计算得出。若在初始结构中不存在一个或多个自由度没有约束, 那么在该迭代步中, 位移就是未知量; 自适应杆件增加算法将增加杆件来约束这些自由度直到下一步产生更多优化杆件。如果杆件不足以约束这些自由度, 则需要其他迭代步来介入, 直到这些自由度完全被约束。这不会过早地导致终止计算, 但需要额外地增加迭代步来计算所有的位移。

对于均匀的栅格节点, 基结构仅包含邻近节点的连接, 如在直角和对角方向的短杆件 (没有重叠), 在二维问题中杆件数量大约是  $4n$ , 其中  $n$  为节点数量, 如图 4 所示。采用自适应杆件增加的技术使得基结构  $m$  数量乘以系数  $n$ , 而不是二维或三维情况下的  $n^2$  或  $n^3$  系数。

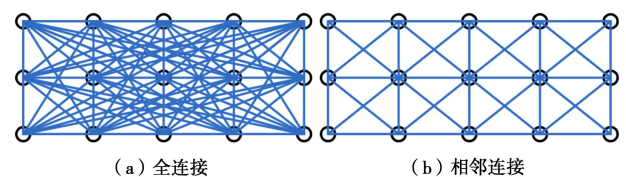


图 4 节点连接线方式

Fig. 4 Interconnection of nodes with potential discontinuities

基结构在第一迭代步中确定问题的大小, 并且影响在获得最优解之前的迭代步数。受 Gilbert 和 Tyas 相关方法的启发, DLO 程序充分利用线性规划方法获得问题解, 并用来确定任意节点连线 (或非连续面) 的受力, 即使规划方法没有明确地考虑非连续面的解。该程序的操作步骤如下:

(1) 建立初始基结构, 其节点间连线仅为竖直、水平和对角的相邻连接 (如图 4 (b) 所示)。

(2) 采用 DLO 程序求解规划问题, 利用这些短的非连续面获得有效的上限解, 尽管该上限解准确度较差。



(3) 利用该结果, 搜索所有的潜在节点间的非连续面, 检验其是否违反屈服条件。

(4) 若潜在的非连续面满足屈服条件, 则增加该屈服非连续面到线性优化问题集并重新求解。重复步骤 (3)。

(5) 因为所有的潜在非连续面都已列入原线性规划问题, 若非连续面均没有违背屈服条件, 那么所获得的解即为最优解。

在线性规划问题中, 当非连续面并没有违背屈服条件时, 自适应程序就会终止。因此, 最终的解是包括所有可能非连续面的线性问题的全域最优解。自适应节点连接策略可有效应用于涉及大量潜在非连续面的问题。

## 2.2 自适应冗余删除

为强化自适应杆件增加的程序功能, 在本节介绍删除冗余杆件的算法。修正自适应节点连接策略在每步迭代中包含两项内容:

(1) 当屈服条件违背率较高时, 增加当前步未激活的杆件;

(2) 当屈服条件违背率较低时, 删除当前步激活杆件。

图 5 为自适应细分程序的流程图, 其涉及杆件的增加和删除。对于杆件的删除应该重点考虑以下两种情形:

(1) 删除杆件导致一些自由度没有约束, 因此阻止获得问题的解。为克服这一缺点, 杆件子集可作为不可移除要件, 无论是否细化检验, 在每个迭代中这些杆件均应参与计算。

(2) 程序在连续迭代步两个不同结果间持续振荡, 且杆件增加和杆件删除彼此运作有效。为避免这种情况, 一旦识别该情形, 杆件删除的数量在每迭代步中应该循环降低。因此, 与杆件增加参数  $a$  保持不变不同, 杆件删除比  $b$  (如图 5) 应该为可减少的变量。

如果采用上述两个参数, 那么修正的杆件细分程序则总是收敛于全域优化解。最糟的情况变为删除杆件参数减少为零, 程序也可单纯增加杆件继续执行。本文经过试算, 参数  $a$  一般为 0.1~0.15, 而参数  $b$  为 0.05/order。其中, order 为与杆件违背率相关的变量, 初始值为 1; 一般情况下, 如果违背率增加, 则 order 增加, 那么参数  $b$  则降低。为表述简洁, 且与桁架结构拓扑优化表述相一致, 约束方程 (11) 可转化为等式, 即

$$\text{subject to } A_{\text{eq}} \times X = B_{\text{eq}}, \quad (12)$$

引入松弛变量, 将约束方程统一转化为等式。

上述提及的循环, 可通过在结构体系中的杆件违

背率来判定。在最后的迭代步中, 杆件总的违背率应该为零。尽管杆件增加和删除比是启发式参数, 其值并不影响最后的结果, 但是会影响计算的成本。这与大多数的连续体拓扑优化方法不同, 其最后结果很大程度上取决于任意选择的输入参数, 通常被称为调整参数。大多基于有限元的拓扑优化程序, 也包括 SIMP (solid isotropic material with penalization), 均采用这类参数。

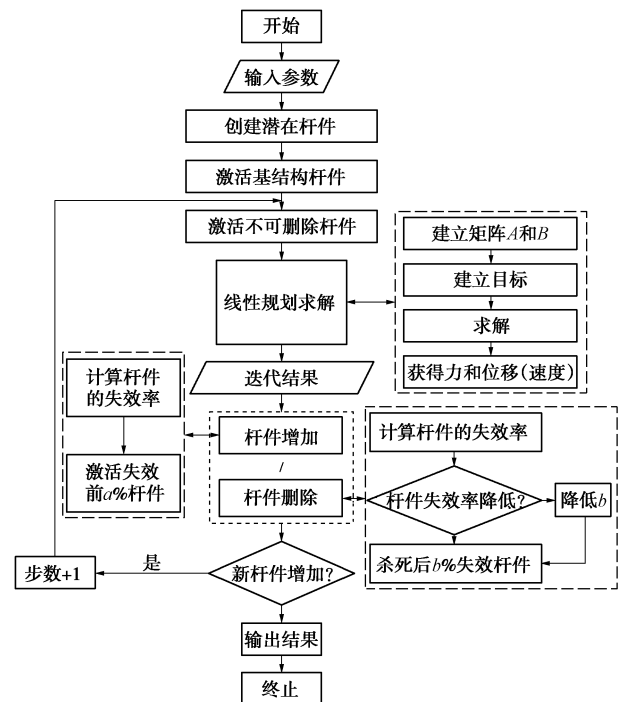


图 5 自适应杆件细分流程图

Fig. 5 Flow chart of adaptive member refinement

为方便计, 本文选择平行于全域坐标轴的节点构成的均匀栅格形式。虽然优化解不同程度受初始节点的影响, 但采用节点细分方案后, 个别节点的准确位置对优化结果的影响相对弱化。本算法在 PYTHON 程序中开发, 线性规划部分则在 GNU 线性规划工具和 OpenOpt 框架下开发实现。

## 3 验证与应用

为例证 DLO 法分析块体结构稳定性问题的功能, 分别对水平地震作用下的砌体结构、少节理和多节理岩质边坡问题进行分析。本节算例均在 2.67GHz Intel Core i7 内核, 4GB 内存和 32 位 Windows XP 系统笔记本电脑上计算求解。引用计算时间包括节点连接, 建立和求解线性规划问题所需的时间。

### 3.1 受面内水平地震作用的砌体墙

采用 DLO 法分析 Ferris 等<sup>[9]</sup>6 个砌体墙结构稳定问题。每个算例均为底座固定, 顶部自由的墙体, 并

表 1 Ferris 和 Tin-Loi 砌体结构稳定分析计算汇总  
Table 1 Computational results for Ferris and Tin-Loi's examples

算例	节点数量 (潜在连接数)	迭代步	变量	约束	耗时 /s	荷载系数	Gilbert 等 <sup>[24]</sup>
1	215 (698)	1	3151	2789	0.094	0.6429	0.64286
2	116 (475)	1	2230	1865	0.078	0.5800	0.58000
3	210 (708)	1	3181	2765	0.125	0.4037	0.40369
4	236 (804)	1	3589	3125	0.094	0.3319	0.33195
5	218 (760)	1	3377	2915	0.094	0.2396	0.23964
6	303 (1241)	1	5714	4766	0.172	0.3478	0.34782
	900 (3004)	1	13391	11846	0.344	0.3478	

受面内水平地震（自左至右）作用。这些模型均采用以下假设：①结构由刚性块体组成；②砌缝以接触单元形式进行模拟。每个完整砌块尺寸为  $4\times 1.75$  单位，其砌缝摩擦系数( $\tan\varphi$ )为 0.65(摩擦角  $\varphi=\arctan(0.65)$ ，黏聚力  $c'=0$ )。此时，极限荷载系数  $\lambda$  即为地震水平向作用荷载系数。

各算例均采用相关联流动准则，极限荷载系数  $\lambda$  及相应的破坏模式如图 6 和表 1 所示。若采用非相关流动准则，则 DLO 法会转化为非线性规划问题，使得问题计算趋于复杂。从表 1 可知，6 个算例的极限荷载系数与 Gilbert 等<sup>[24]</sup>的分析结果基本一致；与本文的构造方式不同，Gilbert 等采用刚性块体方法同样考虑了块体的滑动和转动模式。另外，从图 6 可以看出，所有的临界破坏模式与 Gilbert 等的计算结果基本相同。以第 6 个算例为例，采用粗节点密度（节点数为 303）离散进行优化计算的结果为 0.3478。也可以采用 900 个节点数量进行离散（如图 6（g）所示），破坏模式略微有别，但最终的极限荷载系数 0.3478 却保持不变（如表 1）。这意味着该问题对节点的密度并不敏感，即节点细化程度不影响本算例的极限荷载系数。

3.2 软弱层岩质边坡

边坡高度 315 m，整体坡角  $48.8^\circ$ ，岩土参数详见表 2，岩层剖面和浸润面分布如图 7 所示，水平向地震作用系数为 0.021。Zhang 等<sup>[25]</sup>利用 GeoStability 软件 KEM（kinematical element method）方法进行水平地震作用下的稳定性分析。这里需要说明的是，极限荷载系数  $\lambda$  也称为线性荷载系数，在边坡稳定问题中，可以引入类似强度折减法的安全系数 FOS 为线性变量，同时设定极限荷载系数  $\lambda$  值为 1（或接近 1）。当然，根据极限分析上限定理的推论，DLO 程序中引入材料强度充裕系数，其数学表述形式与强度折减法

一致。

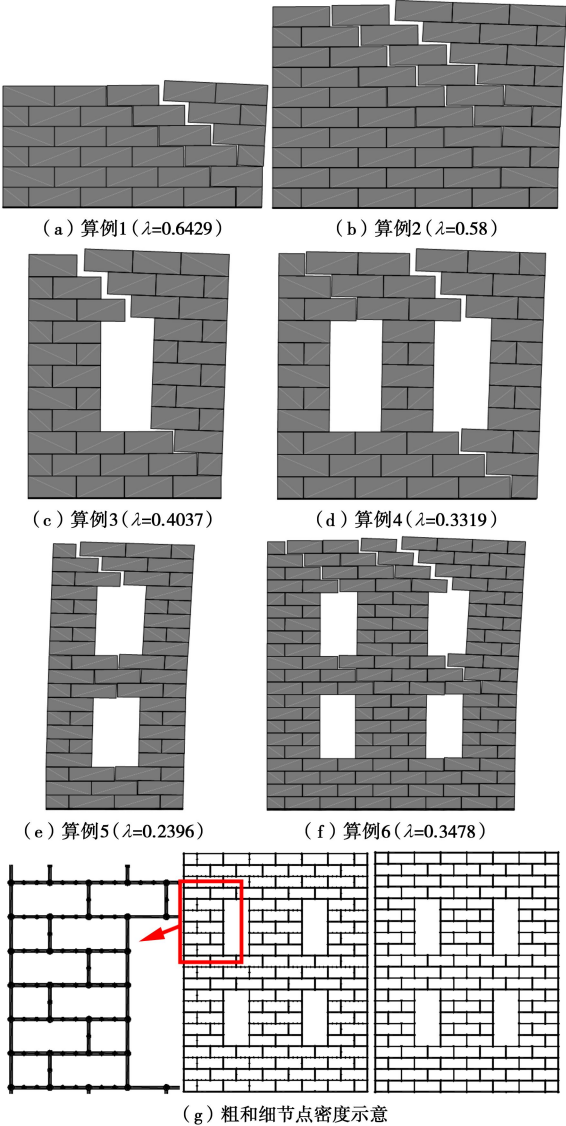


图 6 相关联流动则下砌体墙稳定问题分析 ((a) ~ (f) 破坏类型)

Fig. 6 Solutions to block wall problems under assuming associative friction

表 2 岩质边坡材料参数

Table 2 Geotechnical parameters of rock slope			
岩层	黏聚力/kPa	摩擦角/(°)	重度/(kN·m <sup>-3</sup> )
砂岩	460	35	25
软弱层	60	29	—
F <sub>1</sub>	60	29	20

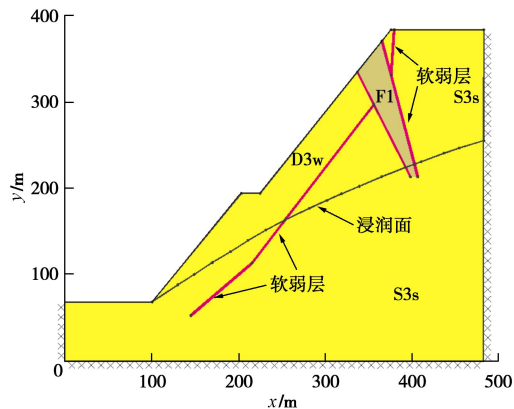
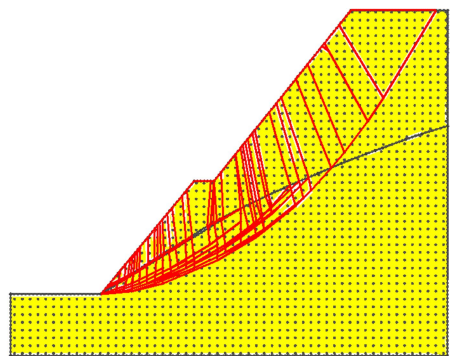


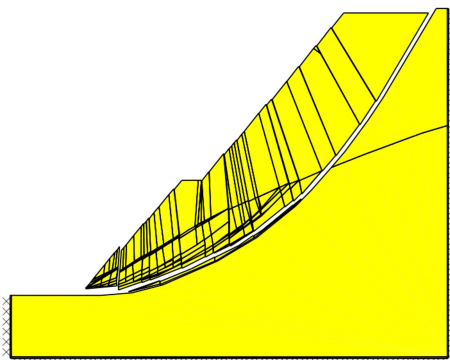
图 7 岩质边坡几何尺寸和剖面图

Fig. 7 Cross-section geometry of rock slope with weak layer

针对有无软弱结构面的边坡稳定性进行分析，岩质边坡的安全系数分别为 1.036 和 1.249，破坏模式和临界非连续面布置结果分别如图 8 和图 9 所示。两种情况下的节点离散数量略微有些差异，主要与结构面的存在相匹配。整体而言，结构面处节点离散密度大于普通区域的离散点密度。DLO 的计算结果与临界破



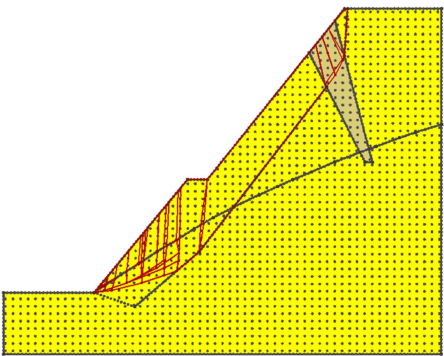
(a) 临界非连续面分布示意图 (离散节点数1980个)



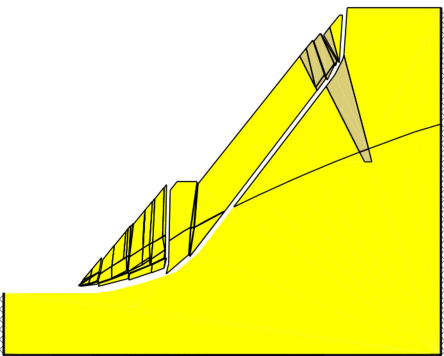
(b) 边坡临界破坏模式及其安全系数1.249

图 8 无结构面岩质边坡稳定分析

Fig. 8 Stability analysis of rock slope without discontinuity



(a) 临界非连续面布置示意图 (离散节点数2249个)



(b) 临界破坏模式及其安全系数1.036

图 9 存在结构面岩质边坡稳定分析

Fig. 9 Stability analysis of rock slope with discontinuity

坏模式与 KEM 的结果<sup>[25]</sup> (分别为 1.034 和 1.256) 趋于一致。值得指出的是，从临界破坏模式不难发现，边坡滑坡破坏的同时，也存在因节理剪胀特性的分离趋势。本算例表明，软弱结构面的存在，对岩质边坡的稳定性影响较大。

3.3 多组节理岩质边坡

本算例岩质边坡在结构上较为复杂，存在三组结构面，具体分布详见图 10。边坡结构特征和岩体材料特性详见表 3，不同节点密度和 DLO 计算结果汇总详见表 4。本算例仍基于平面应变条件进行分析。

表 3 节理边坡材料参数表

Table 3 Parameters of jointed rock slope used in calculation			
类型	黏聚力/kPa	摩擦角/(°)	重度/(kN·m <sup>-3</sup> )
岩石	500	45.0	24
节理*	250	26.6	24
软弱节理*	50	5.7	24

注：\*满足张拉截断 Mohr-Coulomb 屈服准则。

由图 10 可知，边坡模型左右侧边及底端边界均固定。采用 Mohr-Coulomb 屈服准则进行 DLO 法模拟，离散节点数量分别为 500，1000，2000，3000，4000，5000 等 (如图 11 所示)。由计算结果和临界破坏模式可看出，结构面或节理构造在岩质边坡稳定分析中的作用十分显著 (无软弱节理边坡安全系数为 4.249)。

表 4 软弱节理岩质边坡稳定分析计算统计

Table 4 Statistic results for upper bound computations of rock slope with weak fissure

节点密度 (潜在连接线)	迭代步	变量	约束	耗时/s	安全系数 FOS
384 个节点(4514)	11	18580	10748	8.875	3.719
867 个节点(17843)	11	62054	33918	27.672	3.697
1836 个节点(71411)	16	156120	83754	178.406	3.670
2817 个节点(155780)	19	215396	116070	432.407	3.664
3650 个节点(253442)	20	260796	141006	557.688	3.664
4677 个节点(394776)	21	322178	174350	851.328	3.660
5552 个节点(536706)	21	367226	199088	1075.781	3.658

类型暂时难以胜任。

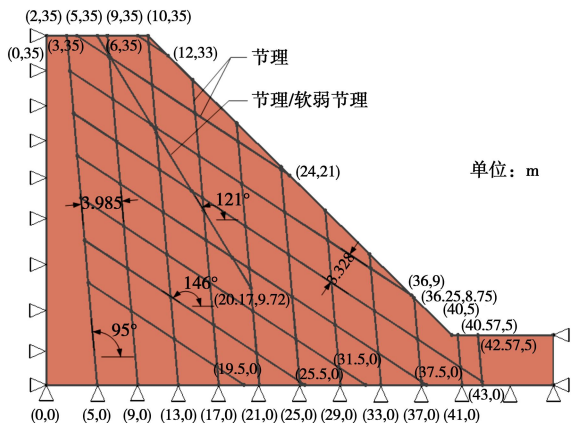


图 10 节理边坡几何尺寸和数值模型  
Fig. 10 Geometry and nodal density of jointed rock slope

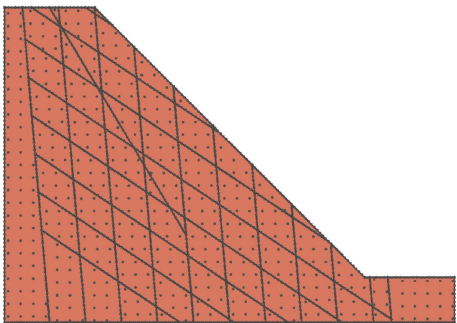
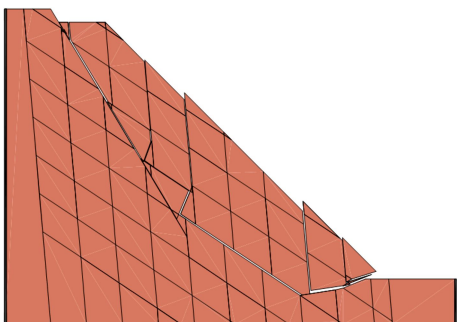
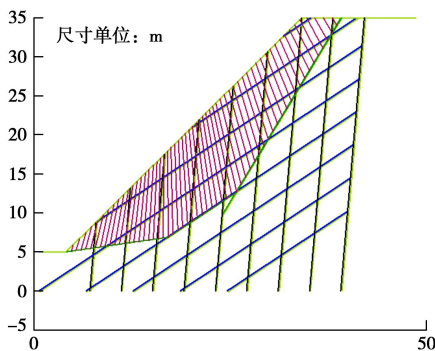


图 11 离散节点布置示意图 (节点目标数为 2000)  
Fig. 11 Layout of discretization nodes (target number = 2000)

与前面的算例不同，本算例的稳定分析的结果受节点数量或密度的影响相对突出。从图 12 破坏模式而言，滑移破坏成为边坡破坏的主要形式之一。不难发现，在存在软弱节理边坡破坏中，其破坏分离趋势不明显，但是滑动岩体中出现了块体的受剪破坏。比较图 12 (a) 和 (b) 可知，DLO 计算的临界破坏模式与 EMU 程序计算的结果存在一定的出入，相应的安全系数分别为 3.658 和 4.58，相差达 24.8% (以 EMU 法结果为基准)。两者差异主要源于 DLO 在滑移面的构成识别方面更精细和全面，较 EMU 斜条分法<sup>[26]</sup>对结构面的搜索更具全局性和通用性。就 DLO 法的功能而言，对于岩质边坡的弧形滑动、平面滑动、节理破坏等类型均能进行分析，但对于以转动为主的倾倒破坏



(a) DLO 计算临界破坏模式



(b) EMU 计算临界破坏模式

图 12 软弱节理岩质边坡破坏模式

Fig. 12 Collapse mechanism with weak fissure

图 13 为岩质边坡的 DLO 计算结果与离散节点数量及优化变量的关系示意图。对于复杂的结构面岩质

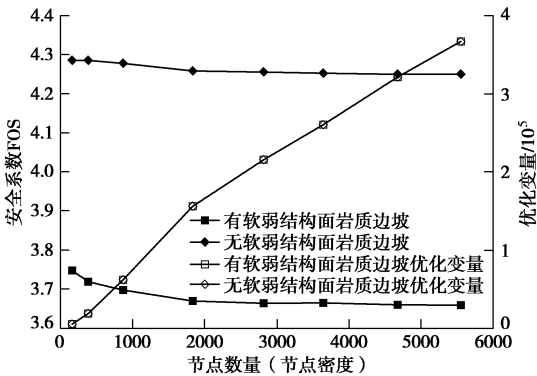


图 13 离散节点数量与安全系数及优化变量的关系图  
Fig. 13 Relationship among factor of safety, optimum variables and nodal density



边坡, 离散节点数量因结构面的复杂性而增加, 一般节点目标数达到 2000, 即采用细节点密度才能获得精确解。由图 13 可知, 线性优化变量与离散节点数量呈线性关系。对于线性优化问题涉及的变量, 本算例可以达到数十万量级, 优化解却差别不大, 而且通过优化求解的耗时均以秒计。这充分例证 DLO 程序的求解运算能力的强大和适用性。

## 4 结 语

非连续面拓扑优化技术构造形式最大的优点在于所研究的问题域是根据节点和节点间的连接线(或非连续面)来描述, 而不是常规意义上的单元或是实体。这种构造方式正好切合块体结构体系存在结构面或薄弱面的实际特征。潜在连接线可以是任意节点间的连线, 无论是预设的节点还是非连续面交叉或重叠产生的节点, 在数学构造上也存在一定的优势。在 DLO 法中, 研究对象仅是非连续面, 平面单元则无需考虑, 这将显著降低计算成本。DLO 通过节点离散和对潜在非连续面的搜索, 能保证从全域角度获得最优解。从几何学角度而言, DLO 法巧妙借助几何学对优化问题进行降维处理, 即将常规的二维域面问题转为二维域的点和线的问题。有理由相信, 推广至三维问题, 也可将常规的体问题转化为面问题进行处理。

借鉴桁架结构的布局优化, 在传统基结构法的基础上, 从杆件增加和杆件删除的双向对线性优化问题进行求解, 并建立自适应节点连接方案, 极大地提升了基结构法的适用性和有效性, 可以用来处理大规模的线性优化问题。从本文应用来看, DLO 法为诸如砌体结构、含节理的岩质边坡等块体结构的稳定性分析提供一种通用方法; 对于结构面或接触面复杂的块体结构体系的稳定性计算与离散节点密度的相互关系还需要进一步进行验证和校核。

**致 谢:** 感谢中国水利水电科学研究院孙平博士给予的大力支持和帮助! 感谢 LimitState: GEO 软件的教育版授权使用!

## 参考文献:

- [1] LIVESLEY R K. Limit analysis of structures formed from rigid blocks[J]. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 1978, **12**: 1853 - 1871.
- [2] LIVESLEY R K. A computational model for the limit analysis of three-dimensional masonry structures[J]. Meccanica, 1992, **27**(3): 161 - 172.
- [3] BOOTHBY T E, BROWN C B. Stability of masonry piers and arches[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1992, **118**(2): 367 - 383.
- [4] BOOTHBY T E. Stability of masonry piers and arches including sliding[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1994, **120**(2): 304 - 319.
- [5] GILBERT M, MELBOURNE C. Rigid-block analysis of masonry structures[J]. Structural Engineer, 1994, **72**(21): 356 - 361.
- [6] MELBOURNE C, GILBERT M. The behaviour of multi-ring brickwork arch bridges[J]. Structural Engineer, 1995, **73**(3): 39 - 47.
- [7] BAGGIO C, TROVALUSCI P. Limit analysis for no-tension and frictional three-dimensional discrete systems[J]. Mechanics of Structures and Machines, 1998, **26**(3): 287 - 304.
- [8] BAGGIO C, TROVALUSCI P. Collapse behaviour of three-dimensional brick-block systems using non-linear programming[J]. Structural Engineering and Mechanics, 2000, **10**(2): 181 - 195.
- [9] FERRIS M, TIN-LOI F. Limit analysis of frictional block assemblies as a mathematical program with complementarity constraints[J]. International Journal of Mechanics Sciences, 2001, **43**(1): 209 - 224.
- [10] ORDUÑA A, LOURENÇO P B. Three-dimensional limit analysis of rigid blocks assemblages: Part I torsion failure on frictional joints and limit analysis formulation[J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, **42**(18/19): 5140 - 5160.
- [11] ORDUÑA A, LOURENÇO P B. Three-dimensional limit analysis of rigid blocks assemblages: Part II load-path following solution procedure and validation[J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, **42**(18/19): 5161 - 5180.
- [12] LYSMER J. Limit analysis of plane problems in soil mechanics[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1970, **96**(4): 1311 - 1334.
- [13] SLOAN S W, KLEEMAN P W. Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1995, **127**(1/2/3/4): 293 - 314.
- [14] MAKRODIMOPOULOS A, MARTIN C M. Lower bound limit analysis of cohesive-frictional materials using second-order cone programming[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, **66**(4): 604 - 634.
- [15] CHRISTIANSEN E, PEDERSEN O S. Automatic mesh

- refinement in limit analysis[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, **50**: 1331 - 1346.
- [16] BORGES L A, ZOUAIN N, COSTA C, et al. An adaptive approach to limit analysis[J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, **38**(10/11/12/13): 1707 - 1720.
- [17] FRANCO J R Q, PONTER A R S, BARROS F B. Adaptive FE method for the shakedown and limit analysis of pressure vessels[J]. European Journal Mechanics A-Solids, 2003, **22**(4): 525 - 533.
- [18] LYAMIN A V, SLOAN S W. Mesh generation for lower bound limit analysis[J]. Advances in Engineering Software, 2003, **34**(6): 321 - 338.
- [19] CIRIA H, PERAIRE J, BONET J. Mesh adaptive computation of upper and lower bounds in limit analysis[J]. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 2008, **75**: 899 - 944.
- [20] SMITH C, GILBERT M. Application of discontinuity layout optimization to plane plasticity problems[J]. Proceedings the Royal of Society: A Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2007, **463**: 2461 - 2484.
- [21] DORN W S, GOMORY R E, GREENBERG H J. Automatic design of optimal structures[J]. Journal de Mechanique, 1964, **3**(1): 25 - 52.
- [22] GILBERT M, TYAS A. Layout optimisation of large-scale pin-jointed frames[J]. Engineering Computations 2003, **20**(8): 1044 - 1064.
- [23] HUANG Q, JIA C, XIA B, et al. Novel computational implementations for stability analysis[J]. Applied Mechanics and Materials 2011, **90/91/92/93**: 778 - 785.
- [24] GILBERT M, CASAPULLA C, AHMED H M. Limit analysis of masonry block structures with non-associative frictional joints using linear programming[J]. Computers and Structures, 2006, **84**(13/14): 873 - 887.
- [25] ZHANG K, CAO P, MA G, et al. Stability analysis of rock slope controlled by major geological discontinuities based on the extended kinematical element method[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 2016, **49**(7): 2967 - 2975.
- [26] 孙平, 陈玺, 王玉杰. 边坡稳定极限分析斜条分上限法的全局优化方法[J]. 水利学报, 2018, **49**(6): 741 - 748. (SUN Ping, CHEN Xi, WANG Yu-jie. A global optimization algorithm of upper bound method with inclined interface blocks for slope stability[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2018, **49**(6): 741 - 748. (in Chinese))

## 欢迎订阅《勘察科学技术》

《勘察科学技术》是由中勘冶金勘察设计研究院有限责任公司(原冶金勘察研究总院)主办的学术—技术类双月刊,是中国科技核心期刊、中国科学引文数据库来源期刊、中国核心期刊(遴选)数据库收录期刊、中国学术期刊综合评价数据库统计源期刊,多次被评为河北省优秀期刊。

《勘察科学技术》主要介绍岩土工程设计与施工、工程地质、环境地质、水文地质及地下水资源评价、工程测量及地理信息系统、工程物探、岩土测试、工程检测及地下管网探测等专业的科研成果、生产经验、工程实录以及新理论、新技术、新方法。

《勘察科学技术》内容丰富,理论结合实际,适于从事岩

土工程及勘察的广大科研、设计、施工、监理、教学的专业技术人员及高等院校学生阅读、收藏。

《勘察科学技术》国内外公开发行,双月刊,大16开本,双月20日出版。每期定价10.0元,全年60元。邮发代号18-153。全国各地邮局均可订阅,也可随时汇款到本编辑部订阅。

本刊兼营广告,价格适中,印制精良,注重实效。

欢迎广大读者投稿、订阅和广告惠顾。

地址:河北省保定市东风中路1285号《勘察科学技术》编辑部,邮编:071069。

Tel: 0312-3020887, 3094054; Fax: 0312-3034561。

E-mail: kckxjs@163.com。

(《勘察科学技术》编辑部 供稿)