

DOI: 10.11779/CJGE201909001

管片衬砌梁-弹簧广义模型及接头转动非线性模拟

朱合华^{1, 2, 3}, 周 龙³, 朱建文^{1, 3, 4}

(1. 同济大学土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092; 2. 同济大学隧道及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092; 3. 同济大学土木工程学院地下建筑与工程系, 上海 200092; 4. 加州大学洛杉矶分校土木与环境工程系, 美国 加利福尼亚 90095)

摘 要: 梁-弹簧模型法在盾构管片衬砌设计计算中逐渐得到广泛应用, 但现有的梁-弹簧模型无法模拟盾构衬砌管片接头的不连续变形及接头转动刚度的非线性特性。基于此, 开展了梁-弹簧模型在衬砌设计中的适用性及非线性接头转动刚度在梁-弹簧模型中的应用研究。研究表明: 根据对相邻管片在接头位置结点位移处理的不同, 可将梁-弹簧模型分为梁-弹簧连续模型和梁-弹簧不连续模型, 后者又称为梁-接头模型, 可准确分析盾构管片衬砌的内力及变形。采用梁-弹簧不连续模型求解衬砌内力及变形时: 对于线性接头转动刚度模型, 可基于卡氏第二定理求解; 对于多段线性模型, 可基于卡氏第一定理或克-恩定理求解; 对于非线性模型, 可采用增量-迭代法数值求解。

关键词: 管片衬砌; 梁-弹簧广义模型; 梁-接头模型; 非线性; 转动刚度

中图分类号: TU441

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2019)09-1581-10

作者简介: 朱合华(1962—), 男, 安徽巢湖人, 工学博士, 教授, 主要从事隧道及地下建筑工程领域的教学和科研工作。E-mail: zhuhehua@tongji.edu.cn。

Beam-spring generalized model for segmental lining and simulation of its nonlinear rotation

ZHU He-hua^{1, 2, 3}, ZHOU Long³, JU Jiann-wen^{1, 3, 4}

(1. State Key Laboratory for Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China; 3. Department of Geotechnical Engineering, College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 4. Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Los Angeles, CA 90095, USA)

Abstract: The beam-spring model method has been widely used in the design and calculation of shield tunnel lining, but the existing beam-spring models cannot simulate the discontinuous deformation of the segmental joints and the nonlinear characteristics of the joint rotational stiffness. Therefore, the applicability of the beam-spring models in the design of shield lining and the application of nonlinear joint rotational stiffness in the beam-spring models are studied. The results show that according to the different disposal of the nodal displacement at the joint positions between the adjacent segments, the beam-spring models can be divided into the beam-spring continuous model and the beam-spring discontinuous model, and the latter is also called the beam-joint model, in which the internal force and deformation of the shield lining can be accurately analyzed. When the beam-spring discontinuous model is employed to calculate the internal force and deformation of shield lining structures, the Second Castigliano's Theorem can be used for the segmental joints with linear rotational stiffness model, the First Castigliano's Theorem or Crotti-Engesser's Theorem can be used for the segmental joints with multi-linear stiffness model, and the numerical solution based on the increment iteration method can be used for the segmental joints with nonlinear stiffness model.

Key words: segmental lining; beam-spring generalized model; beam-joint model; nonlinearity; rotation stiffness

0 引 言

盾构隧道管片衬砌的设计计算多采用荷载-结构法。荷载-结构法将周围地层对盾构隧道的作用考虑为施加在衬砌上的荷载和弹性约束, 目前常用的有修正惯用法、梁-弹簧模型法、梁-接头模型法等多种方法。

相比较于修正惯用法, 梁-弹簧模型法、梁-接头模型法分别采用弹簧刚度和接头单元刚度模拟管片接头的

基金项目: 国家自然科学基金项目(51578410); 土木工程防灾国家重点实验室自主课题(SLDRCE14-A-09)

收稿日期: 2018-08-05

力学行为,更加符合盾构管片衬砌的实际状态。梁-弹簧模型法最初由日本学者提出^[1],但该方法建立在卡氏第二定理及接头连续变形的的基础上,无法模拟管片接头的不连续变形及接头转动刚度的非线性性状^[2]。针对梁-弹簧模型法的缺陷,朱合华等^[2]基于有限元法 Goodman 单元思想提出了梁-接头模型法,与梁-弹簧模型法相比,梁-接头模型法可以模拟管片接头的不连续变形及接头转动刚度的非线性特性。

由于管片接头是衬砌的薄弱环节,其力学性能对于管片衬砌的受力及变形有较大影响。因此,管片接头力学性能的描述及力学参数的选取决定了梁-弹簧模型法、梁-接头模型法计算的精确度。国内外众多学者基于理论解析、接头试验及数值模拟给出了管片接头转动刚度的取值方法和相应的力学模型^[3-8]。朱合华等^[9]基于管片接头试验结果,归纳了适用于描述接头转动刚度的力学模型,包括线性、双线性及非线性模型。此外,日本学者还提出了三线性转动刚度模型^[10]。针对不同类型的接头转动刚度模型(线性、双线性、三线性及非线性模型),采用梁-弹簧模型法或梁-接头模型法计算时对接头转动刚度参数的选取有多种方法。线性转动刚度模型的接头转动刚度取为常数,而对于双线性、三线性及非线性转动刚度模型,有在计算中将接头抗弯刚度取为常数^[11],也有基于增量法或增量-迭代法进行求解的^[2,12]。

早期日本学者提出的梁-弹簧模型法的应用日益增多,但梁-弹簧模型法无法模拟管片接头的不连续变形及接头转动刚度的非线性特性,其适用性还有待进一步探讨。基于此,本文首先提出梁-弹簧广义模型,分析梁-弹簧模型法计算管片衬砌内力及变形的适用性;并在文献[9]的基础上,进一步讨论线性、双线性、三线性及非线性接头转动刚度的模拟问题。

1 梁-弹簧广义模型

在管片衬砌设计计算中,常将管片用梁模拟、而管片间的接头(管片间纵、横向接头)用弹簧模拟。传统的梁-弹簧模型将管片接头处理为变形连续的单结点,亦称梁-弹簧连续模型;但若将接头设置为变形不连续的双结点,此时称其为梁-弹簧不连续模型。以下统称梁-弹簧连续模型和梁-弹簧不连续模型为梁-弹簧广义模型。

1.1 梁-弹簧连续模型

文献[1]和[13]中提出了梁-弹簧模型法,该模型基于卡氏第二定理分别给出了直梁-弹簧单元和曲梁-弹簧单元结点力与结点位移之间的关系式。管片采用梁单元模拟,而接头采用变形连续的弹簧模拟,即在计

算中认为相邻管片在接头位置的结点位移相同,因此将其称为梁-弹簧连续模型法,如图1所示。梁-弹簧连续模型法只能模拟接头刚度的线性特性,其轴向、切向和转动弹簧刚度分别为 k_n 、 k_s 和 k_θ ,如图2所示。

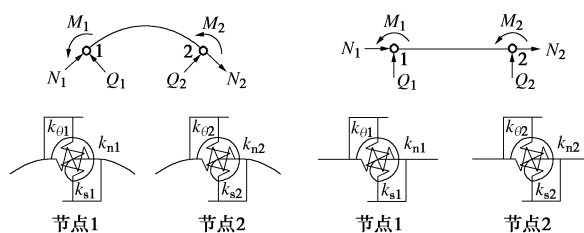


图1 梁-弹簧连续模型

Fig. 1 Beam-spring continuous model

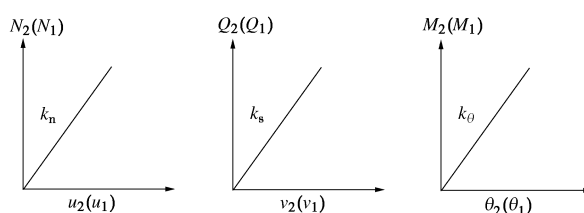


图2 梁-弹簧连续模型接头刚度

Fig. 2 Joint stiffness for beam-spring continuous model

以直梁弹簧单元为例,结点力与结点位移的关系式为

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

$$[k_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_1}{g_1} & -\frac{d_1}{g_1} \\ 0 & -\frac{d_1}{g_1} & \frac{b_1}{g_1} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$[k_{22}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_2}{g_2} & -\frac{d_2}{g_2} \\ 0 & -\frac{d_2}{g_2} & \frac{b_2}{g_2} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} [k_{21}] = [A] \cdot [k_{11}], \\ [k_{12}] = [A]^{-1} \cdot [k_{22}], \end{Bmatrix} \quad (4)$$

式中, F_1 、 F_2 分别为结点1和结点2的结点力:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 & Q_1 & M_1 \\ N_2 & Q_2 & M_2 \end{Bmatrix}^T, \quad (5)$$

δ_1 、 δ_2 分别为结点1和结点2的结点位移:

$$\begin{cases} [\delta_1] = \{u_1 \quad v_1 \quad \theta_1\}^T, \\ [\delta_2] = \{u_2 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T, \end{cases} \quad (6)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & l & -1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{l}{EA} + \frac{1}{k_{n1}} + \frac{1}{k_{n2}}, \\ b_1 &= \frac{l^3}{3EI} + \frac{1}{k_{s1}} + \frac{1}{k_{s2}} + \frac{l^2}{k_{\theta 2}}, \\ c_1 &= \frac{l}{EI} + \frac{1}{k_{\theta 1}} + \frac{1}{k_{\theta 2}}, \\ d_1 &= -\frac{l^2}{2EI} - \frac{l}{k_{\theta 2}}, \\ g_1 &= b_1 \cdot c_1 - d_1^2, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= a_1, \\ b_2 &= \frac{l^3}{3EI} + \frac{1}{k_{s1}} + \frac{1}{k_{s2}} + \frac{l^2}{k_{\theta 1}}, \\ c_2 &= c_1, \\ d_2 &= \frac{l^2}{2EI} + \frac{l}{k_{\theta 1}}, \\ g_2 &= b_2 \cdot c_2 - d_2^2 = g_1, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中, E 为梁的弹性模量, A 为梁的截面积, I 为惯性矩, l 为梁单元长度。

图3为平板接头在竖向集中荷载 F 作用下的计算模型, 左端为固定铰支座, 右端为滑动铰支座, 采用该模型分析梁-弹簧连续模型的计算误差。

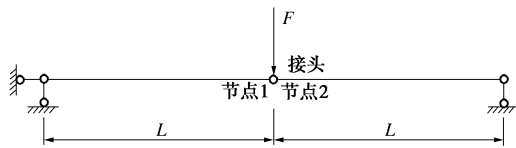


图3 平板接头计算模型

Fig. 3 Computational model for straight segmental joint

忽略接头的轴向刚度 k_n 和切向刚度 k_s , 只考虑接头的转动刚度 k_θ 。图3中平板接头在竖向集中荷载 F 作用下的接头挠度和转角理论解为

$$v_j = \frac{FL^3}{6EI} + \frac{FL^2}{4k_\theta}, \quad (10)$$

$$\theta_j = \frac{FL}{4k_\theta}. \quad (11)$$

具体的计算参数: $E=35 \text{ GPa}$, $A=0.48 \text{ m}^2$, $I=0.009216 \text{ m}^4$, $L=1.5 \text{ m}$, $k_\theta=500000 \text{ kN}\cdot\text{m/rad}$, $F=500 \text{ kN}$ 。表1为梁-弹簧连续模型的数值解与式(10)和式(11)中理论解的计算结果。

由表1可知, 当接头转动刚度为 $500000 \text{ kN}\cdot\text{m/rad}$

时, 梁-弹簧连续模型的数值解与理论解间存在较大误差, 接头处竖向位移与理论解相差约40%, 且计算的接头转角为0, 不能模拟接头张开转动的非连续性。选取不同的接头转动刚度 k_θ , 其他计算参数不变时, 梁-弹簧连续模型计算的接头挠度与理论解间的误差如图4所示。

表1 梁-弹簧连续模型与理论解计算对比

Table 1 Comparison between beam-spring continuous model and theoretical solution

模型	v_j / cm	θ_{j1} / rad	θ_{j2} / rad	$\Delta\theta_j / \text{rad}$
梁-弹簧连续模型	0.1996931	0	0	0
理论解	0.1434431	-0.001247	0.001247	0.002494

注: 表1中 $\Delta\theta_j = \theta_{j2} - \theta_{j1}$ 。

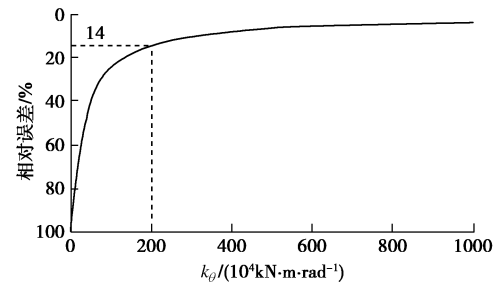


图4 梁-弹簧连续模型法与理论解间的误差

Fig. 4 Errors between beam-spring continuous model and theoretical solution

由图4可知: 当接头转动刚度 k_θ 较小时, 采用梁-弹簧连续模型法计算接头处挠度误差较大; 随着转动刚度 k_θ 增大, 梁-弹簧连续模型法计算的接头处挠度与理论解逐渐接近。主要原因是随着接头转动刚度增大, 接头的属性越接近于刚结点, 刚结点处的变形和内力连续, 因此误差会逐渐减小。对于盾构隧道而言, 一般管片接头转动刚度小于 $200 \times 10^4 \text{ kN}\cdot\text{m/rad}^{[10]}$, 因此采用梁-弹簧连续模型法计算盾构管片衬砌内力和变形将会带来14%以上的误差。

1.2 梁-弹簧不连续模型

梁-弹簧不连续模型同样将管片以直梁或曲梁单元模拟。以直梁弹簧单元为例, 梁单元结点力与结点位移的关系式如下:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} \\ k'_{21} & k'_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

$$[k'_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$[k'_{22}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$[k'_{12}] = [k'_{21}]^T = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

管片在接头处采用变形非连续的弹簧模拟, 即在计算中认为相邻管片在接头位置的结点位移不同, 因此将此法称为梁-弹簧不连续模型法, 如图 5 所示。连接结点 1 和结点 2 的轴向、切向和转动弹簧刚度分别为 k_n , k_s 和 k_θ , 如图 6 所示。

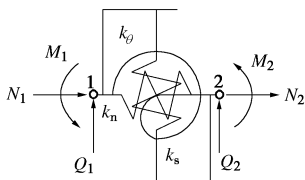


图 5 梁-弹簧不连续模型接头刚度

Fig. 5 Joint stiffness for beam-spring discontinuous model

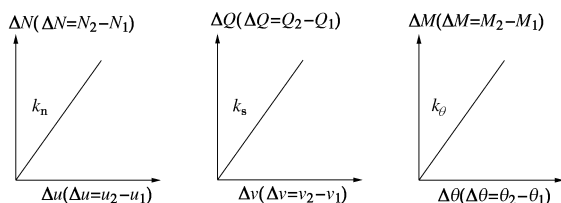


图 6 轴向、切向和转动弹簧刚度模型

Fig. 6 Stiffness models for axial, tangential and rotational springs

假定结点 2 固定, 结点 1 处的荷载为轴力 N_1 、剪力 Q_1 和弯矩 M_1 , 此时弹簧系统为线弹性, 应变余能与应变能相等, 即

$$U_{\text{应变余能}} = U_{\text{应变能}} = \frac{1}{2} \frac{N_1^2}{k_n} + \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{k_s} + \frac{1}{2} \frac{M_1^2}{k_\theta}. \quad (16)$$

根据卡氏第二定理可得

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial U_{\text{应变余能}}}{\partial N_1} = \frac{N_1}{k_n}, \\ v_1 &= \frac{\partial U_{\text{应变余能}}}{\partial Q_1} = \frac{Q_1}{k_s}, \\ \theta_1 &= \frac{\partial U_{\text{应变余能}}}{\partial M_1} = \frac{M_1}{k_\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

结点 1 的结点力与结点位移之间的关系为

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & & \\ & k_s & \\ & & k_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

根据静力平衡关系, 可得结点 2 的结点力为

$$\begin{Bmatrix} N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_n & & \\ & -k_s & \\ & & -k_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix}. \quad (19)$$

同理, 假定结点 1 固定, 结点 2 处的荷载为轴力 N_2 、剪力 Q_2 和弯矩 M_2 , 根据卡氏第二定理, 可得结点 2 的结点力与结点位移的关系式为

$$\begin{Bmatrix} N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & & \\ & k_s & \\ & & k_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}. \quad (20)$$

根据静力平衡关系, 可得结点 1 的结点力为

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_n & & \\ & -k_s & \\ & & -k_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}. \quad (21)$$

结合式 (18) 至式 (21) 可得弹簧单元结点力与结点位移的关系式:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & & & -k_n & & \\ & k_s & & & -k_s & \\ & & k_\theta & & & -k_\theta \\ -k_n & & & k_n & & \\ & -k_s & & & k_s & \\ & & -k_\theta & & & k_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

采用梁-弹簧不连续模型分析图 3 中的平板接头在竖向集中荷载 F 作用下的挠度和转角, 计算条件与表 1 中相同。梁-弹簧不连续模型的数值解与式 (10) 和式 (11) 理论解的计算结果对比见表 2。

表 2 梁-弹簧不连续模型与理论解计算对比

Table 2 Comparison between beam-spring discontinuous model and theoretical solution

模型	v_j / cm	θ_{j1} / rad	θ_{j2} / rad	$\Delta\theta_j / \text{rad}$
梁-弹簧不连续模型	0.1434431	-0.001247	0.001247	0.002494
理论解	0.1434431	-0.001247	0.001247	0.002494

由表 2 可知, 梁-弹簧不连续模型法可准确地分析接头处的竖向位移和转角, 能够模拟接头处的非连续变形。

采用梁-弹簧不连续模型分析盾构管片衬砌内力和变形, 计算参数如下: 盾构管片衬砌均分为 8 块, 内径 9 m, 管片厚度 0.6 m, 环宽 1 m, 接头转动刚度 $k_\theta = 500000 \text{ kN}\cdot\text{m/rad}$, 弹性模量 33 GPa, 地层反力采用局部地层弹簧模型, 受压弹簧刚度 $k_0 = 3600 \text{ kN/m}^3$,

受拉弹簧刚度为 0, 具体荷载见图 7。计算得到的衬砌内力与变形见图 8。

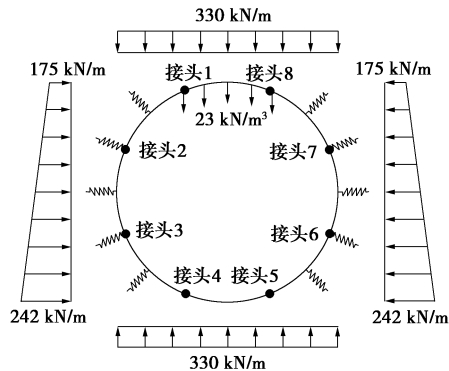


图 7 衬砌环荷载

Fig. 7 Loads on lining structures

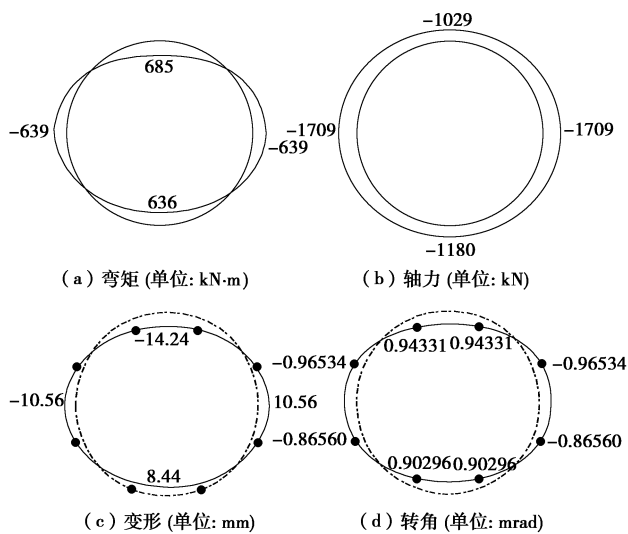


图 8 衬砌环内力与变形 (线性接头转动刚度模型)

Fig. 8 Internal forces and deformations of lining structures (Linear model for joint rotational stiffness)

由图 8 可知, 梁-弹簧不连续模型在计算盾构管片衬砌内力和变形的同时, 还能很好地模拟管片接头的不连续变形。

1.3 梁-接头模型

文献[2]中提出了梁-接头 (不连续) 模型法。梁-接头模型中, 盾构管片仍以直梁或曲梁单元模拟, 而接头采用接头单元模拟。接头单元与考虑转动的 Goodman 单元在二维空间的线接触单元或三维空间的面接触单元相类似。接头单元由双结点构成, 如图 9 所示。

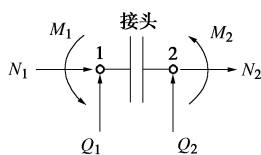


图 9 接头单元

Fig. 9 Joint elements

具体的接头单元内力与变形关系如下:

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta Q \\ \Delta M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & & \\ & k_s & \\ & & k_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta \theta \end{Bmatrix} \quad (23)$$

式中 ΔN , ΔQ , ΔM 分别为接头单元在局部坐标系中的轴向力、剪力和弯矩, $\Delta N = N_2 - N_1$, $\Delta Q = Q_2 - Q_1$, $\Delta M = M_2 - M_1$; $\Delta u = u_2 - u_1$, $\Delta v = v_2 - v_1$, $\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$ 。

局部坐标系中, 接头单元的刚度矩阵为

$$K = \begin{bmatrix} k_n & & & -k_n & & \\ & k_s & & & -k_s & \\ & & k_\theta & & & -k_\theta \\ -k_n & & & k_n & & \\ & -k_s & & & k_s & \\ & & -k_\theta & & & k_\theta \end{bmatrix} \quad (24)$$

对比式 (24) 和式 (22) 可知, 梁-接头模型和梁-弹簧不连续模型中, 接头结点力与结点位移的刚度矩阵相同, 即两种模型的本质相同。因此, 又可将梁-弹簧不连续模型称为梁-接头模型。

2 卡氏定理与克-恩定理^[14-15]

卡氏第一定理是关于应变能的偏导数定理, 可表述如下: 弹性体的应变能对于其上某一位移的变化率, 等于与该位移相应的荷载, 即

$$F_i = \frac{\partial U_{\text{应变能}}}{\partial \delta_i} \quad (25)$$

克-恩定理是关于应变余能的偏导数定理, 可表述如下: 弹性体的应变余能对于其上某一荷载的变化率, 等于与该荷载相应的位移, 即

$$\delta_i = \frac{\partial U_{\text{应变余能}}}{\partial F_i} \quad (26)$$

卡氏第一定理和克-恩定理适用于线性和非线性的弹性体。对于线弹性体, 由于力与位移成正比, 应变能在数值上等于应变余能。因此, 对于线弹性体, 可用应变能代替式 (26) 中的应变余能, 即

$$\delta_i = \frac{\partial U_{\text{应变能}}}{\partial F_i} \quad (27)$$

该定理为卡氏第二定理, 表明线弹性体的应变能对于作用在该体系上的某一荷载的变化率, 等于与该荷载相应的位移。

3 非线性接头转动刚度模拟

3.1 双线性和三线形转动刚度模型

对于线性接头转动刚度模型, 梁-弹簧不连续模型基于卡氏第二定理处理接头刚度。但卡氏第二定理仅适用于线性模型, 对于双线性接头转动刚度模型 (见

图 10), 可采用前述克-恩定理进行求解分析。

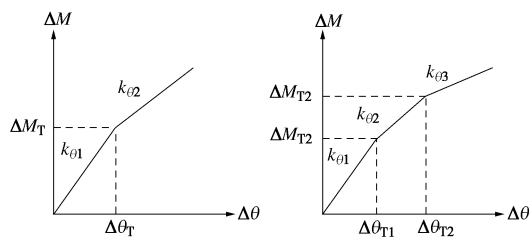


图 10 双线性和三线性接头转动刚度模型

Fig. 10 Bi-linear and tri-linear models for joint rotational stiffness

假定结点 2 固定, 结点 1 处的荷载为轴力 N_1 、剪力 Q_1 和弯矩 M_1 , 则弹簧单元的应变余能为

$$U_{\text{应变余能}} = \frac{1}{2} \frac{N_1^2}{k_n} + \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{k_s} + \frac{1}{2} \theta_{T1} M_{T1} + \frac{1}{2} (\theta_{T1} + \theta_1) (M_1 - M_T) \quad (28)$$

根据克-恩定理可得

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial U_{\text{应变余能}}}{\partial N_1} = \frac{N_1}{k_n}, \\ v_1 &= \frac{\partial U_{\text{应变余能}}}{\partial Q_1} = \frac{Q_1}{k_s}, \\ \theta_1 &= \frac{\partial U_{\text{应变余能}}}{\partial M_1} = \frac{M_1}{k_{\theta 2}} - M_{T1} \left(\frac{1}{k_{\theta 2}} - \frac{1}{k_{\theta 1}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

结点 1 的结点力与结点位移之间的关系为

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & & \\ & k_s & \\ & & k_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{\theta 2} M_{T1} \left(\frac{1}{k_{\theta 2}} - \frac{1}{k_{\theta 1}} \right) \end{Bmatrix} \quad (30)$$

根据静力平衡关系, 可得结点 2 的结点力为

$$\begin{Bmatrix} N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_n & & \\ & -k_s & \\ & & -k_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k_{\theta 2} M_{T1} \left(\frac{1}{k_{\theta 2}} - \frac{1}{k_{\theta 1}} \right) \end{Bmatrix} \quad (31)$$

同理, 假定结点 1 固定, 结点 2 处的荷载为轴力 N_2 、剪力 Q_2 和弯矩 M_2 , 根据克-恩定理, 可得结点 2 的结点力与结点位移的关系式为

$$\begin{Bmatrix} N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & & \\ & k_s & \\ & & k_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{\theta 2} M_{T2} \left(\frac{1}{k_{\theta 2}} - \frac{1}{k_{\theta 1}} \right) \end{Bmatrix} \quad (32)$$

根据静力平衡关系, 可得结点 1 的结点力为

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_n & & \\ & -k_s & \\ & & -k_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k_{\theta 2} M_{T2} \left(\frac{1}{k_{\theta 2}} - \frac{1}{k_{\theta 1}} \right) \end{Bmatrix} \quad (33)$$

结合式 (30) ~ (33) 可得弹簧单元结点力与结点位移的关系式:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & & -k_n & & & \\ & k_s & & & -k_s & \\ & & k_{\theta 2} & & & -k_{\theta 2} \\ -k_n & & & k_n & & \\ & -k_s & & & k_s & \\ & & -k_{\theta 2} & & & k_{\theta 2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (M_{T1} - M_{T2}) \cdot k_{\theta 2} \left(\frac{1}{k_{\theta 2}} - \frac{1}{k_{\theta 1}} \right) \\ 0 \\ 0 \\ -(M_{T1} - M_{T2}) \cdot k_{\theta 2} \left(\frac{1}{k_{\theta 2}} - \frac{1}{k_{\theta 1}} \right) \end{Bmatrix} \quad (34)$$

令 $\Delta M_T = M_{T2} - M_{T1}$, 代入式 (34) 可得

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & & -k_n & & & \\ & k_s & & & -k_s & \\ & & k_{\theta 2} & & & -k_{\theta 2} \\ -k_n & & & k_n & & \\ & -k_s & & & k_s & \\ & & -k_{\theta 2} & & & k_{\theta 2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta M_T \cdot k_{\theta 2} \left(\frac{1}{k_{\theta 1}} - \frac{1}{k_{\theta 2}} \right) \\ 0 \\ 0 \\ -\Delta M_T \cdot k_{\theta 2} \left(\frac{1}{k_{\theta 1}} - \frac{1}{k_{\theta 2}} \right) \end{Bmatrix} \quad (35)$$

同理, 对于三线性接头转动刚度模型 (见图 10), 可得结点力与结点位移的关系式:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & & -k_n & & & \\ & k_s & & & -k_s & \\ & & k_{\theta 3} & & & -k_{\theta 3} \\ -k_n & & & k_n & & \\ & -k_s & & & k_s & \\ & & -k_{\theta 3} & & & k_{\theta 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta M_{T1} \cdot k_{\theta 3} \left(\frac{1}{k_{\theta 1}} - \frac{1}{k_{\theta 2}} \right) + \Delta M_{T2} \cdot k_{\theta 3} \left(\frac{1}{k_{\theta 2}} - \frac{1}{k_{\theta 3}} \right) \\ 0 \\ 0 \\ -\Delta M_{T1} \cdot k_{\theta 3} \left(\frac{1}{k_{\theta 1}} - \frac{1}{k_{\theta 2}} \right) - \Delta M_{T2} \cdot k_{\theta 3} \left(\frac{1}{k_{\theta 2}} - \frac{1}{k_{\theta 3}} \right) \end{bmatrix} \quad (36)$$

式(35)和式(36)同样可采用卡氏第一定理得到。在盾构工程设计和应用中为简化计算,通常忽略管片接头转动刚度的多段线性事实,仍将接头转动刚度考虑为单线性变化,采用卡氏第二定理推导接头结点力与结点位移的关系式。采用卡氏第二定理推导时,假设应变能和应变余能相等,对于双线性和三线性接头转动刚度模型,可分别得到

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & & -k_n & & & \\ & k_s & & -k_s & & \\ & & k_{\theta 2} & & -k_{\theta 2} & \\ -k_n & & & k_n & & \\ & -k_s & & & k_s & \\ & & -k_{\theta 2} & & & k_{\theta 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & & -k_n & & & \\ & k_s & & -k_s & & \\ & & k_{\theta 3} & & -k_{\theta 3} & \\ -k_n & & & k_n & & \\ & -k_s & & & k_s & \\ & & -k_{\theta 3} & & & k_{\theta 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

对比式(35)和式(37)及式(36)和式(38)可知,若计算中将多段线性接头转动刚度考虑为单线性转动刚度,采用卡氏第二定理推导接头结点力与结点位移的关系式,会造成接头结点力与结点位移的关系式中缺少一项。采用卡氏第二定理求解推导时存在误差的根源在于应变余能的计算误差。如图11所示,采用克-恩定理求解时,应变余能为图中的竖线灰色区域,而采用卡氏第二定理求解时,应变余能为图中的整个灰色区域。

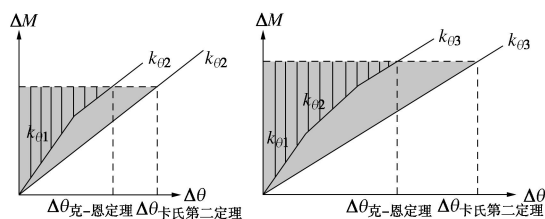


图11 克-恩定理和卡氏第二定理的应变余能差值

Fig. 11 Difference of complementary strain energy between Crotti-Engesser's Theorem and Second Castigliano's Theorem

以图3中平板接头在竖向集中荷载 F 作用下的计

算模型为例,接头转动刚度考虑为双线性模型,两段斜率分别为 $k_{\theta 1}$ 和 $k_{\theta 2}$ 。接头位置的挠度和转角理论解为

$$v_j = \frac{FL^3}{6EI} + \frac{FL^2}{4k_{\theta 2}} + \frac{M_T L}{2} \left(\frac{1}{k_{\theta 1}} - \frac{1}{k_{\theta 2}} \right), \quad (39)$$

$$\theta_j = \frac{FL}{4k_{\theta 2}} + \frac{M_T}{2} \left(\frac{1}{k_{\theta 1}} - \frac{1}{k_{\theta 2}} \right). \quad (40)$$

分别基于卡氏第一定理和卡氏第二定理,采用梁-弹簧不连续模型法分析图3中计算模型的竖向位移和转角,其中 $k_{\theta 1}=500000 \text{ kN}\cdot\text{m/rad}$, $k_{\theta 2}=200000 \text{ kN}\cdot\text{m/rad}$, $M_T=100 \text{ kN}\cdot\text{m}$,其他计算条件与表1中相同,计算结果见表3。

表3 卡氏定理与理论解计算对比

Table 3 Comparison between Castigliano's Theorem and theoretical solution

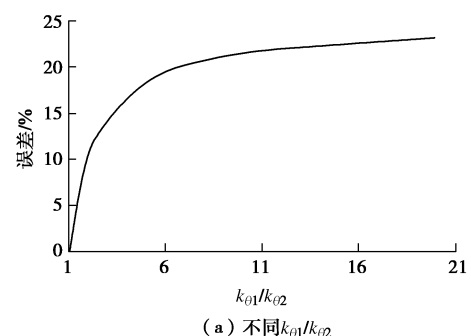
模型	v_j / cm	θ_{j1} / rad	θ_{j2} / rad	$\Delta\theta_j / \text{rad}$
卡氏第一定理	0.2053181	-0.001659	0.001659	0.003318
卡氏第二定理	0.2278181	-0.001809	0.001809	0.003618
理论解	0.2053181	-0.001659	0.001659	0.003318

由表3可知,基于卡氏第一定理采用梁-弹簧不连续模型计算的平板接头竖向位移和转角与式(39)和式(40)中的理论解一致。而基于卡氏第二定理采用梁-弹簧不连续模型计算的平板接头竖向位移和转角与式(39)和式(40)中的理论解误差分别为11.0%和9.0%。

分别基于卡氏第一定理和卡氏第二定理,采用梁-弹簧不连续模型,选取不同的 $k_{\theta 1}/k_{\theta 2}$ 和 M_j/M_T (M_j 为接头弯矩, $M_j=F\cdot L/2$)计算图3模型中的接头挠度。卡氏第二定理与卡氏第一定理计算结果之间的误差如图12所示。

由图12可知,基于卡氏第二定理求解接头挠度时最大误差为20%左右,且随着 $k_{\theta 1}/k_{\theta 2}$ 比值的减小及 M_j 与 M_T 比值的增大误差逐渐减小。

采用梁-弹簧不连续模型分析盾构管片衬砌内力,接头刚度 $k_{\theta 1}=500000 \text{ kN}\cdot\text{m/rad}$, $k_{\theta 2}=200000 \text{ kN}\cdot\text{m/rad}$, $M_T=100 \text{ kN}\cdot\text{m}$,其他计算参数与图7中的模型相同,计算结果见图13。



(a) 不同 $k_{\theta 1}/k_{\theta 2}$

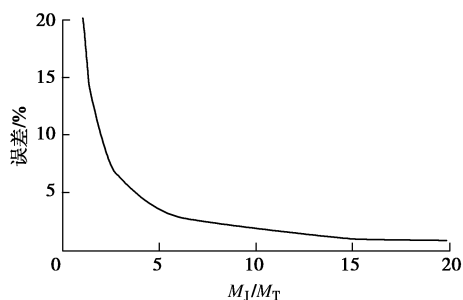
(b) 不同 M_J/M_T

图 12 基于卡氏第二定理求解接头挠度的误差

Fig. 12 Errors of joint deformation based on Second Castigliano's Theorem

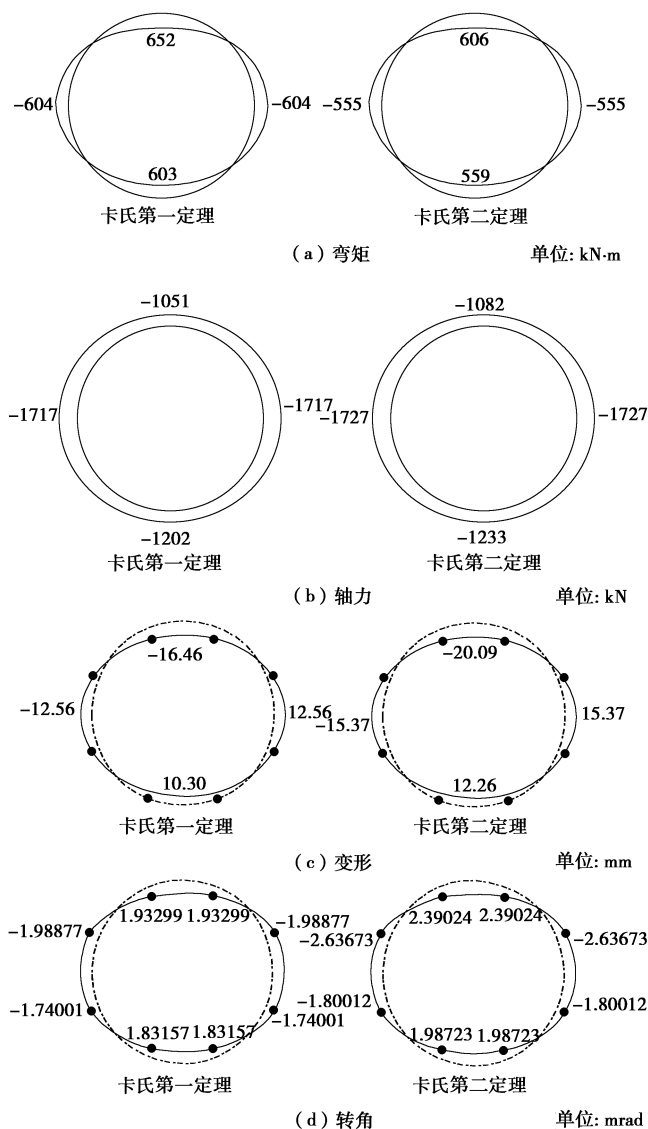


图 13 衬砌内力与变形 (双线性接头转动刚度模型)

Fig. 13 Internal forces and deformations of lining structures

(bi-linear model for joint rotational stiffness)

由图 13 可知, 基于卡氏第一定理求解时, 最大正弯矩位于拱顶位置, 弯矩为 652 kN·m, 最大负弯矩位于拱腰位置, 弯矩为 -604 kN·m。而基于卡氏第二定理求解时, 拱顶弯矩为 606 kN·m, 拱腰弯矩为 -555 kN·m, 拱顶和拱腰弯矩的计算误差分别为 -7.1% 和 -8.4%。与

衬砌环截面弯矩相比, 截面轴力的计算误差相对较小, 最大误差仅为 2.9%。基于卡氏第一定理求解时, 拱顶和拱底变形分别为 16.46 mm 和 10.30 mm, 最大接头转角为 1.98877 mrad。而基于卡氏第二定理求解时, 拱顶和拱底变形分别为 20.09 mm 和 12.26 mm, 最大接头转角为 2.63673 mrad; 与卡氏第一定理相比, 拱顶和拱底变形的计算误差分别为 22.1% 和 19.0%, 接头转角的计算误差为 32.6%。

3.2 非线性转动刚度模型

非线性接头转动刚度模型中, 接头转动刚度随接头转角不断变化, 如图 14 所示。对于非线性接头转动刚度模型, 可采用增量-迭代法求解, 即在每一个荷载增量步中, 采用 Newton-Raphson 迭代法求解^[12, 16], 如图 15 所示。

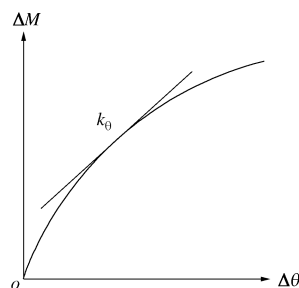


图 14 接头非线性模型

Fig. 14 Nonlinear model for joint rotational stiffness

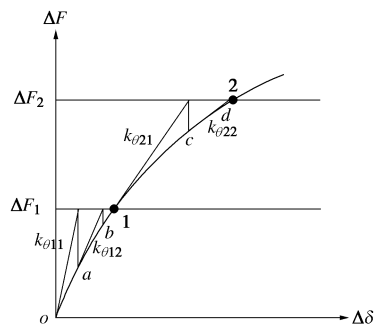


图 15 Newton-Raphson 迭代法

Fig. 15 Newton-Raphson iteration method

文献[9]中提出, 对于非线性接头转动刚度, 接头弯矩和相对转角的关系为

$$\Delta M = \alpha(1 - e^{-\beta\Delta\theta}) + \gamma\Delta\theta \quad (41)$$

以图 3 中平板接头计算模型为例, 接头转动刚度考虑为非线性模型, 式 (41) 中的参数分别取为 $\alpha = 40000000$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$, 则接头位置的挠度和转角理论解为

$$v_j = \frac{FL^3}{6EI} - \frac{\ln\left(1 - \frac{FL}{2\alpha}\right)}{2\beta} L \quad (42)$$

$$\theta_j = -\frac{\ln\left(1 - \frac{FL}{2\alpha}\right)}{2\beta} \quad (43)$$

采用梁-弹簧不连续模型法分析图 3 中计算模型

的竖向位移和转角, 非线性转动刚度模型根据式 (41) 选取, 其中, $\alpha=40000000$, $\beta=2$, $\gamma=0$, 其他计算条件与表 1 中相同。增量-迭代法数值解与式 (42) 和式 (43) 中理论解的对比结果见表 4。

表 4 增量-迭代法与理论解计算对比

Table 4 Comparison between incremental iteration method and theoretical solution				
模型	v_j / cm	θ_{j1} / rad	θ_{j2} / rad	$\Delta\theta_j / \text{rad}$
梁-弹簧不连续模型	0.4404137	-0.002355	0.002355	0.004710
理论解	0.4404139	-0.002355	0.002355	0.004710

由表 4 可知, 采用增量-迭代法求解的接头挠度和转角与理论解基本一致。采用梁-弹簧不连续模型分析盾构管片衬砌内力、接头弯矩与转角的非线性关系曲线与平板接头计算模型相同, 其他计算参数与图 7 中的模型相同, 计算得到的衬砌内力与变形如图 16 所示。

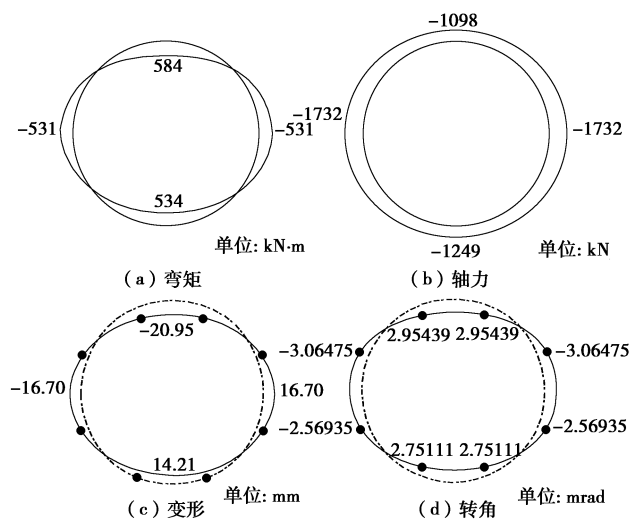


图 16 衬砌内力与变形 (非线性接头转动刚度模型)

Fig. 16 Internal forces and deformations of lining structures (nonlinear model for joint rotational stiffness)

4 结 论

- (1) 梁-弹簧连续模型采用变形连续的弹簧模拟管片接头, 在计算中认为相邻管片在接头位置的结点位移相同, 采用梁-弹簧连续模型法计算盾构管片衬砌内力和变形将会带来较大误差。
- (2) 梁-弹簧不连续模型采用变形非连续的弹簧模拟管片接头, 在计算中认为相邻管片在接头位置的结点位移不同, 可以准确计算盾构管片衬砌的内力与变形。
- (3) 梁-弹簧不连续模型与梁-接头模型中接头结点力与结点位移的刚度矩阵相同, 两种模型本质相同, 具有统一性。
- (4) 盾构管片接头转动刚度模型有线性、多段线

性 (双线性及三线性) 和非线性模型。采用梁-弹簧不连续模型计算盾构衬砌内力及变形时, 对于线性接头转动刚度模型, 可基于卡氏第二定理求解; 对于多段线性模型, 可基于卡氏第一定理或克-恩定理求解; 对于非线性模型, 可采用增量-迭代法数值求解。

参考文献:

[1] 村上博智, 小泉淳. シールドセグメントリングの耐荷機構について[J]. 土木学会論文報告集, 1978, **272**: 103 - 115. (MURAKAMI Hiroto, KOIZUMI Atushi. Study on load bearing capacity and mechanics of shield segment ring[J]. Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers, 1978, **272**: 103 - 115. (in Japanese))

[2] 朱合华, 崔茂玉, 杨金松. 盾构衬砌管片的设计模型与荷载分布的研究[J]. 岩土工程学报, 2000, **22**(2): 190 - 194. (ZHU He-hua, CUI Mao-yu, YANG Jin-song. Design model for shield lining segments and distribution of load[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2000, **22**(2): 190 - 194. (in Chinese))

[3] 蒋洪胜, 侯学渊. 盾构法隧道管片接头转动刚度的理论研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, **23**(9): 1574 - 1577. (JIANG Hong-sheng, HOU Xue-yuan. Theoretical study of rotating stiffness of joint in shield tunnel segments[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, **23**(9): 1574 - 1577. (in Chinese))

[4] 朱 伟, 钟小春, 秦建设. 盾构衬砌管片接头力学分析及双直线刚度模型研究[J]. 岩土力学, 2006, **27**(12): 2154 - 2158. (ZHU Wei, ZHONG Xiao-chun, QIN Jian-she. Mechanical analysis of segment joint of shield tunnel and research on bilinear joint stiffness model[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, **27**(12): 2154 - 2158. (in Chinese))

[5] 闫治国, 彭益成, 丁文其, 等. 青草沙水源地原水工程输水隧道单层衬砌管片接头荷载试验研究[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(9): 1385 - 1390. (YAN Zhi-guo, PENG Yi-cheng, DING Wen-qi, et al. Load tests on segment joints of single lining structure of shield tunnel in Qingcaosha Water Conveyance Project[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(9): 1385 - 1390. (in Chinese))

[6] 塩冶幸男, 内藤幸弘, 阿南健一, 等. 経年劣化したシールドトンネルの補強に関する研究[J]. 土木学会論文集 F1(トンネル工学), 2011, **67**(2): 62 - 78. (ENYA Yukio, NAITO Yukihiro, ANAN Kenichi, et al. Study of reinforcement design for deteriorated shield tunnel[J]. Journal of Japan Society of Civil Engineers, Ser F1 (Tunnel Engineering), 2011, **67**(2): 62 - 78. (in Japanese))

- [7] 吴全立, 王梦恕, 董新平. 盾构管片接头非线性转动刚度研究[J]. 土木工程学报, 2014, **47**(4): 109 - 114. (WU Li-quan, WANG Meng-shu, DONG Xin-ping. Study on nonlinear rotational stiffness of shield segment joint[J]. China Civil Engineering Journal, 2014, **47**(4): 109 - 114. (in Chinese))
- [8] BO T J, MORTEN F, THOMAS K. A modelling approach for joint rotations of segmental concrete tunnel linings[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2017, **67**: 61 - 67.
- [9] 朱合华, 黄伯麒, 李晓军, 等. 盾构衬砌管片接头内力-变形统一模型及试验分析[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(12): 2153 - 2160. (ZHU He-hua, HUANG Bo-qi, LI Xiao-jun, et al. Unified model for internal force and deformation of shield segment joints and experimental analysis[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(12): 2153 - 2160. (in Chinese))
- [10] 小泉淳. 盾构隧道管片设计——从允许应力设计法到极限状态设计法[M]. 官林星, 译. 北京: 中国建筑工业出版社, 2012. (KOIZUMI Atushi. Segment design for shield tunnel—from allowable stress design method to limit state design method[M]. GUAN Lin-xing, tran. Beijing: China Architecture & Building Press, 2012. (in Chinese))
- [11] 何川, 周济民, 封坤, 等. 基于接头非线性抗弯刚度的盾构隧道迭代算法的实现与应用[J]. 土木工程学报, 2012, **45**(3): 166 - 173. (HE Chuan, ZHOU Ji-min, FENG Kun, et al. An iterative algorithm based on segment joint stiffness nonlinearity and application for shield tunnel structures[J]. China Civil Engineering Journal, 2012, **45**(3): 166 - 173. (in Chinese))
- [12] 董新平. 盾构衬砌单环破坏历程的增量法解析解[J]. 岩土工程学报, 2015, **37**(1): 119 - 125. (DONG Xin-ping. Incremental analytical solution for failure history of a single ring of segmented tunnel lining[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, **37**(1): 119 - 125. (in Chinese))
- [13] 朱合华, 陶履彬. 盾构隧道衬砌结构受力分析的梁-弹簧系统模型[J]. 岩土力学, 1998, **19**(2): 26 - 32. (ZHU He-hua, TAO Lü-bin. Study on two beam-spring models for the numerical analysis of segments in shield tunnel[J]. Rock and Soil Mechanics, 1998, **19**(2): 26 - 32. (in Chinese))
- [14] 龙驭球, 包世华, 匡文起, 等. 结构力学 II——专题教程[M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 2006. (LONG Yu-qiu, BAO Shi-hua, KUANG Wen-qi, et al. Structural mechanics II - Advanced course[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese))
- [15] 孙训方, 方孝淑, 关来泰. 材料力学 (II) [M]. 5版. 北京: 高等教育出版社, 2009. (SUN Xun-fang, FANG Xiao-shu, GUAN Lai-tai. Mechanics of materials (II)[M]. 5th ed. Beijing: Higher Education Press, 2009. (in Chinese))
- [16] COOK R D, MALKUS D S, PLESHA M E, et al. Concepts and applications of finite element analysis[M]. New York: John Wiley & Sons, 2007.