

DOI: 10.11779/CJGE201911023

考虑砂土颗粒破碎的柱孔扩张问题弹塑性分析

郑金辉¹, 齐昌广^{*1}, 王新泉², 单艳玲¹, 赖文杰¹, 王梁志¹

(1. 宁波大学土木与环境工程学院, 浙江 宁波 315211; 2. 浙江大学城市学院土木工程系, 浙江 杭州 310015)

摘 要: 目前对砂土中圆孔扩张问题的研究均未考虑到砂土颗粒的破碎以及剪胀特性, 且为了方便后续求解, 很多学者对剪应力、剪切模量等计算参数做了简化, 使得最终的求解结果无法准确反映实际情况。针对上述问题, 采用考虑颗粒破碎和剪胀特性的砂土临界本构模型, 在塑性区联合相关流动法则和拉格朗日分析法, 将传统的欧拉描述下的柱孔扩张问题转换为基于拉格朗日描述的带初值的一阶非线性常微分方程组, 最终通过数值方法得到砂土中柱孔扩张问题的半解析精确解, 并通过算例分析了土体初始应力对扩孔结果的影响。结果表明, 颗粒破碎和初始应力对孔周应力和塑性区半径影响巨大, 两者共同作用使得土体在扩孔期间表现出不同的剪胀/剪缩特性; 此外, 高初始应力下的孔周土体在扩孔期间难以到达临界状态。

关键词: 柱孔扩张; 颗粒破碎; 拉格朗日分析法; 土体初始应力

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2019)11-2156-09

作者简介: 郑金辉(1994—), 男, 硕士研究生, 主要从事桩基础、岩土物理模拟试验方面的研究工作。E-mail: zhengjinhui2838@live.com。

Elasto-plastic analysis of cylindrical cavity expansion considering particle breakage of sand

ZHENG Jin-hui¹, QI Chang-guang¹, WANG Xin-quan², SHAN Yan-ling¹, LAI Wen-jie¹, WANG Liang-zhi¹

(1. School of Civil and Environmental Engineering, Ningbo University, Ningbo 315211, China; 2. Department of Civil Engineering,

Zhejiang University City College, Hangzhou 310015, China)

Abstract: The current studies on the cavity expansion in sand have not considered the breakage and dilatancy of sand particles. In order to facilitate the subsequent calculation, many scholars have simplified the calculation parameters such as shear stress and shear modulus, so the final results do not reflect the actual situation accurately. In response to the above problems, a critical constitutive model for sand considering particle breakage and dilatancy is used. Employing the associate flow rules and the Lagrangian analysis method in the plastic zone, the cylindrical cavity expansion problem described by the traditional Euler description is converted into a first-order nonlinear ordinary differential equation with the initial values based on the Lagrangian description. Finally, the semi-analytical exact solution to the cylindrical cavity expansion problem in sand is obtained by the numerical method, and the influences of the initial stress on the cavity expansion results are analyzed through an example. The results show that the particle breakage and the initial stress have great influences on the cavity stress and the radius of the plastic zone. The combination of particle breakage and initial stress causes the soil to exhibit different dilatancy characteristics during cavity expansion. In addition, the sand under high initial stresses is difficult to reach the critical state during cavity expansion.

Key words: cylindrical cavity expansion; particle breakage; Lagrangian analysis method; initial stress of soil

0 引 言

圆孔扩张理论因其力学原理明确, 求解形式简单等优势, 目前广泛应用于桩承载力分析、旁压试验、静力触探等岩土工程问题。从最初的纯弹性材料开始, 圆孔扩张理论及其应用已经过了半个多世纪的发展。期间为了更好地反映出各类土的工程性质, 众多学者使用了更加复杂的本构模型, 大致可概括为理想

弹塑性材料模型^[1-4] (例如 Tresca 模型和 M-C 模型) 和考虑材料应变硬化/软化特性的临界状态模型^[5-8] (例如 MCC 模型)。

基金项目: 浙江省自然科学基金项目 (LY18E080010, LQ18E080006);
宁波市自然科学基金项目 (2017A610317)

收稿日期: 2018-12-21

*通讯作者 (E-mail: qichangguang@163.com)

应用理想弹塑性模型求解圆孔扩张问题主要假定土体强度、剪胀角等参数保持不变, 即未考虑土应力历史的影响, 所以其无法准确反映小孔扩张期间孔周土体的力学响应。自20世纪90年代以来, Collins等^[5, 9-10]采用MCC模型分析了排水/不排水情况下的圆孔扩张问题, 采用应力应变的符号标志法, 将所有应力归一化处理, 得到了一系列微分控制方程, 以此确定了从零开始扩张的小孔周围应力与扩张的关系, 随后根据相似的原理, 进一步实现了非零初始孔径小孔扩张问题的求解, 但由于MCC模型自身的复杂性, 故上述方法求解十分繁琐。为了方便计算, 近二十年众多学者在求解不排水条件下黏土中圆孔扩张问题时均做了一定程度的简化: 例如Cao等^[11]利用MCC模型求解柱孔扩张问题时, 假定塑性区的偏应力分布, 并令剪切模量为常数; 肖昭然等^[12]、胡伟等^[13]基于MCC模型, 对塑性区土体的应力路径做了简化, 从而使得偏应力在塑性区呈现线性递减的特性; 宋勇军等^[14]利用圆孔扩张理论分析桩挤土效应时, 人为地估算了平均塑性应变值, 为了确保估值的准确性, 进行了多步骤的迭代计算; 考虑到MCC模型涉及的应力参数仅为平均应力 p 和偏应力 q , 难以准确描述土体三维状态的屈服和破坏, 故李镜培等^[15]结合SMP准则和MCC模型, 采用了类似Cao等^[11]的简化, 将塑性区偏应力统一以极限偏应力替代, 推导了圆孔扩张问题的统一弹塑性解答。因为上述简化方法会对最终的求解结果造成影响, 所以Chen等^[6]基于MCC模型, 不做任何简化, 通过拉格朗日表示, 将柱孔扩张阶段孔周的应力求解转化为一阶非线性常微分方程组, 通过数值方法得到了孔周应力和超孔压的精确解。在此基础上, 李镜培等^[16-17]将该方法推广至球孔以及沉桩阻力的分析。

相较于黏土中的不排水圆孔扩张, 一般认为砂土中的圆孔扩张属于排水情况, 扩孔期间应力路径未知, 此外, 需要考虑孔周的体积应变, 这进一步增大了扩孔问题求解的难度^[18], 且利用现有的临界状态模型仍存在无法较好地反映砂土特有的峰值强度以及剪胀特性的缺陷。除此之外, 目前对砂土中扩孔问题的分析很少考虑到颗粒破碎, 仅有Russell等^[19], 蒋明镜等^[20-21]少数学者针对该问题做了相应研究, 但根据大量触探试验表明^[22-23], 砂土等颗粒状材料破碎期间会导致临界状态线陡降, 使得土体更容易破坏, 产生较大的安全隐患, 故应考虑颗粒破碎对砂土力学特性的影响。

综上所述, 为较好地反映排水条件下圆孔扩张期间砂土的峰值强度和剪胀特性, 并考虑颗粒破碎对圆孔扩张结果的影响, 本文采用了姚仰平等^[24]、王乃东等^[25]提出的考虑颗粒破碎的砂土临界状态模型, 基于Chen等^[6]提出的求解思路, 引入了一个中间变量, 利

用拉格朗日分析法推导得到砂土中柱孔不排水扩张问题的半解析精确解。最后分析了土体初始应力 p_0 对扩孔应力、塑性区半径和应力路径等参数的影响。

1 考虑颗粒破碎的砂土本构模型

姚仰平等^[26]在提出统一硬化模型(UH)的基础上, 给出了考虑颗粒材料的破碎特性的砂土本构模型, 其屈服面方程为

$$f = \frac{C_t - C_e}{p_a^m} \left\{ \left[\frac{(2n+1)p_c^{2n}}{M^2} \frac{q^2}{p} + p^{2n+1} \right]^{\frac{m}{2n+1}} - p_0^m \right\} - H = 0. \quad (1)$$

式中 C_t 为压缩指数; C_e 为回弹指数; p_a 为大气压力, 取 101.3 kPa; m 和 n 均为材料参数; p_c 为颗粒参考破碎应力; M 为临界状态应力比; p_0 为土体初始应力。

此外, 式中 p 和 q 分别为平均总应力和偏应力, 定义如下:

$$\left. \begin{aligned} p &= (s_r + s_q + s_z)/3, \\ q &= \sqrt{\frac{1}{2}[(s_r - s_q)^2 + (s_r - s_z)^2 + (s_q - s_z)^2]} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

该本构模型与传统 MCC 模型的最大区别在于利用硬化参数 H 替换原来的塑性体积应变 e_v^p , 该硬化参数作为独立变量, 与土体受剪期间的应力路径无关, 能够较好地反映砂土受颗粒破碎的影响, H 的具体表达式为

$$H = \int dH = \int \frac{M_c^4}{M_f^4} \frac{M_f^4 - h^4}{M_c^4 - h^4} de_v^p. \quad (3)$$

式中, $h = q/p$, 定义为剪应力比, M_c 和 M_f 分别表示状态应力比 (de_v^p 由正变为负时的应力比) 与峰值应力比。

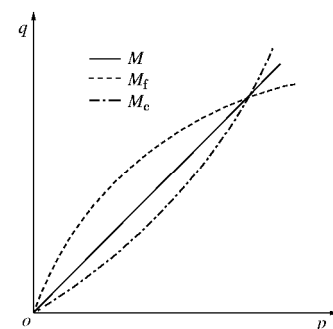


图 1 考虑颗粒破碎的 M_c 和 M_f 曲线

Fig. 1 Curves of M_c and M_f considering particle breakage

在较高围压下, M_c 和 M_f 均为如图 1 所示的指数曲线, 具体形式为

$$\left\{ \begin{aligned} M_f &= M(p/p_c)^{-n}, \\ M_c &= M(p/p_c)^n. \end{aligned} \right. \quad (4)$$

2 柱孔扩张问题的弹塑性解答

2.1 问题的定义

无限土体中的柱孔扩张示意图见图2。土体均质，各项同性，受初始应力 p_0 作用，初始径向应力 s_{r0} 、初始环向应力 s_{q0} 和初始竖向应力 s_{z0} 都等于 p_0 ，即土体处于等向压缩状态，初始条件为 $s_{r0} = s_{q0} = s_{z0} = p_0$ ；柱形小孔从初始孔径 a_0 扩张至 a ，孔周土体划分为弹性区和塑性区；塑性区土体服从式(1)给出的屈服面方程。

当柱孔从 a_0 扩张至 a 时，柱孔孔壁应力从 p_0 增加到 s_{ra} 。因为扩孔应力的持续增加，孔周 r_p 范围内的土体进入塑性状态。位于孔周 r_0 处的土体在扩孔后移动至 r 处，同理，位于塑性区半径 r_p 处的土体，其初始位置在扩孔前为 r_{p0} 。

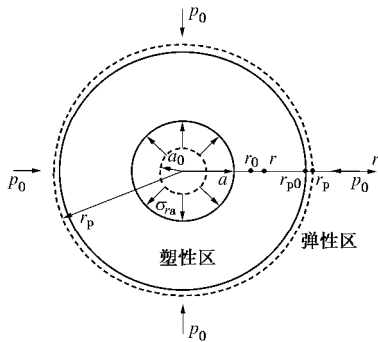


图2 柱孔扩张问题示意图

Fig. 2 Schematic diagram of cylindrical cavity expansion

柱孔扩张期间孔周任一点土体均满足平衡方程：

$$\frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{s_r - s_q}{r} = 0 \quad (5)$$

2.2 弹性区解答

弹性区土体符合 Hooke 定律，即应力 - 应变的增量关系符合

$$de_{ij}^e = \frac{1+m}{E} ds_{ij} - \frac{m}{E} ds_{mm} d_{ij} \quad (6)$$

式中 m 为泊松比； E 为弹性模量， $E = 2G(1+m)$ ，

G 为剪切模量， $G = \frac{3(1-2m)p_a^m}{2(1+m)mC_e p^{m-1}}$ [27]。

根据边界条件 $r = r_p$ ， $s_r = s_{rp}$ ，利用弹性力学理论容易解得

$$\left. \begin{aligned} s_r &= p_0 + (s_{rp} - p_0) \frac{r_p^2}{r^2}, \\ s_q &= p_0 - (s_{rp} - p_0) \frac{r_p^2}{r^2}, \\ s_z &= p_0, \\ u_r &= \frac{s_{rp} - p_0}{2G_0} \frac{r_p^2}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中 r_p 为弹塑性交界处半径； s_{rp} 为弹塑性交界处径

向应力； G_0 为初始剪切模量。

2.3 塑性区解答

塑性区土体符合式(1)给出的屈服面方程，土体进入塑性状态后，应变增量包括两部分：弹性应变增量 de_{ij}^e 和塑性应变增量 de_{ij}^p ，前者可通过式(6)求解，后者由相关流动法则求得，具体求解步骤如下：

$$de_r^p = L \frac{\partial f}{\partial s_r} = L \left[\frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial s_r} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial s_r} \right] = L \left[\frac{A}{3} \left(p^{2n} - \frac{p_c^{2n}}{M^2} \frac{q^2}{p^2} \right) + 3A \left(\frac{p_c^{2n}}{M^2} \frac{1}{p} \right) (s_r - p) \right], \quad (8)$$

$$de_q^p = L \frac{\partial f}{\partial s_q} = L \left[\frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial s_q} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial s_q} \right] = L \left[\frac{A}{3} \left(p^{2n} - \frac{p_c^{2n}}{M^2} \frac{q^2}{p^2} \right) + 3A \left(\frac{p_c^{2n}}{M^2} \frac{1}{p} \right) (s_q - p) \right], \quad (9)$$

$$de_z^p = L \frac{\partial f}{\partial s_z} = L \left[\frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial s_z} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial s_z} \right] = L \left[\frac{A}{3} \left(p^{2n} - \frac{p_c^{2n}}{M^2} \frac{q^2}{p^2} \right) + 3A \left(\frac{p_c^{2n}}{M^2} \frac{1}{p} \right) (s_z - p) \right], \quad (10)$$

$$A = \frac{(C_t - C_e)m}{p_a^m} \left[\frac{(2n+1)p_c^{2n}}{M^2} \frac{q^2}{p} + p^{2n+1} \right]^{\frac{m-2n-1}{2n+1}} \quad (11)$$

式中， L 为塑性因子。

下面求解塑性因子 L ，联立式(8)~(10)，塑性体积应变增量为

$$de_v^p = de_r^p + de_q^p + de_z^p = L \left[A \left(p^{2n} - \frac{p_c^{2n}}{M^2} \frac{q^2}{p^2} \right) \right] \quad (12)$$

将式(3)稍作变换，并对 H 进行全微分，得到

$$dH = \frac{M_c^4}{M_f^4} \frac{M_f^4 - h^4}{M_c^4 - h^4} de_v^p = \frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq \quad (13)$$

联立式(12)，(13)，解得

$$L = J \left(dp + \frac{2h}{M_c^2 - h^2} dq \right), \quad (14)$$

$$J = \frac{M_f^4}{M_c^4} \frac{M_c^4 - h^4}{M_f^4 - h^4} \quad (15)$$

令

$$a_r = \frac{A}{3} \left(p^{2n} - \frac{p_c^{2n}}{M^2} \frac{q^2}{p^2} \right) + A \left(\frac{p_c^{2n}}{M^2} \frac{3(s_r - p)}{p} \right), \quad (16)$$

$$a_q = \frac{A}{3} \left(p^{2n} - \frac{p_c^{2n}}{M^2} \frac{q^2}{p^2} \right) + A \left(\frac{p_c^{2n}}{M^2} \frac{3(s_q - p)}{p} \right), \quad (17)$$

$$a_z = \frac{A}{3} \left(p^{2n} - \frac{p_c^{2n}}{M^2} \frac{q^2}{p^2} \right) + A \left(\frac{p_c^{2n}}{M^2} \frac{3(s_z - p)}{p} \right), \quad (18)$$

$$g_r = \frac{3h(s_r - p)}{(M_c^2 - h^2)q} + \frac{1}{3}, \quad (19)$$

$$g_q = \frac{3h(s_q - p)}{(M_c^2 - h^2)q} + \frac{1}{3}, \quad (20)$$

$$g_z = \frac{3h(s_z - p)}{(M_c^2 - h^2)q} + \frac{1}{3}, \quad (21)$$

故塑性应变增量为

$$de_r^p = Ja_r [g_r ds_r + g_q ds_q + g_z ds_z], \quad (22)$$

$$de_q^p = Ja_q [g_r ds_r + g_q ds_q + g_z ds_z], \quad (23)$$

$$de_z^p = Ja_z [g_r ds_r + g_q ds_q + g_z ds_z]. \quad (24)$$

结合弹性区公式 (6), 可将孔周塑性区土体的弹塑性本构关系表示为矩阵形式, 通过对矩阵求逆, 再利用拉格朗日方法表示得到

$$\begin{Bmatrix} Ds_r \\ Ds_q \\ Ds_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} De_r \\ De_q \\ De_z \end{Bmatrix}. \quad (25)$$

式中 Ds_{ij} , De_{ij} 为拉格朗日方法表示下的应力与应变增量,

$$\begin{aligned} c = & JEa_r g_r - 2m^3 - 3m^2 + JEa_q g_q + JEa_z g_z + JEa_r g_q m + \\ & JEa_q g_r m + JEa_r g_z m + JEa_z g_r m + JEa_q g_z m + JEa_z g_q m - \\ & JEa_r g_r m^2 + JEa_r g_q m^2 + JEa_q g_r m^2 - JEa_q g_q m^2 + \\ & JEa_r g_z m^2 + JEa_z g_r m^2 + JEa_q g_z m^2 + JEa_z g_q m^2 - \\ & JEa_z g_z m^2 + 1, \end{aligned} \quad (26)$$

$$b_{11} = E(JEa_q g_q - u^2 + JEa_z g_z + JEa_q g_z u + JEa_z g_q u + 1), \quad (27)$$

$$b_{12} = E(u + u^2 - JEa_r g_q - JEa_r g_z u - JEa_z g_q u + JEa_z g_z u), \quad (28)$$

$$b_{13} = E(u + u^2 - JEa_r g_z - JEa_r g_q u + JEa_q g_q u - JEa_q g_z u), \quad (29)$$

$$b_{21} = E(u + u^2 - JEa_q g_r - JEa_z g_r u - JEa_q g_z u + JEa_z g_z u), \quad (30)$$

$$b_{22} = E(JEa_r g_r - u^2 + JEa_z g_z + JEa_r g_z u + JEa_z g_r u + 1), \quad (31)$$

$$b_{23} = E(u + u^2 - JEa_q g_z + JEa_r g_r u - JEa_q g_r u - JEa_r g_z u), \quad (32)$$

$$b_{31} = E(u + u^2 - JEa_z g_r - JEa_q g_r u + JEa_q g_q u - JEa_z g_q u), \quad (33)$$

$$b_{32} = E(u + u^2 - JEa_z g_q + JEa_r g_r u - JEa_r g_q u - JEa_z g_r u), \quad (34)$$

$$b_{33} = E(JEa_r g_r - u^2 + JEa_q g_q + JEa_r g_q u + JEa_q g_r u + 1). \quad (35)$$

根据塑性区大应变的定义, 塑性区应变增量采用对数形式:

$$de_r = -\ln \frac{dr}{dr_0}, \quad (36)$$

$$de_q = -\ln \frac{r}{r_0}. \quad (37)$$

因为柱孔扩张属于平面应变问题, 所以 $De_z = 0$, 则体积应变增量 $De_v = De_r + De_q = -Dn/n$, n 为土体比容, 将该关系式代入式 (25) 则可改写为

$$\begin{cases} Ds_r = \frac{1}{c} \left[b_{11} \left(-\frac{Dn}{n} \right) + (b_{12} - b_{11}) De_q \right], \\ Ds_q = \frac{1}{c} \left[b_{21} \left(-\frac{Dn}{n} \right) + (b_{22} - b_{21}) De_q \right], \\ Ds_z = \frac{1}{c} \left[b_{31} \left(-\frac{Dn}{n} \right) + (b_{32} - b_{31}) De_q \right]. \end{cases} \quad (38)$$

环向应变增量的拉格朗日表示为 $De_q = -Dr/r$, 引入一个中间变量:

$$x = \frac{u_r}{r} = \frac{r - r_0}{r}, \quad (39)$$

将式 (39) 微分:

$$\frac{Dr}{r} = \frac{Dx}{1-x}. \quad (40)$$

根据 $De_q = -Dr/r$ 和式 (40), 容易得到

$$e_q = \ln(1-x). \quad (41)$$

再令 $F = Dn/Dx$, 与式 (38) 联列, 得到

$$\begin{cases} \frac{Ds_r}{Dx} = -\frac{b_{11}}{c} \frac{F}{n} - \frac{b_{12} - b_{11}}{c(1-x)}, \\ \frac{Ds_q}{Dx} = -\frac{b_{21}}{c} \frac{F}{n} - \frac{b_{22} - b_{21}}{c(1-x)}, \\ \frac{Ds_z}{Dx} = -\frac{b_{31}}{c} \frac{F}{n} - \frac{b_{32} - b_{31}}{c(1-x)}, \\ \frac{Dn}{Dx} = F. \end{cases} \quad (42)$$

上述 4 个方程含 5 个未知量 (s_r , s_q , s_z , F , n), 故需要再构造一个新的方程。联列式 (42), (1), 得到

$$(s_r - s_q) = \left[\frac{b_{11}}{c} \frac{F}{n} + \frac{b_{12} - b_{11}}{c(1-x)} \right] \left(\frac{du_r}{dr} - x \right). \quad (43)$$

式 (43) 中的 du_r/dr 依旧为常规的欧拉表示, 需要转换为拉格朗日表示。

$$e_r = e_v - e_q = -\ln \left(\frac{n}{n_0} \right) + \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) = -\ln \left(\frac{n}{n_0} \right) + \ln \left(\frac{1}{1-x} \right). \quad (44)$$

将式 (36) 稍作变化, 得到

$$\frac{du_r}{dr} = 1 - e^{-e_r}. \quad (45)$$

联列式 (44), (45), 最终得到

$$\frac{du_r}{dr} = 1 - \left[\frac{n}{n_0} (1-x) \right]^{-1}. \quad (46)$$

将式 (46) 代入式 (43) 以得到拉格朗日方法表示的平衡方程, 移项得

$$F = \frac{nc}{b_{11}} \left[\frac{s_r - s_q}{1 - x - n_0/n/(1-x)} \right] \quad (47)$$

最后将式 (47) 代入式 (42) 得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{Ds_r}{Dx} &= -\frac{s_r - s_q}{N}, \\ \frac{Ds_q}{Dx} &= -\frac{b_{21}}{b_{11}} \left(\frac{s_r - s_q}{N} + \frac{b_{11} - b_{12}}{c(1-x)} \right) - \frac{b_{22} - b_{21}}{c(1-x)}, \\ \frac{Ds_z}{Dx} &= -\frac{b_{31}}{b_{11}} \left(\frac{s_r - s_q}{N} + \frac{b_{11} - b_{12}}{c(1-x)} \right) - \frac{b_{32} - b_{31}}{c(1-x)}, \\ \frac{Dn}{Dx} &= \frac{nc}{b_{11}} \left(\frac{s_r - s_q}{N} + \frac{b_{11} - b_{12}}{c(1-x)} \right). \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

式中, $N = 1 - x - n_0/n/(1-x)$ 。

塑性区土体均符合上面给出的利用拉格朗日方法表示的一阶微分方程组, 该微分方程组以 x 为唯一变量。其求解需要知道初始条件, 也就是需要知道位于弹塑性交界处 ξ_p 的土体, 其所受到的应力 $s_{ij}(x_p)$ 和比容 $n(x_p)$ 。

按照 Chen 等^[6]给出的方法, 解得上述微分方程组的初值条件为

$$\left. \begin{aligned} x_p \left(\frac{u_r}{r} \right)_{r=r_p} &= \frac{s_{rp} - p_0}{2G_0}, \\ s_r(x_p) &= p_0 + \sqrt{(q(x_p))^2/3}, \\ s_q(x_p) &= p_0 - \sqrt{(q(x_p))^2/3}, \\ s_z(x_p) &= p_0, \\ n(x_p) &= n_0, \\ q(x_p) &= \sqrt{(p_x^{2n+1} - p_0^{2n+1}) \frac{M^2 p_0}{(2n+1)p_c^{2n}}}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

式中, p_x 是 $p-q$ 平面塑性屈服面与 p 轴的交点, $p_x = p_0 \cdot \text{OCR}$, OCR 为超固结比。特别的, 针对孔壁处, $x_a = (u_r/r)_{r=a} = (a-a_0)/a = 1-a_0/a$ 。

2.4 中间变量 x 与径向坐标 r 之间的转换

因为之前给出的一阶微分方程组式 (48) 均是关于中间变量 x 的非线性常微分方程, 故需要建立起 x 和 r 的联系, 将基于拉格朗日表示的结果转化为常规的欧拉表示。

式 (46) 还有另外一种表达式:

$$\frac{du_r}{dr} = \frac{d(xr)}{dr} = x + \frac{dx}{dr} \quad (50)$$

联列式 (46), (50), 得到

$$\frac{dr}{r} = \frac{dx}{N} \quad (51)$$

对式 (51) 积分, 得

$$\frac{r}{a} = \exp \left(\int_{x_a}^x \frac{dx}{N} \right) \quad (52a)$$

故柱孔扩张期间的塑性区半径 r_p :

$$\frac{r_p}{a} = \exp \left(\int_{x_a}^{x_p} \frac{dx}{N} \right) \quad (52b)$$

至此, 完成整个柱孔扩张问题的公式推导。特别需要说明一点, 式 (51) 和式 (52) 中 n 的表达式, 可根据微分方程组式 (48) 求解得到的结果, 进行数值拟合得到。

3 算例分析

根据文献[28], 得到上文提到的一些计算参数, 汇总见表 1。

表 1 计算参数汇总

Table 1 Summary of parameters						
C_t	C_e	m	n	m	M	p_c
0.012	0.004	0.5	0.067	0.3	1.73	1480kPa

此外, 指定 OCR=1.2, 即土体为轻度超固结土; 初始孔隙比 $e_0=0.9$, 则初始比容 $n_0=1.9$; p_0 取值见表 2。

表 2 土体初始应力取值

Table 2 Values of initial stress of soil (kPa)				
低初始应力	中初始应力	高初始应力		
50	150	500	2000	5000

根据表 1, 2 给出的数据, 图 3 给出了不同初始应力 p_0 作用下, 孔壁应力 s_{ra} 与扩孔半径 a 之间的关系 (经归一化处理)。可以发现, 当柱孔开始扩张, 孔壁应力急剧增加, 当柱孔扩张至 $a/a_0=3$ 时, 孔壁应力趋于稳定, 说明此时土体已进入临界状态。此外, 土体初始应力越小, 扩张至相同孔径时, 最终的孔壁应力与初始应力的比值越大, 即说明扩孔对初始应力小的土体影响更大。

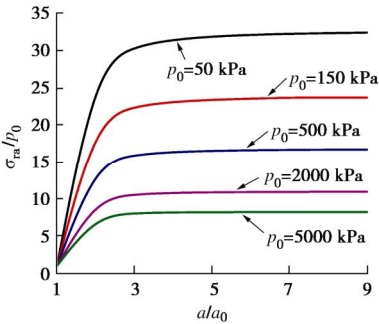


图 3 不同初始应力作用下孔壁应力 - 扩孔半径关系

Fig. 3 Variation of wall stress with cylindrical cavity radius under different initial stresses

图 4 为不同初始应力 p_0 作用下, 塑性区半径 r_p 与扩孔半径 a 之间的变化规律 (经归一化处理)。与图 3 得到的结论类似, 当扩孔至 $a/a_0=3$ 之后, 即使柱孔半径持续增大, 土体的塑性区半径也基本不再发生变化。还有, 土体初始应力越小, 扩孔会引起更大范围内的孔周土体进入塑性状态, 也就是说初始应力越小的土体, 在扩孔期间越容易塑性屈服。

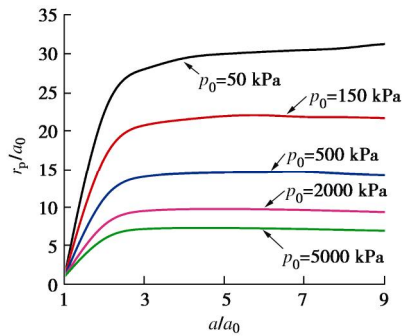


图 4 不同初始应力作用下塑性区半径-扩孔半径关系

Fig. 4 Variation of plastic zone radius with cylindrical cavity radius under different initial stresses

为了探究初始应力 p_0 对土体孔隙比的影响, 图 5, 6 给出了低、中、高初始应力作用下土体的孔隙比变化情况 (扩孔至 $a/a_0 = 2$)。通过对比发现初始应力对土体孔隙比的影响巨大, 孔隙比在不同大小下的初始应力作用下呈现出截然相反的变化规律。在低初始应力 (50 kPa) 作用下, 柱孔附近的土体孔隙比一直在减小, 出现剪胀现象, 这应该是由扩孔引起的颗粒排列变疏密引起的, 远离柱孔中心的土体受扩孔影响较小, 故孔隙比变化不大或保持不变。中初始应力 (150 kPa) 作用下, 孔周附近的土体也呈现出剪胀特性, 只是孔壁附近的孔隙比小于孔壁外侧, 这是因为孔壁处应力较大, 使得砂土颗粒出现了破碎挤密, 从而减小的孔隙比; 孔壁外侧的砂土颗粒破碎量少于孔壁处, 故孔隙比减少量小于孔壁处; 远离孔壁处的土体颗粒随距柱孔中心距离的增大, 其孔隙比出现减小, 直至不发生变化。也就是说, 在中初始应力作用下, 孔周土体受扩孔及颗粒破碎的共同影响。高初始应力 (500, 2000, 5000 kPa) 作用下, 孔周土体均出现了剪缩, 因为初始应力较大, 孔周土体均大于砂土颗粒的破碎应力, 使得越靠近孔壁, 土体的孔隙比越小。

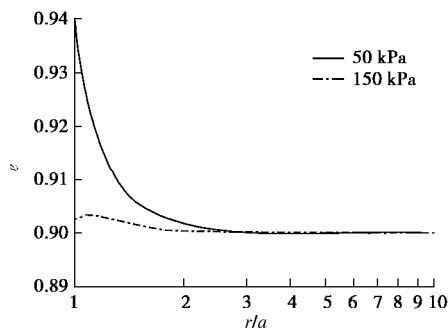


图 5 低、中初始应力作用下的土体孔隙比变化规律

Fig. 5 Change laws of soil void ratio under low and medium initial stresses

图 7~11 为不同初始应力作用下, 扩孔至 $a/a_0 = 2$ 时的孔周土体应力与比容沿径向位置的变化情况。孔周径向应力在塑性区急剧增加, 且初始应力越大, 孔

周径向应力越大。孔周竖向应力的变化规律同径向应力, 只是应力增量明显小于后者。塑性区孔周环向应力的变化情况则呈现出完全不同的趋势, 其在塑性区变化量并不大, 当初始应力较小时, 环向应力在塑性区逐渐减小; 而在中、高初始应力作用下, 塑性区环向应力先减小再增大。比容的变化规律同图 5, 6, 低、中初始应力作用下土体在塑性区表现为剪胀, 只是中初始应力作用下的土体同时受剪胀和颗粒破碎的共同作用, 故比容在塑性区非单调变化。值得注意的是, 在高初始应力作用下, 颗粒破碎挤密对比容产生的影响比扩孔引起的土体剪胀更大, 故土体最终表现为剪缩; 此外, 初始应力越大, 土体比容的变化量也就越大。

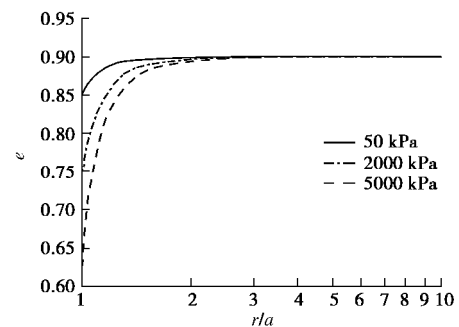


图 6 高初始应力作用下的土体孔隙比变化规律

Fig. 6 Change laws of soil void ratio under high initial stresses

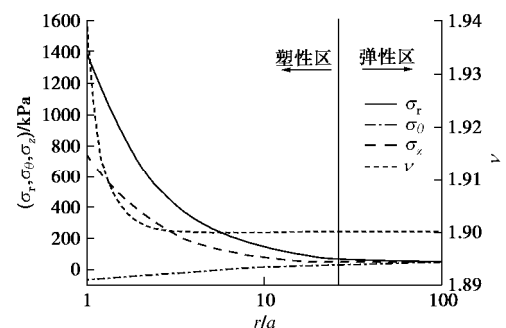


图 7 50 kPa 初始应力砂土中扩孔引起的孔周应力和比容分布

Fig. 7 Distribution of stress components and specific volume caused by cavity expansion in sand with initial stress of 50 kPa

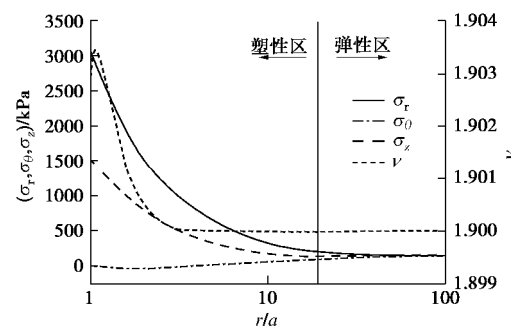


图 8 150 kPa 初始应力砂土中扩孔引起的孔周应力和比容分布

Fig. 8 Distribution of stress components and specific volume caused by cavity expansion in sand with 150 kPa initial stress

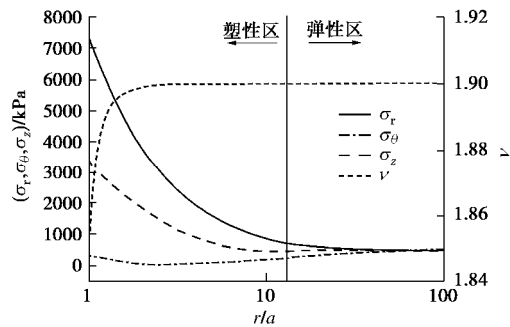


图9 500 kPa 初始应力砂土中扩孔引起的孔周应力和比容分布
Fig. 9 Distribution of stress components and specific volume caused by cavity expansion in sand with initial stress of 500 kPa

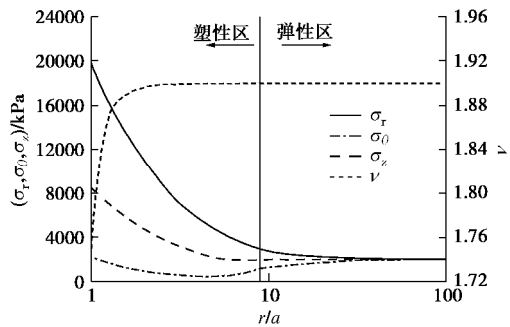


图10 2000 kPa 初始应力砂土中扩孔引起的孔周应力和比容分布
Fig. 10 Distribution of stress components and specific volume caused by cavity expansion in sand with initial stress of 2000 kPa

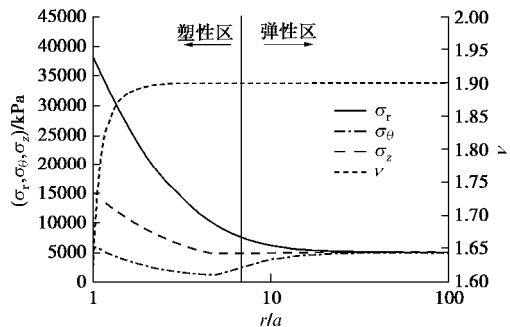


图11 5000 kPa 初始应力砂土中扩孔引起的孔周应力和比容分布
Fig. 11 Distribution of stress components and specific volume caused by cavity expansion in sand with initial stress of 5000 kPa

从图12~14看,无论土体的初始应力多大,孔壁处土体单元均会以竖直向上的应力路径到达塑性状态。随着持续扩孔,在低、中初始应力作用下的孔壁处土体单元平均应力和偏应力持续增大,应力路径线斜向上与临界状态线分别相交于 P_1 、 P_2 两点,即此时土体达到临界状态,该过程表明土体呈现应变硬化的特征。对比图12~14发现,最大的区别在于,高初始应力作用下的土体在扩孔期间无法达到临界状态,根据临界状态的定义,这可能是由于土体发生剪切大变形阶段,其体积和总应力未保持不变。

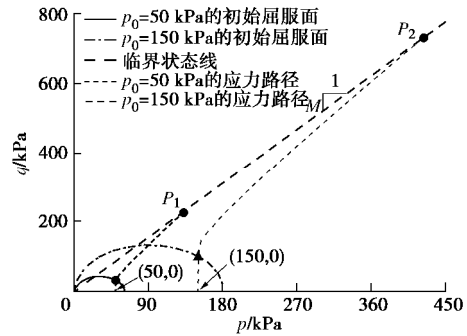


图12 低、中初始应力作用下的孔壁处土体应力路径 ($a/a_0=2$)
Fig. 12 Soil stress paths at cavity wall caused by cavity expansion under low and medium initial stresses ($a/a_0=2$)

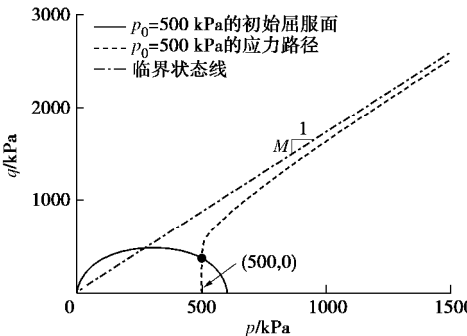


图13 500 kPa 应力作用下的孔壁处土体应力路径 ($a/a_0=2$)
Fig. 13 Soil stress path at the cavity wall caused by cavity expansion under initial stress of 500 kPa ($a/a_0=2$)

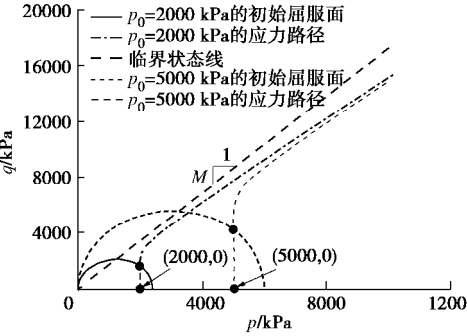


图14 2000 kPa 和 5000 kPa 应力作用下的孔壁处土体应力路径 ($a/a_0=2$)
Fig. 14 Soil stress paths at cavity wall caused by cavity expansion under initial stresses of 2000 and 5000 kPa ($a/a_0=2$)

4 结 论

结合拉格朗日分析法,采用考虑砂土颗粒破碎,峰值强度及剪胀特性的本构模型,引入一个中间变量,未做任何计算简化,将砂土中柱孔不排水扩张问题转化为求解一系列带初值的一阶微分方程组,并通过算例讨论了土体初始应力对扩孔结果的影响,得到如下3点结论。

(1) 颗粒破碎会减小土体的孔隙比,主要发生在孔周附近的塑性区,且会随着距柱孔中心距离的增大

而减小作用, 从而影响土体的剪胀特性, 使得砂土中扩孔问题变得更加复杂化。

(2) 土体初始应力越大, 颗粒破碎量也会增加; 当扩孔至相同半径时, 越大的初始应力会产生越大的孔周应力, 主要影响径向和竖向应力, 但其影响范围会减小, 即塑性区半径会减小。

(3) 中、低初始应力土体受剪切呈现出剪胀特性, 且在扩孔期间能达到临界状态; 而高初始应力下的土体表现为剪缩, 也无法达到临界状态, 但两者均表现为应变硬化。

参考文献:

- [1] VESIC A S. Expansion of cavity in infinite soil mass[J]. Journal of Soil Mechanics Foundation Division, American Society of Civil Engineering, 1972, **98**(3): 265 - 289.
- [2] CAETER J P, BOOKER J R, YEUNG S K. Cavity expansion in cohesive frictional soils[J]. Géotechnique, 1986, **36**(3): 349 - 358.
- [3] YU H S, HOULSBY G T. Finite cavity expansion in dilatant soils: loading analysis[J]. Géotechnique, 1991, **41**(2): 173 - 183.
- [4] SHUTTLE D. Cylindrical cavity expansion and contraction in Tresca soil[J]. Géotechnique, 2007, **57**(3): 305 - 308.
- [5] COLLINS I F, YU H S. Undrained cavity expansions in critical state soils[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1996, **20**(7): 489 - 516.
- [6] CHEN S L, ABOUSLEIMAN Y N. Exact undrained elasto-plastic solution for cylindrical cavity expansion in modified Cam clay soil[J]. Géotechnique, 2012, **62**(5): 447 - 456.
- [7] VRAKAS A, ANAGNOSTOU G. A finite strain closed-form solution for the elastoplastic ground response curve in tunnelling[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2014, **38**: 1131 - 1148.
- [8] MO P Q, YU H S. Drained cavity expansion analysis with a unified state parameter model[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2018, **55**(7): 1029 - 1040.
- [9] COLLINS I F, PENDER M J, WANG Y. Cavity expansion in sands under drained loading conditions[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1992, **16**(1): 3 - 23.
- [10] COLLINS I F, STIMPSON J R. Similarity solutions for drained and undrained cavity expansions in soils[J]. Géotechnique, 1994, **44**(1): 21 - 34.
- [11] CAO L F, TEH C I, CHANG M F. Undrained cavity expansion in modified Cam clay I: theoretical analysis[J]. Géotechnique, 2001, **51**(4): 323 - 334.
- [12] 肖昭然, 张 昭, 杜明芳. 饱和土体小孔扩张问题的弹塑性解析解[J]. 岩土力学, 2004, **25**(9): 1373 - 1378. (XIAO Zhao-ran, ZHANG Zhao, DU Ming-fang. An elastoplastic closed-form approach of cavity expansion in saturated soil based on modified Cam clay model[J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, **25**(9): 1373 - 1378. (in Chinese))
- [13] 胡 伟, 刘明振. 非饱和土中球形孔扩张的弹塑性分析[J]. 岩土工程学报, 2006, **28**(10): 1292 - 1297. (HU Wei, LIU Ming-zhen. Elastic-plastic solution of expansion of sphere cavity in unsaturated soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, **28**(10): 1292 - 1297. (in Chinese))
- [14] 宋勇军, 胡 伟, 王德胜, 等. 基于修正剑桥模型的挤密桩挤土效应分析[J]. 岩土力学, 2011, **32**(3): 811 - 814. (SONG Yong-jun, HU Wei, WANG De-sheng, et al. Analysis of squeezing effect of compaction piles based on modified Cam-clay model[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, **32**(3): 811 - 814. (in Chinese))
- [15] 李镜培, 李 林, 孙德安, 等. 饱和软土地层静压沉桩阻力理论研究[J]. 岩土工程学报, 2015, **37**(8): 1454 - 1461. (LI Jing-pei, LI Lin, SUN De-an, et al. Theoretical study on sinking resistance of jacked piles in saturated soft clay[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, **37**(8): 1454 - 1461. (in Chinese))
- [16] 李镜培, 唐剑华, 李 林, 等. 饱和黏土中柱孔三维弹塑性扩张机制研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2016, **35**(2): 378 - 386. (LI Jing-pei, TANG Jian-hua, LI Lin, et al. Mechanism of three dimensional elastic-plastic expansion of cylindrical cavity in saturated clay[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2016, **35**(2): 378 - 386. (in Chinese))
- [17] 李镜培, 唐剑华, 张亚国, 等. 饱和粘土中球孔扩张问题弹塑性解析[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2014, **46**(12): 71 - 77. (LI Jing-pei, TANG Jian-hua, ZHANG Ya-guo, et al. Elastic-plastic solution of sphere cavity expansion in saturated clay[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2014, **46**(12): 71 - 77. (in Chinese))
- [18] 李 林, 李镜培, 孙德安, 等. 剪胀性砂土中球孔扩张弹塑性解[J]. 岩土工程学报, 2017, **39**(8): 1453 - 1460. (LI Lin, LI Jing-pei, SUN De-an, et al. Elasto-plastic solution to expansion of a spherical cavity in dilatant sand[J]. Chinese

- Journal of Geotechnical Engineering, 2017, **39**(8): 1453 - 1460. (in Chinese))
- [19] RUSSELL A R, KHALILI N. Drained cavity expansion in sands exhibiting particle crushing[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2002, **26**(4): 323 - 340.
- [20] 蒋明镜, 孙渝刚. 考虑砂土颗粒破碎的圆孔扩张半解析分析[J]. 岩土工程学报, 2009, **31**(11): 1645 - 1651. (JIANG Ming-jing, SUN Yu-gang. Semi-analytical solution to cavity expansion in crushable sands[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, **31**(11): 1645 - 1651. (in Chinese))
- [21] JIANG M J, SUN Y G. Cavity expansion analyses of crushable granular materials with state-dependent dilatancy[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2012, **36**(6): 723 - 742.
- [22] KONRAD J M. Sand state from cone penetrometer tests: a framework considering grain crushing stress[J]. Géotechnique, 1998, **48**(2): 201 - 215.
- [23] 蒋明镜. 用于触探试验分析的粒状材料本构模型之展望[J]. 岩土工程学报, 2007, **29**(9): 1281 - 1288. (JIANG Ming-jing. Main features of future constitutive models for granular materials in penetration analysis[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, **29**(9): 1281 - 1288. (in Chinese))
- [24] YAO Y P, YAMAMOTO H, WANG N D. Constitutive model considering sand crushing[J]. Soils and Foundations, 2008, **48**(4): 603 - 608.
- [25] 王乃东, 姚仰平. 粒状材料颗粒破碎的力学特性描述[J]. 工业建筑, 2008, **38**(8): 17 - 20. (WANG Nai-dong, YAO Yang-ping. Mechanical description for granular material exhibiting particle crushing[J]. Industrial Construction, 2008, **38**(8): 17 - 20. (in Chinese))
- [26] 姚仰平, 侯伟, 罗汀. 土的统一硬化模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, **28**(10): 2135 - 2151. (YAO Yang-ping, HOU Wei, LUO Ting. Unified hardening model for soils[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, **28**(10): 2135 - 2151. (in Chinese))
- [27] WANG N D, YAO Y P. A generalized constitutive model considering sand crushing[J]. Soils and Foundations, 2015, **48**(2): 12 - 15.
- [28] 刘萌成, 高玉峰, 黄晓明. 考虑强度非线性的堆石料弹塑性本构模型研究[J]. 岩土工程学报, 2005, **27**(3): 294 - 298. (LIU Meng-cheng, GAO Yu-feng, HUANG Xiso-ming. Study on elasto-plastic constitutive model of rockfills with nonlinear strength characteristics[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, **27**(3): 294 - 298. (in Chinese))
- (上接 2093 页)
- [7] 张孟喜, 张石磊. H - V 加筋土性状的颗粒流细观模拟[J]. 岩土工程学报, 2008, **30**(5): 625 - 631. (ZHANG Meng-xi, ZHANG Shi-lei. Behavior of soil reinforced with H - V inclusions by PFC2D [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, **30**(5): 625 - 631. (in Chinese))
- [8] 周健, 白彦峰, 张昭. 砂土中群桩室内模型试验及颗粒流模拟研究[J]. 岩土工程学报, 2009, **31**(8): 1275 - 1280. (ZHOU Jian, BAI Yan-feng, ZHANG Zhao. Lab model tests and PFC^{2D} modeling of pile groups in sands[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, **31**(8): 1275 - 1280. (in Chinese))
- [9] 贾敏才, 王磊, 周健. 干砂强夯动力特性的细观颗粒流分析[J]. 岩土力学, 2009, **30**(4): 871 - 878. (JIA Min-cai, WANG Lei, ZHOU Jian. Mesomechanical analysis of characteristics of dry sands in response to dynamic compaction with PFC^{2D} [J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, **30**(4): 871 - 878. (in Chinese))
- [10] 王连庆, 高谦, 王建国. 自然崩落采矿法的颗粒流数值模拟[J]. 北京科技大学学报, 2007, **29**(6): 557 - 561. (WANG Lian-qing, GAO Qian, WANG Jian-guo. Numerical simulation of natural caving method based on particle flow code in two dimensions[J]. Journal of University of Science and Technology Beijing, 2007, **29**(6): 557 - 561. (in Chinese))
- [11] 王涛, 盛谦, 熊将. 基于颗粒流方法自然崩落法数值模拟研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, **26**(增刊 2): 4202 - 4207. (WANG Tao, SHENG Qian, XIONG Jiang. Research on numerical simulation of natural caving method based on particle flow method[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, **26**(S2): 4202 - 4207. (in Chinese))
- [12] CUNDALL P A. PFC2D user's manual (Version 3.1) [M]. Minnesota: Itasca Consulting Group, Inc, 2004.
- [13] 陆厚根. 粉体技术导论[M]. 上海: 同济大学出版社, 1998. (LU Hou-gen. Introduction of powder technology[M]. Shanghai: Tongji University Press, 1998. (in Chinese))
- [14] 陶珍东, 郑少华. 粉体工程与设备[M]. 2 版. 北京: 化学工业出版社, 2010. (TAO Zhen-dong, ZHENG Shao-hua. Powder technology and equipment[M]. 2nd ed. Beijing: Chemical Industry Press, 2010. (in Chinese))