

DOI: 10.11779/CJGE201909016

# 饱和单层土体一维热固结精确解

钮家军<sup>1</sup>, 凌道盛<sup>\*1</sup>, 王秀凯<sup>1</sup>, 单振东<sup>2</sup>, 赵云<sup>1,3</sup>

(1. 浙江大学岩土工程研究所, 浙江 杭州 310058; 2. 中国地震局工程力学研究所, 黑龙江 哈尔滨 150080; 3. 河南工业大学土木建筑学院,  
河南 郑州 450001)

**摘要:** 岩土体在非等温场下的固结响应一直是研究热点。基于考虑渗流的饱和土热固结控制方程, 给出了一种三类任意边界条件下, 饱和单层土体一维热固结精确解的求解方法。首先, 利用函数  $\varphi$  将对温度和超静孔压的求解转换为对函数  $\phi$  的求解, 采用分离变量法, 结合边界条件得到微分方程的特征函数。然后, 将非齐次边界条件齐次化, 利用微分方程的特征函数, 采用系数变易法, 给出非齐次边界条件下的精确级数解。最后, 通过算例揭示土体边界的透水条件及温度变化对土体热固结响应影响显著。

**关键词:** 饱和单层土; 热固结; 精确解; 非齐次边界条件

中图分类号: TU431 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2019)09-1715-09

作者简介: 钮家军(1993—), 男, 博士研究生, 主要从事热-水-力耦合现象的解析解研究。E-mail: niu0918@zju.edu.cn。

## Exact solutions for one-dimensional thermal consolidation of single-layer saturated soil

NIU Jia-jun<sup>1</sup>, LING Dao-sheng<sup>1</sup>, WANG Xiu-kai<sup>1</sup>, SHAN Zhen-dong<sup>2</sup>, ZHAO Yun<sup>1,3</sup>

(1. Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China; 2. Institute of Engineering Mechanics, China Earthquake Administration, Harbin 150080, China; 3. College of Civil Engineering and Architecture, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, China)

**Abstract:** The consolidation under the non-isothermal field has long been the research focus. Based on the governing equations which take seepage flow into consideration, a new method to obtain exact solutions for one-dimensional thermal consolidation of single-layer saturated soil with three types of arbitrary boundary conditions is proposed. Firstly, the aim to solve temperature and excess pore pressure is transformed to solve the function  $\phi$  by introducing the function  $\varphi$ . The eigenfunctions of differential equations are achieved with boundary conditions by the method of separation of variables. The nonhomogeneous boundary conditions are then transformed into homogeneous ones. The series form exact solutions are put forward according to the method of undetermined coefficients and eigenfunctions of differential equations. Finally, the conclusions that the seepage and temperature boundary play an important role in the thermal consolidation of the soil are reached by case studies.

**Key words:** single-layer saturated soil; thermal consolidation; exact solution; nonhomogeneous boundary condition

## 0 引言

近年来, 随着高放射性废弃物处置、深海可燃冰开采、深地能源储存等重大工程的建设, 非等温场下岩土体的热-水-力耦合响应问题成为岩土工程的研究热点。传统 Terzaghi 固结理论未考虑土颗粒和孔隙流体的热胀冷缩特性, 因此国内外许多学者开展了温度和渗流耦合作用下的土体热固结研究。

Biot<sup>[1-2]</sup>最早建立了非等温状态下土体三维热固结方程。Booker 等<sup>[3]</sup>假设温度场独立于力场与渗流场, 重新推导了热-水-力耦合方程, 对耦合方程系数的物理含义进行了阐释。Smith 等<sup>[4]</sup>对于低雷诺数的孔隙弹性材料, 忽略对流引起的热量交换, 建立了热-水-力

全耦合控制方程。Zhou 等<sup>[5]</sup>进一步考虑热渗效应和等温热流效应, 提出了更全面的热固结控制方程。

部分学者不考虑渗流和变形对温度的影响, 认为温度在土体中的传播符合热传导方程, 使解析求解得到简化。Booker 等<sup>[3, 6]</sup>求解了土体内存在点热源和球热源时, 温度和超静孔压的解。Mctigue<sup>[7]</sup>直接将热传导方程的解, 代入渗流方程给出了一维半无限饱和土体的热固结解, 可适用于表面透水或不透水, 作用有

基金项目: 国家重点研发计划项目(2016YFC0800202); 国家自然科学基金项目(51578502)

收稿日期: 2018-11-20

\*通讯作者(E-mail: dslng@zju.edu.cn)

恒定温度或热源情况。Giraud 等<sup>[8]</sup>认为温度场符合热传导方程, 研究了深埋衰变热源作用下饱和土体的热固结。Blond 等<sup>[9]</sup>分析了半无限空间饱和土体表面透水且作用简谐温度时, 土体温度和超静孔压的响应。

同时, 对热-水-力全耦合热固结控制方程, 许多学者采用积分变换方法给出了求解。Bai 等<sup>[10]</sup>通过 Fourier 变换给出了饱和单层土体单侧透水可进行热交换时, 土体一维热固结的解, 并探讨了完全耦合、部分耦合及完全不耦合时土体的超静孔压响应差别。Zhou 等<sup>[5]</sup>利用 Laplace 变换求解了单层土体两侧透水, 表面施加突增温度时, 土体超静孔压和温度在变换域的解, 由逆变换得到了对应时域解。白冰<sup>[11-14]</sup>借助 Fourier 变换或 Laplace 变换分析了饱和单层土体或半无限空间土体表面温度突增或周期变化时, 土体温度和超静孔压的变化。王路君等<sup>[15]</sup>利用积分变换域内的扩展精细积分分解, 将研究拓展到衰变热源作用下的饱和多层土体热固结问题。

综上可见, 前人对热固结已进行了许多研究, 但对温度场非耦合情况, 热传导方程对能量变化考虑不够全面; 对温度场全耦合情况, 时间较大时, 积分变换方法的精度和稳定性可能存在不足。同时, 一维热固结在复杂边界条件和初始条件下的解析解研究较少。本文给出一种通过特征函数和系数变易法, 计算 3 类任意边界条件下, 饱和单层土体一维热固结精确级数解的方法。通过算例分别分析土体渗透系数对温度传导的影响, 土体边界的透水条件、温度变化对土体温度和超静孔压的影响。

## 1 一维热固结定解问题

### 1.1 控制方程

饱和单层土体一维热固结计算示意图如 1 所示,  $h$  为单层土体的厚度。

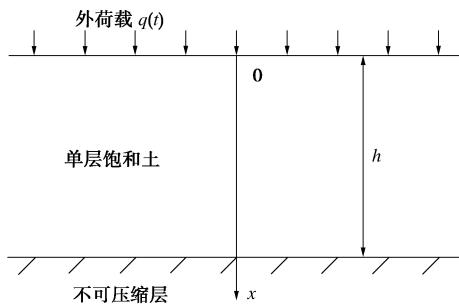


图 1 饱和单层土体一维热固结计算模型

Fig. 1 Analysis model for one-dimensional thermal consolidation of single-layer saturated soil

根据 Booker 等<sup>[3]</sup>、Bai 等<sup>[10]</sup>和 Smith 等<sup>[16]</sup>的研究, 温度变化不大时, 土体的物理性质参数近似不变, 且体积功对温度变化影响很小, 可以不考虑。本文基于

Zhou 等<sup>[5]</sup>提出的热固结控制方程, 忽略热渗效应和等温热流效应, 假定土颗粒和孔隙流体不可压缩, 考虑渗流对土体温度变化的影响, 采用如下形式的一维热固结控制方程:

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x} + \beta \frac{\partial T}{\partial x} , \quad (1)$$

$$\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \alpha_u \frac{\partial T}{\partial t} , \quad (2)$$

$$K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho_w c_w T_0 \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} , \quad (3)$$

式中,  $\alpha_u = (1-n)\alpha_s + n\alpha_w$ ,  $\rho c = (1-n)\rho_s c_s + n\rho_w c_w$ 。 $u(x, t)$  为土骨架在  $x$  方向的位移,  $p(x, t)$  为土体超静孔隙水压力,  $T(x, t)$  为土体相对于初始温度  $T_0$  的温度变化量;  $\lambda$ ,  $G$  为 Lame 常数,  $n$  为孔隙率;  $k$  为土体渗透系数,  $\gamma_w$  为孔隙流体的重度,  $\rho_s$  和  $\rho_w$  分别为土颗粒和孔隙流体的密度;  $K$  为土体的热传导系数,  $\beta$  为热应力系数,  $\alpha_s$  和  $\alpha_w$  分别为土颗粒和孔隙流体的线热膨胀系数,  $c_s$  和  $c_w$  分别为土颗粒和孔隙流体的质量比热容。

对式 (1) 左右两侧关于  $x$  积分, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{p + \beta T + f(t)}{\lambda + 2G} = \frac{p + \beta T + f(t)}{E_s} , \quad (4)$$

式中,  $f(t)$  为关于时间  $t$  的函数, 由定解问题的边界条件确定。

将式 (4) 代入式 (2), 整理得到

$$\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{E_s} \frac{\partial p}{\partial t} - \left( \alpha_u - \frac{\beta}{E_s} \right) \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial f(t)}{E_s \partial t} , \quad (5)$$

式 (3), (5) 构成了饱和土体一维热固结控制方程。

### 1.2 定解条件

土体孔压和温度的初始条件可表示为

$$p(x, 0) = p_0(x), \quad T(x, 0) = T_0(x) , \quad (6)$$

式中,  $p_0(x)$  和  $T_0(x)$  可以是关于  $x$  的任意函数。

土层顶面为自由表面, 底面为不可压缩层。以顶面为坐标原点, 对以下 3 类超静孔压和温度边界条件问题进行解析求解:

$$(A) p(0, t) = f_1(t), \quad T(0, t) = f_2(t), \\ p(h, t) = f_3(t), \quad T(h, t) = f_4(t) , \quad (7)$$

$$(B) p(0, t) = f_1(t), \quad T(0, t) = f_2(t), \\ p_x(h, t) = f_3(t), \quad T_x(h, t) = f_4(t) , \quad (8)$$

$$(C) p_x(0, t) = f_1(t), \quad T_x(0, t) = f_2(t), \\ p_x(h, t) = f_3(t), \quad T_x(h, t) = f_4(t) , \quad (9)$$

式中,  $f_i(t)(i=1, 2, 3, 4)$  可以是关于时间  $t$  的任意函数。

A 类边界条件代表饱和土层上下表面均给定超静孔压和温度值; B 类边界条件代表饱和土层上表面给

定超静孔压和温度值, 下表面给定孔压梯度和温度梯度; C类边界条件代表饱和土层上下表面均给定孔压梯度和温度梯度。由于孔压梯度与渗流量成正比, 温度梯度和热流密度成正比, 实则对应的渗流和热流密度边界间接给出。

## 2 齐次问题的解

令  $f(t) = f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) = f_4(t) = 0$ , 即可得到热固结解问题相对应的齐次形式, 即控制方程(3)和(5)的齐次形式为

$$\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{E_s} \frac{\partial p}{\partial t} + \left( \alpha_u - \frac{\beta}{E_s} \right) \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad (10)$$

$$-\rho_w c_w T_0 \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (11)$$

三类边界条件齐次形式为

$$(A) \begin{cases} p(0, t) = 0, T(0, t) = 0, \\ p(h, t) = 0, T(h, t) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

$$(B) \begin{cases} p(0, t) = 0, T(0, t) = 0, \\ p_x(h, t) = 0, T_x(h, t) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

$$(C) \begin{cases} p_x(0, t) = 0, T_x(0, t) = 0, \\ p_x(h, t) = 0, T_x(h, t) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

### 2.1 齐次方程的通解

引入势函数  $\varphi$ , 超静孔压  $p$  和温度  $T$  与  $\varphi$  满足:

$$p = \left( \frac{\beta}{E_s} - \alpha_u \right) \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (15)$$

$$T = \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{E_s} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (16)$$

将式(15), (16)代入式(10), 可知式(10)恒成立。将式(15), (16)代入式(11), 可得

$$a_1 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - a_2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} + a_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (17)$$

式中,  $a_1 = \frac{Kk}{\gamma_w}$ ,  $a_3 = -\frac{\rho c}{E_s}$ ,  $a_2 = \rho_w c_w T_0 \frac{k}{\gamma_w} \cdot \left( \frac{\beta}{E_s} - \alpha_u \right) + \frac{\rho c k}{\gamma_w} + \frac{K}{E_s}$ 。

将式(17)改写为

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi = 0, \quad (18)$$

式中,  $b_1$  和  $b_2$  是下列方程的根:

$$a_1 b^2 - a_2 b + a_3 = 0. \quad (19)$$

$$(1) b_1 \neq b_2$$

当方程(19)有两个不相等的根时, 式(18)的解可写为

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad (20)$$

且  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  满足

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b_i \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi_i = 0 \quad (i=1, 2), \quad (21)$$

将式(20)代入式(15), (16), 可得

$$p = \left( \frac{\beta}{E_s} - \alpha_u \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \left( \frac{\beta}{E_s} - \alpha_u \right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}, \quad (22)$$

$$T = \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{1}{E_s} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{1}{E_s} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}, \quad (23)$$

令

$$\phi_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \quad (i=1, 2). \quad (24)$$

运用式(21)可以将式(22), (23)化简为

$$p = c_{11} \phi_1 + c_{12} \phi_2, \quad T = c_{13} \phi_1 + c_{14} \phi_2, \quad (25)$$

式中,

$$c_{11} = c_{12} = \frac{\beta}{E_s} - \alpha_u, \quad (26)$$

$$c_{13} = \frac{kb_1}{\gamma_w} - \frac{1}{E_s}, \quad c_{14} = \frac{kb_2}{\gamma_w} - \frac{1}{E_s}. \quad (27)$$

$$(2) b_1 = b_2$$

当方程(19)有两个相等的根时, 式(18)的解可写为

$$\varphi = \varphi_1 + t \varphi_2, \quad (28)$$

式中,  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  同样满足式(21)。

将式(28)代入式(15), (16), 同理运用式(21)可得

$$p = \left( \frac{\beta}{E_s} - \alpha_u \right) \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \varphi_2 + t \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right), \quad (29)$$

$$T = \left( \frac{k}{\gamma_w} b_1 - \frac{1}{E_s} \right) \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \varphi_2 + t \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right) - \frac{k}{\gamma_w} b_1 \varphi_2, \quad (30)$$

令

$$\phi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \varphi_2, \quad \phi_2 = \varphi_2, \quad (31)$$

式(29), (30)可化为

$$p = c_{21} \phi_1 + c_{22} t \frac{\partial \phi_2}{\partial t}, \quad T = c_{23} \left( \phi_1 + t \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \right) + c_{24} \phi_2, \quad (32)$$

式中,

$$c_{21} = c_{22} = \frac{\beta}{E_s} - \alpha_u, \quad (33)$$

$$c_{23} = \frac{k}{\gamma_w} b_1 - \frac{1}{E_s}, \quad c_{24} = -\frac{k}{\gamma_w} b_1. \quad (34)$$

将式(25), (32)改写为以下矩阵形式

$$\mathbf{R} = \mathbf{C}_1 \boldsymbol{\phi}, \quad b_1 \neq b_2; \quad \mathbf{R} = \mathbf{C}_2 \boldsymbol{\phi}, \quad b_1 = b_2, \quad (35)$$

式中,

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} p \\ T \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}, \quad (36)$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{13} & c_{14} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} c_{21} & c_{22}t\frac{\partial}{\partial t} \\ c_{23} & c_{24} + c_{23}t\frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix}, \quad (37)$$

由式(21), (24), (31)可知,  $\phi_1$  和  $\phi_2$  应满足

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b_i \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi_i = 0 \quad (i=1, 2) \quad . \quad (38)$$

从上面的推导可以看出, 对齐次方程组(10)和(11)的求解已经转换为对方程(38)的求解, 然后运用式(35)即可得到该齐次方程中超静孔压和温度的解。

## 2.2 A类齐次边界条件下方程的解

根据分离变量法, 设

$$\phi_i = X_i(x)Y_i(t) \quad (i=1, 2) \quad , \quad (39)$$

将式(39)代入式(38), 分离变量可得

$$\frac{X_{i,xx}(x)}{X_i(x)} = b_i \frac{Y_{i,t}(t)}{Y_i(t)} = -\omega_i^2 \quad , \quad (40)$$

式中,  $\omega_i$  为非负实数。

根据式(40)可以解得

$$X_i(x) = \tilde{d}_{1i} \cos(\omega_i x) + \tilde{d}_{2i} \sin(\omega_i x) \quad , \quad (41)$$

$$Y_i(t) = \tilde{d}_{3i} e^{-\beta_i t}, \quad \beta_i = \omega_i^2 / b_i \quad , \quad (42)$$

式中,  $\tilde{d}_{1i}$ ,  $\tilde{d}_{2i}$ ,  $\tilde{d}_{3i}$  为积分常数。

将式(41), (42)代入式(39)化简后得到

$$\phi_1 = e^{-\beta_1 t} [d_{11} \cos(\omega_1 x) + d_{21} \sin(\omega_1 x)] \quad , \quad (43)$$

$$\phi_2 = e^{-\beta_2 t} [d_{12} \cos(\omega_2 x) + d_{22} \sin(\omega_2 x)] \quad , \quad (44)$$

式中,  $d_{11}$ ,  $d_{12}$ ,  $d_{21}$ ,  $d_{22}$  是积分系数, 由初始条件和边界条件确定。

将式(35)代入齐次边界条件(12)后, 可得边界条件

$$\phi(0, t) = 0, \quad \phi(h, t) = 0 \quad , \quad (45)$$

将式(43), (44)代入边界条件(45)后, 可得

$$d_{11} = d_{12} = 0, \quad \sin(\omega_1 h) = \sin(\omega_2 h) = 0 \quad . \quad (46)$$

式(46)中非负实数  $\omega$  有无穷多个解, 假设用  $\omega_k$  表示第  $k$  个解, 则

$$\omega_{1k} = \omega_{2k} = \frac{k\pi}{h} \quad (k=0, 1, 2, 3, \dots) \quad . \quad (47)$$

因此, A类边界条件的解为

$$\phi_k = \begin{bmatrix} e^{-\beta_{1k} t} & 0 \\ 0 & e^{-\beta_{2k} t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{21}^k \\ d_{22}^k \end{bmatrix} \sin\left(\frac{k\pi}{h} x\right) \quad (k=0, 1, 2, 3, \dots) \quad . \quad (48)$$

将上式中所有的非零解相加得到原方程(38)的解, 具体为

$$\phi = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} e^{-\beta_{1k} t} & 0 \\ 0 & e^{-\beta_{2k} t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{21}^k \\ d_{22}^k \end{bmatrix} \sin\left(\frac{k\pi}{h} x\right) \quad , \quad (49)$$

式中,  $d_{21}^k$ ,  $d_{22}^k$  是积分系数, 可由初始条件求得。

## 2.3 B, C类齐次边界条件下方程的解

对B, C类齐次边界条件, 根据A类边界条件的求解过程可得其解为

$$\phi = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} e^{-\beta_{1k} t} & 0 \\ 0 & e^{-\beta_{2k} t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{21}^k \\ d_{22}^k \end{bmatrix} \sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2h} x\right] \quad (\text{B类}) \quad , \quad (50)$$

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} e^{-\beta_{1k} t} & 0 \\ 0 & e^{-\beta_{2k} t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11}^k \\ d_{12}^k \end{bmatrix} \cos\left(\frac{k\pi}{h} x\right) \quad (\text{C类}) \quad , \quad (51)$$

式中,  $d_{11}^k$ ,  $d_{12}^k$ ,  $d_{21}^k$ ,  $d_{22}^k$  是积分系数, 可由初始条件求得。

将初始条件代入  $\phi$  的表达式, 再将  $\phi$  代入式(35), 即可得到超静孔压和温度的解。同时, 3类边界条件齐次问题的特征函数全部得到。

## 3 非齐次问题的解

非齐次控制方程(3)和(5)以矩阵形式可表示为

$$\mathbf{GR}_{,xx} + \mathbf{CR}_{,t} = \mathbf{Q} \quad , \quad (52)$$

式中,

$$\mathbf{R} = \{p, T\}^T \quad , \quad (53)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{k}{\gamma_w} & 0 \\ -\rho_w c_w T_0 \frac{k}{\gamma_w} & K \end{bmatrix} \quad , \quad (54)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{E_s} & \alpha_u - \frac{\beta}{E_s} \\ 0 & \rho c \end{bmatrix} \quad , \quad (55)$$

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{\partial f(t)}{E_s \partial t}, 0 \right\}^T \quad . \quad (56)$$

超静孔压和温度的初始条件和边界条件由式(6)~(9)给出。

### 3.1 非齐次边界条件齐次化

为获得非齐次方程的解, 首先将非齐次边界问题齐次化, 假设方程的解满足

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^s + \mathbf{R}^d \quad , \quad (57)$$

式中,  $\mathbf{R}^s$  满足非齐次边界条件。

对于A类边界条件,

$$\mathbf{R}^s = \left\{ \begin{array}{l} [(h-x)f_1(t) + xf_3(t)]/h \\ [(h-x)f_2(t) + xf_4(t)]/h \end{array} \right\} \quad . \quad (58)$$

对于B类边界条件,

$$\mathbf{R}^s = \{f_1(t) + xf_3(t), f_2(t) + xf_4(t)\}^T \quad . \quad (59)$$

对于C类边界条件,

$$\mathbf{R}^s = \left\{ \begin{array}{l} xf_1(t) + x^2[f_3(t) - f_1(t)]/(2h) \\ xf_2(t) + x^2[f_4(t) - f_2(t)]/(2h) \end{array} \right\} \quad . \quad (60)$$

将式(57)代入式(52)可得

$$\mathbf{G}\mathbf{R}_{,xx}^d + \mathbf{C}\mathbf{R}_{,t}^d = \mathbf{M} \quad . \quad (61)$$

式中,

$$\mathbf{M} = \mathbf{Q} - \mathbf{G}\mathbf{R}_{,xx}^s - \mathbf{C}\mathbf{R}_{,t}^s \quad . \quad (62)$$

将  $\mathbf{R}^s$  代入其相对应的边界条件, 可以得到关于  $\mathbf{R}^d$  的边界条件为

$$\mathbf{R}^d(0,t) = 0, \quad \mathbf{R}^d(h,t) = 0 \quad . \quad (63)$$

对应的  $\mathbf{R}^d$  的初始条件为

$$\mathbf{R}^d(x,0) = \begin{cases} p_0(x) \\ T_0(x) \end{cases} - \mathbf{R}^s(x,0) \quad . \quad (64)$$

### 3.2 A类非齐次边界条件下方程的解

以 A 类边界条件为例, 其对应的齐次问题的特征函数已经获得, 利用系数变易法, 假设解  $\mathbf{R}^d$  的形式为

$$\mathbf{R}^d = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{cases} A_k(t) \\ B_k(t) \end{cases} \sin\left(\frac{k\pi}{h}x\right) \quad . \quad (65)$$

将式(65)代入控制方程(61), 然后在等式两边同时左乘  $\sin(\omega_k x)$ ,  $\omega = i\pi/h$ , 并关于  $x$  从 0 到  $h$  积分, 最后运用三角函数的正交性, 可得

$$\begin{cases} A_{k,t}(t) \\ B_{k,t}(t) \end{cases} = \omega_k^2 \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G} \begin{cases} A_k(t) \\ B_k(t) \end{cases} + \frac{2}{h} \int_0^h \mathbf{C}^{-1} \mathbf{M} \sin\left(\frac{k\pi}{h}x\right) dx \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad . \quad (66)$$

式(66)微分方程可以写为

$$\mathbf{Z}_{k,t} = \mathbf{N}_k \mathbf{Z}_k + \mathbf{H}_k \quad , \quad (67)$$

式中,

$$\mathbf{Z}_k = \begin{cases} A_k(t) \\ B_k(t) \end{cases}, \quad \mathbf{N}_k = \omega_k^2 \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G} \quad , \quad (68)$$

$$\mathbf{H}_k = \frac{2}{h} \int_0^h \mathbf{C}^{-1} \mathbf{M} \sin\left(\frac{k\pi}{h}x\right) dx \quad . \quad (69)$$

式(67)方程的解可写为

$$\mathbf{Z}_k = e^{N_k t} \mathbf{Z}_k(0) + e^{N_k t} \int_0^t e^{-N_k \xi} \mathbf{H}_k(\xi) d\xi \quad . \quad (70)$$

将式(65)代入初始条件(64), 可得

$$\mathbf{Z}_k(0) = \frac{2}{h} \int_0^h \mathbf{R}^d(x,0) \sin\left(\frac{k\pi}{h}x\right) dx \quad . \quad (71)$$

根据 Hamilton-Cayley 定理, 式(70)中

$$e^{N_k t} = \alpha_0(t) \mathbf{I} + \alpha_1(t) \mathbf{N}_k \quad , \quad (72)$$

式中,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵,

$$\alpha_0(t) = \frac{r_1 e^{r_2 t} - r_2 e^{r_1 t}}{r_1 - r_2}, \quad \alpha_1(t) = \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{r_1 - r_2} \quad , \quad (73)$$

式中,  $r_1$  和  $r_2$  为矩阵  $\mathbf{N}_k$  的特征值。

特别指出, 当  $r_1 = r_2$  时,

$$\alpha_0(t) = (1 - r_1 t) e^{r_1 t}, \quad \alpha_1(t) = t e^{r_1 t} \quad . \quad (74)$$

由式(70)求出  $Z_k$  后, 代入式(65), 再加式(58)

即可得到原非齐次方程、A类边界条件及初始条件下温度和超静孔压精确解, 最后将温度和超静孔压的解代入式(4)得到应变解, 沿深度积分即可得土体位移解。

### 3.3 B类边界条件下方程的解

由 A 类边界条件  $\mathbf{R}^d$  的求解过程, 得到 B类边界条件的  $\mathbf{R}^d$  解为

$$\mathbf{R}^d = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{Z}_k \sin(\omega_k x) \quad , \quad (75)$$

$$\mathbf{Z}_k = e^{N_k t} \mathbf{Z}_k(0) + e^{N_k t} \int_0^t e^{-N_k \xi} \mathbf{H}_k(\xi) d\xi \quad , \quad (76)$$

$$\omega_k = (2k-1)\pi/(2h) \quad , \quad (77)$$

$$\mathbf{H}_k = \frac{2}{h} \int_0^h \mathbf{C}^{-1} \mathbf{M} \sin(\omega_k x) dx \quad , \quad (78)$$

$$\mathbf{Z}_k(0) = \frac{2}{h} \int_0^h \mathbf{R}^d(x,0) \sin(\omega_k x) dx \quad . \quad (79)$$

由式(75), (59)可得 B类边界条件下土体的温度和超静孔压精确解, 最后将温度和超静孔压的解代入式(4)得到应变解, 沿深度积分即可得土体位移解。

### 3.4 C类边界条件下方程的解

由 A 类边界条件  $\mathbf{R}^d$  的求解过程, 得到 C类边界条件的  $\mathbf{R}^d$  解为

$$\mathbf{R}^d = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{Z}_k \cos(\omega_k x) \quad , \quad (80)$$

$$\mathbf{Z}_k = e^{N_k t} \mathbf{Z}_k(0) + e^{N_k t} \int_0^t e^{-N_k \xi} \mathbf{H}_k(\xi) d\xi \quad , \quad (81)$$

$$\omega_k = k\pi/h \quad , \quad (82)$$

$$\mathbf{H}_k = \begin{cases} \frac{1}{h} \int_0^h \mathbf{C}^{-1} \mathbf{M} \cos(\omega_k x) dx & (k=0) \\ \frac{2}{h} \int_0^h \mathbf{C}^{-1} \mathbf{M} \cos(\omega_k x) dx & (k>0) \end{cases} \quad , \quad (83)$$

$$\mathbf{Z}_k(0) = \begin{cases} \frac{1}{h} \int_0^h \mathbf{R}^d(x,0) \cos(\omega_k x) dx & (k=0) \\ \frac{2}{h} \int_0^h \mathbf{R}^d(x,0) \cos(\omega_k x) dx & (k>0) \end{cases} \quad . \quad (84)$$

由式(80), (60)可得 C类边界条件下土体的温度和超静孔压精确解, 最后将温度和超静孔压的解代入式(4)得到应变解, 沿深度积分即可得土体位移解。

## 4 热固结特性分析

### 4.1 计算参数

饱和单层土一维热固结计算示意图如图 1, 取土层厚度  $h=10$  m, 外荷载  $q(t)=0$ , 土体初始超静孔压  $p_0=0$ , 初始温度  $T_0=300$  K。参考白冰研究成果<sup>[11-12]</sup>, 土体的热-水-力基本参数取值分别取为: 土体孔隙率  $n=0.4$ , 土体的弹性模量  $E=3$  MPa, 泊松比  $\nu=0.45$ , 土颗粒的密度, 比热容和热膨胀系数分别为 2500

$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $1200 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ,  $2.5\times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , 孔隙流体的密度, 比热容和热膨胀系数分别为  $1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $4200 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ,  $2\times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ 。土体热传导系数为  $K=1 \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ , 渗透系数为  $k_0=1\times 10^{-10} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 。

#### 4.2 最大超静孔压值

引入最大超静孔压值  $p_{\max}$ , 其定义为饱和单层土体上下表面均不排水条件下, 土体只由于温度升高所产生的超静孔压最大值, 由式(5)可得

$$p_{\max} = \left( \alpha_u - \frac{\beta}{E_s} \right) E_s T_{\max} , \quad (85)$$

式中,  $T_{\max}$  为土体温度增长最大值。

#### 4.3 一维热固结分析

##### (1) 渗透系数

饱和单层土体温度传导过程常与渗流同时发生, 为分析渗流场对温度场的影响, 将不同渗透系数时土体温度场的解与无渗流的热传导方程解进行对比。假设饱和单层土体边界条件为

$$T(0,t)=50, \quad T_x(h,t)=0 , \quad (86)$$

$$p(0,t)=0, \quad p_x(h,t)=0 . \quad (87)$$

土体深度  $0.1h$  处温度计算结果如图 2 所示。由图 2 可知, 不考虑流体对流时, 与无渗流的热传导相比, 土体渗透系数越大, 土体渗流特性越好, 温度增长越快。原因是土体受热膨胀后, 超静孔压消散, 孔隙流体流出, 使单位土体升高单位温度所需热量降低, 温度增长变快; 当土体渗透系数越大时, 孔隙流体渗流流量越大, 单位土体升高单位温度所需热量更低, 温度增长更快。但总体来看, 当不考虑流体对流作用, 渗流对温度传导影响很小, 工程中可忽略不计。

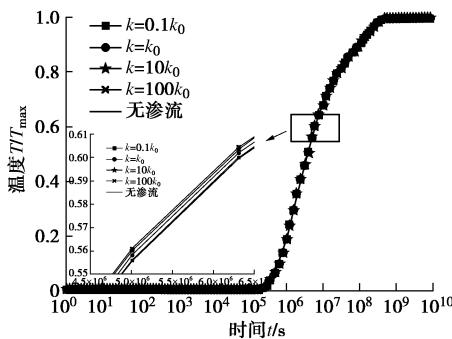


图 2 不同渗透系数土体  $0.1h$  深度处时间 - 温度曲线

Fig. 2 Temperature-time curves at depth of  $0.1h$  with different permeability coefficients

##### (2) 边界条件

饱和单层土体上下边界的排水条件决定土体的排水路径, 影响超静孔压的大小和空间分布, 对热固结特性影响大, 因此采用如下两种工况进行分析。

工况 1:

$$T(0,t)=50, \quad T_x(h,t)=0 , \quad (88)$$

$$p(0,t)=0, \quad p_x(h,t)=0 . \quad (89)$$

工况 2:

$$T(0,t)=50, \quad T(h,t)=50 , \quad (90)$$

$$p(0,t)=0, \quad p(h,t)=0 . \quad (91)$$

图 3~5 给出了工况 1 条件下, 土体温度和超静孔压随时间或深度的分布。图 3 表明, 在土体上表面作用突增温度后, 温度从土层上表面向深处传导, 最终, 温度沿土层均匀分布。由图 4, 5 可知, 由于温度从上向下传导, 越靠近上表面, 土体超静孔压产生时间和到达峰值时间越早。当深度不大于  $0.3h$  时, 土体超静孔压峰值大致相同, 且在孔压消散过程中, 出现小幅回升; 当深度超过  $0.5h$  后, 土体超静孔压峰值随深度增加而增加, 超静孔压峰值的最大值出现在深度  $h$  处, 约为  $0.691p_{\max}$ , 比  $0.1h$  深处超静孔压峰值  $0.365p_{\max}$  高约 89.3%。原因是土体上表面为透水界面, 下表面为不透水界面; 由于温度上升引起的超静孔压一部分向透水界面消散, 一部分向不透水界面传递, 超静孔压到达不透水界面后, 又反向向透水界面消散; 对深度不大于  $0.3h$  处土体, 后期温度增长很慢, 超静孔压消散速度大于产生速度, 超静孔压不断下降, 但在不透水界面传来的超静孔压的叠加下, 在消散过程中孔压出现了小幅度的回升; 而对于深度大于  $0.5h$  处土体, 温度上升引起的超静孔压大于消散的超静孔压, 再叠加不透水界面传来的的超静孔压, 使得越靠近不透水界面处, 超静孔压峰值越大。

图 6~8 给出了工况 2 条件下, 土体温度和超静孔压随时间或深度的分布。图 6 表明, 在上下表面同时作用突增温度后, 温度从土层两侧表面向中间传导, 土体温度关于深度  $0.5h$  处对称分布, 深度  $0.5h$  处温度增长最慢, 最终, 温度沿土层均匀分布。如图 7 和图 8 所示, 由于温度从土层两侧向中间传导, 越靠近中间, 土体超静孔压出现时间和达到峰值时间越晚, 同样超静孔压关于  $0.5h$  深度处对称分布。当深度不大于  $0.2h$  时, 土体超静孔压峰值大致相同, 也在孔压消散过程中出现小幅回升; 超静孔压峰值最大值出现在深度  $0.5h$  处, 约为  $0.691p_{\max}$ , 比  $0.1h$  深处超静孔压峰值  $0.365p_{\max}$  高约 89.3%。原因是土体由于温度上升产生的超静孔压分别向上下透水表面消散, 向下表面消散的超静孔压与土层深处温度上升产生的超静孔压叠加, 使得靠近下透水表面处, 土体超静孔压消散过程中出现小幅回升, 越靠近土层中间处, 土体超静孔压越高。土层浅处土体超静孔压变化原因与土层深处相同。

对比工况 1 和工况 2 的计算结果, 可以发现两种工况土层浅处的土体超静孔压峰值大致相同, 原因是土层浅处温度增长产生的超静孔压向两侧消散, 未受到下表面边界条件的影响。同时, 土体超静孔压峰值最大值大致相同, 分别位于深度  $h$  和  $0.5h$  处, 原因是工况 2 条件下, 土层上下表面温度对称施加, 土体深度  $0.5h$  处为对称面, 类似工况 1 中深度  $h$  处的不透水绝热面。

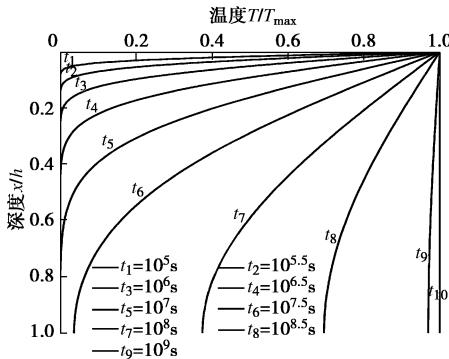


图 3 工况 1 不同时刻温度 - 深度曲线

Fig. 3 Temperature-depth curves at different moments under first condition

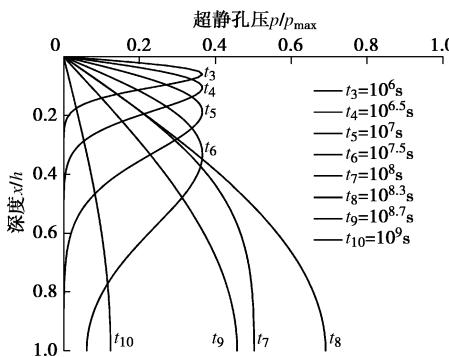


图 4 工况 1 不同时刻超静孔压 - 深度曲线

Fig. 4 Excess pore pressure-depth curves at different moments under first condition

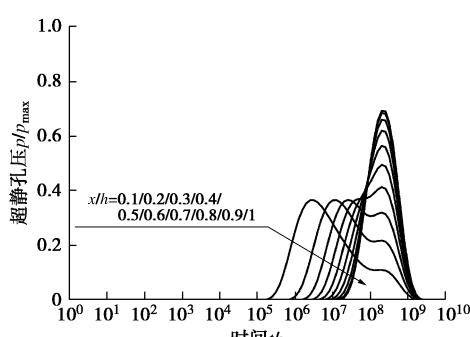


图 5 工况 1 不同深度超静孔压 - 时间曲线

Fig. 5 Excess pore pressure-time curves at different depths under first condition

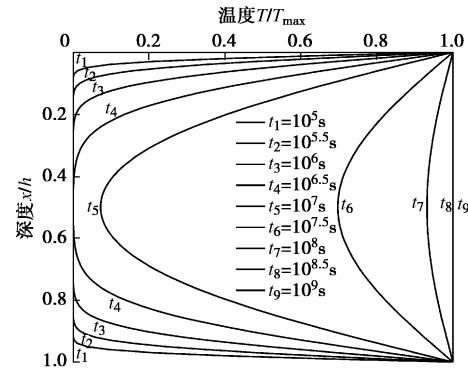


图 6 工况 2 不同时刻温度 - 深度曲线

Fig. 6 Temperature-depth curves at different moments under second condition

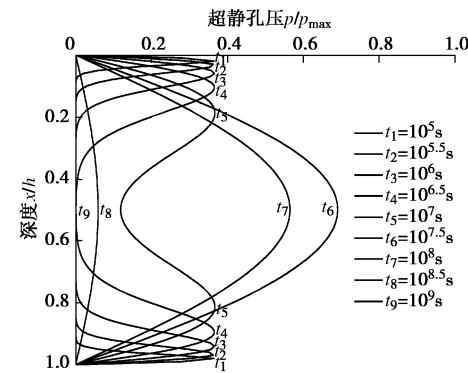


图 7 工况 2 不同时刻超静孔压 - 深度曲线

Fig. 7 Excess pore pressure-depth curves at different moments under second condition

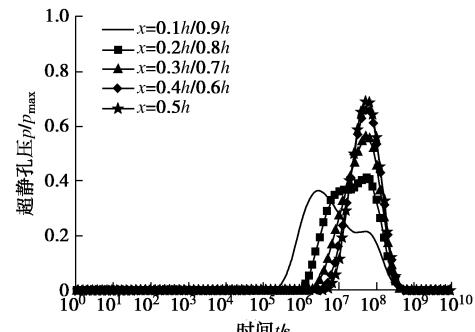


图 8 工况 2 不同深度超静孔压 - 时间曲线

Fig. 8 Excess pore pressure-time curves at different depths under second condition

### (3) 边界温度作用形式

边界处的温度作用形式影响土体温度变化规律, 进而改变超静孔压的响应。为分析不同温度变化对超静孔压的影响, 取边界条件为

$$p(0,t) = 0, \quad p_x(h,t) = 0, \quad T_x(h,t) = 0 \quad (92)$$

上表面作用 3 种不同温度形式:

突增温度

$$T(0,t) = 50 \text{ K} \quad ; \quad (93)$$

指数变化温度

$$T(0,t) = 50(1 - e^{-t/a}) \text{ K} ; \quad (94)$$

正弦变化温度

$$T(0,t) = 50 \sin(2t/10^8) \text{ K} . \quad (95)$$

图 9, 10 给出了饱和单层土体上表面分别作用突增温度和指数增长温度时, 土体 0.1h 深度处温度和超静孔压随时间的变化。当表面温度快速指数增长时 ( $a=10^2$ ), 仅 480 s 后, 可达最大温度的 99%。从图 9 和图 10 可知, 当  $a=10^2$  时, 土体内部的温度响应与表面温度突增情况几乎相同, 土体超静孔压变化相差很小; 当表面温度增长速度越慢时, 土体内部温度增长也越慢, 超静孔压消散更多, 超静孔压出现时间更晚, 超静孔压峰值也更小。最大孔压峰值  $0.365p_{\max}$  ( $a=10^2$ ) 比最小孔压峰值  $0.222p_{\max}$  ( $a=10^7$ ) 高约 64.5%。

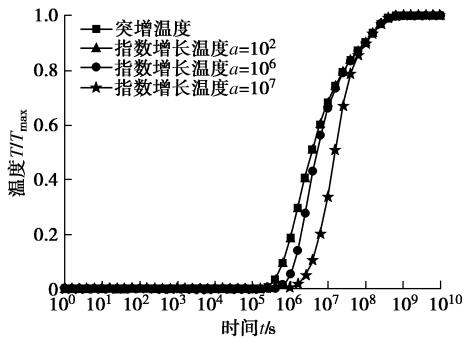


图 9 上表面温度突增与指数增长土体温度 - 时间曲线

Fig. 9 Temperature-time curves with step loading and exponential loading on top surface

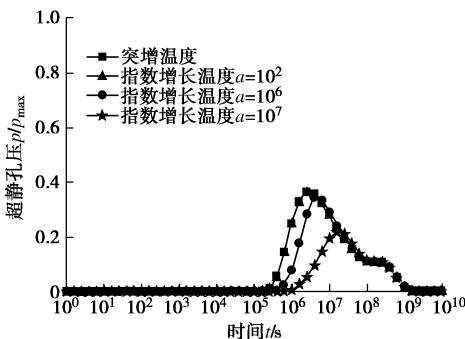


图 10 上表面温度突增与指数增长土体超静孔压 - 时间曲线

Fig. 10 Excess pore pressure-time curves with step loading and exponential loading on top surface

图 11 与图 12 给出了土体上表面作用正弦变化温度时, 土层深度 0.1h 处土体温度和超静孔压随时间的变化。温度正弦变化周期约为 1 a, 温度由上表面向下传递, 当  $t < 10^6$  s 时, 土体温度增量和超静孔压均为 0。当  $t > 10^6$  s 时, 温度波传递到 0.1h 处, 温度从初始温度  $T_0$  逐渐上升, 并呈现周期性波动, 最终向稳态正弦变化转变。其稳态周期与表面温度波动周期相同, 幅

值略低于表面温度波动幅值, 约为  $0.82T_{\max}$ 。受 0.1h 深度处温度稳态波动的影响, 超静孔压最终也呈现稳态周期性波动, 周期与温度波动周期相同, 幅值约为  $0.18p_{\max}$ , 比上表面作用突增温度时 0.1h 深度处超静孔压最大值  $0.365p_{\max}$  小 50.7%。

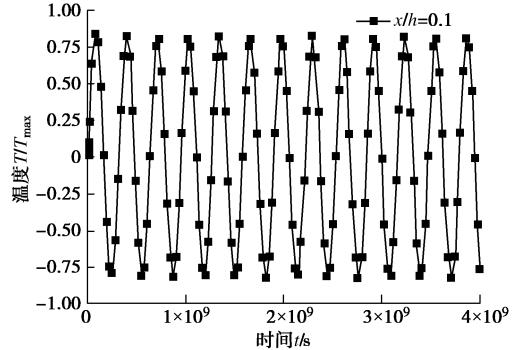


图 11 上表面温度正弦变化土体温度 - 时间曲线

Fig. 11 Temperature-time curves with sine loading on top surface

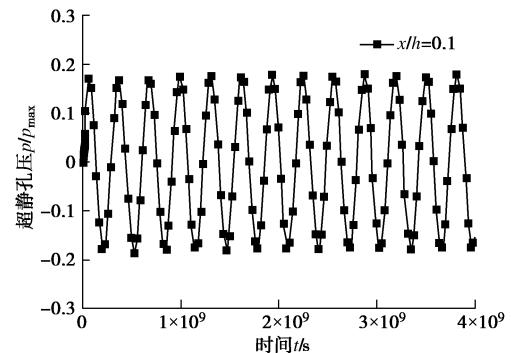


图 12 上表面温度正弦变化土体超静孔压 - 时间曲线

Fig. 12 Excess pore pressure-time curves with sine loading on top surface

## 5 结 论

(1) 本文基于变量代换和分离变量法, 求解了 3 类齐次边界条件下微分方程特征函数, 通过系数变易法, 提出了 3 类任意非齐次边界条件下, 饱和单层土体一维热固结精确解求解方法。

(2) 不考虑对流, 因超静孔压产生的渗流, 对温度传导的影响很小, 工程中可以忽略不计。

(3) 土体中超静孔压最大值通常出现在离排水界面最远处, 其值大小与土体温度增长快慢和温度幅值密切相关。

(4) 土体表面温度作用形式影响内部温度变化, 从而改变超静孔压响应。当饱和单层土, 只有上表面透水升温时, 表面温度增长越慢, 土体内部温度增长越慢, 超静孔压的峰值越低。当表面温度正弦变化时, 土体内部温度和超静孔压也会出现正弦波动, 其周期与表面温度波动周期相同。

## 参考文献:

- [1] BIOT M A. General theory of three-dimensional consolidation[J]. Journal of Applied Physics, 1941, **12**(2): 155 - 164.
- [2] BIOT M A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics[J]. Journal of Applied Physics, 1956, **27**(3): 240 - 253.
- [3] BOOKER J R, SAVVIDOU C. Consolidation around a point heat source[J]. International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics, 1985, **9**(2): 173 - 184.
- [4] SMITH D W, BOOKER J R. Boundary element analysis of linear thermoelastic consolidation[J]. International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics, 1996, **20**(7): 457 - 488.
- [5] ZHOU Y, RAJAPAKSE R K N D, GRAHAM J. A coupled thermoporoelastic model with thermo-osmosis and thermal-filtration[J]. International Journal of Solids & Structures, 1998, **35**(34/35): 4659 - 4683.
- [6] BOOKER J R, SAVVIDOU C. Consolidation around a spherical heat source[J]. International Journal of Solids & Structures, 1984, **20**(11/12): 1079 - 1090.
- [7] MCTIGUE D F. Thermoelastic response of fluid-saturated porous rock[J]. Journal of Geophysical Research, 1986, **91**(B9): 9533 - 9542.
- [8] GIRAUD A, ROUSSET G. Thermoelastic and thermoplastic response of a porous space submitted to a decaying heat source[J]. International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics, 2010, **19**(7): 475 - 495.
- [9] BLOND E, SCHMITT N, FRANÇOIS H. Response of saturated porous media to cyclic thermal loading[J]. International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics, 2010, **27**(11): 883 - 904.
- [10] BAI M, ABOUSLEIMAN Y. Thermoporoelastic coupling with application to consolidation[J]. International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics, 1997, **21**(2): 121 - 132.
- [11] 白冰. 岩土颗粒介质非等温一维热固结特性研究[J]. 工程力学, 2005, **22**(5): 186 - 191. (BAI Bai. One-dimensional thermal consolidation characteristics of geotechnical media under non-isothermal condition[J]. Engineering Mechanics, 2005, **22**(5): 186 - 191. (in Chinese))
- [12] BAI B. Fluctuation responses of saturated porous media subjected to cyclic thermal loading[J]. Computers & Geotechnics, 2006, **33**(8): 396 - 403.
- [13] 白冰. 循环温度荷载作用下饱和多孔介质热-水-力耦合响应[J]. 工程力学, 2007, **24**(5): 87 - 92. (BAI Bai. Thermo-Hydro-Mechanical responses of saturated porous media under cyclic thermal loading[J]. Engineering Mechanics, 2007, **24**(5): 87 - 92. (in Chinese))
- [14] BAI B. Thermal consolidation of layered porous half-space to variable thermal loading[J]. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), 2006, **11**(27): 1531 - 1539.
- [15] 王路君, 艾智勇. 衰变热源作用下饱和多孔介质热固结问题的扩展精细积分法[J]. 力学学报, 2017, **49**(2): 324 - 334. (WANG Lu-jun, AI Zhi-yong. Epim for thermal consolidation problems of saturated porous media subjected to a decaying heat source[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2017, **49**(2): 324 - 334. (in Chinese))
- [16] SMITH D W. Boundary element analysis of heat flow and consolidation for geotechnical applications[D]. Sydney: University of Sydney, 1990.