

DOI: 10.11779/CJGE201906019

# 真空预压的最终负压分布模式

胡亚元<sup>1</sup>, 钱镜林<sup>2</sup>, 张超杰<sup>2</sup>

(1. 浙江大学滨海和城市岩土工程研究中心, 浙江 杭州 310058; 2. 浙江省水利河口研究院, 浙江 杭州 310020)

**摘要:** 为了揭示真空度衰减特性和确定最终竖向有效应力, 研究了底部半透水边界下真空预压的最终负压分布模式。首先通过边界齐次化理论建立了真空预压和堆载预压固结方程之间存在的等效关系, 获得最终负压沿深度分布公式。其次根据固结完成后的稳定渗流方程, 研究了单层地基、多层地基和砂井地基的最终负压分布特性。研究表明, 在半透水边界条件下最终负压呈现随深度衰减现象。对于单层地基或竖向排水体通水量恒定的砂井地基, 最终负压沿深度呈单一性衰减; 对于多层地基或竖向排水体通水量分段恒定的砂井地基, 最终负压沿深度分段线性衰减; 对于渗透系数连续变化地基或竖向排水体通水量连续变化砂井地基, 最终负压沿深度曲线衰减。最终负压衰减速率随着边界透水系数增大而增大。渗透系数越大的地层, 最终负压衰减越慢; 上层土体与最底层土体的渗透系数之比越大, 底部边界处的最终负压越大, 反之越小。算例表明, 采用半透水边界地基模型能较合理地模拟真空预压最终负压和最终竖向有效应力沿深度减小特性。

**关键词:** 真空预压; 负压; 有效应力; 半透水边界; 边界齐次化理论

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2019)06-1139-10

作者简介: 胡亚元(1986—), 男, 副教授, 博士, 主要从事软土处理、本构关系和环境土工等方面的教学和科研。E-mail: huyayuan@zju.edu.cn。

## Distribution patterns of final negative pressure in vacuum preloading

HU Ya-yuan<sup>1</sup>, QIAN Jing-lin<sup>2</sup>, ZHANG Chao-jie<sup>2</sup>

(1. Research Center of Coastal and Urban Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China; 2. Zhejiang Institute of Hydraulics and Estuary, Hangzhou 310020, China)

**Abstract:** The distribution patterns of the final negative pressure are investigated in vacuum preloading under impeded bottom boundary in order to demonstrate the degenerated properties of vacuum degree and to determine the final vertical effective stress. Firstly, the equivalent relation of consolidation equations between vacuum preloading and surcharge preloading is established according to the boundary homogenizing theory. The distribution patterns of the final negative pressure with depth are obtained. Secondly, according to the steady seepage equation of post-consolidation, the distribution properties of the final negative pressure are studied for single-layer ground, multi-layer ground and sand-drained ground. The study shows that the final negative pressure decreases along depth under impeded boundary condition. For the single-layer ground or sand-drained ground with a constant water flux of vertical drain, the final negative pressure decreases single-linearly along depth. For the multi-layers ground or sand-drained ground with piecewise constant water flux of vertical drain, the final negative pressure decreases piecewise-linearly along depth. For the ground with continuous permeability coefficient or sand-drained ground with continuous water flux of vertical drain, the final negative pressure decreases nonlinearly along depth. The rate of final negative pressure increases with the permeability coefficient of boundary. The final negative pressure decreases slowly in high permeable layer. The larger the ratio of permeability coefficient between the upper layer and the bottom layer is, the larger the final negative pressure at bottom boundary is, and vice versa. The case study shows that the ground model with impeded boundary can reasonably simulate the properties that the final negative pressure and the final vertical effective stress decrease with depth in vacuum preloading.

**Key words:** vacuum preloading; negative pressure; effective stress; impeded boundary; homogenizing theory of boundary

## 0 引言

真空预压和堆载预压均可以在加固地基中产生附

基金项目: 浙江省自然科学基金项目(LY16E090005)

收稿日期: 2017-09-19

加有效应力,促使地基沉降和提高地基承载力。当真空预压和堆载预压产生的最终竖向有效应力空间分布相同时,真空预压和堆载预压关于竖向沉降和地基承载力的加固效果相同。因此,研究预压地基有效应力空间分布对评估预压法地基处理加固效果具有理论和实践意义。堆载预压的最终竖向有效应力可以从理论上采用布辛涅斯克解计算;然而,真空预压最终有效应力分布的理论确定问题,还较少见文献报道,目前理论研究落后于实践发展。

真空预压最终有效应力空间分布,根据Terzaghi有效应力原理,可以根据固结完成时的最终负孔压空间分布来进行计算。而最终负孔压的空间分布特性,由于它的激励是“外荷载”真空度,并且沿空间逐渐衰减的,因此被工程界形象地称为真空度空间衰减特性<sup>[1-13]</sup>。根据真空度空间分布特性,Indraratna等<sup>[5]</sup>提出加固区底部边界的水力梯度等于真空度衰减系数,周琦等<sup>[8]</sup>和鲍树峰等<sup>[10]</sup>提出加固区底部孔压边界条件,他们各自获得了真空预压的Hansbo型固结解答。郭彪等<sup>[9]</sup>、蒋基安等<sup>[11]</sup>和吴跃东等<sup>[12]</sup>对加固区底部采取不透水边界条件,理论分析了真空度衰减特性对地基固结度和沉降的影响。然而这些研究均是在已知真空度随深度衰减模式的条件下进行的,至于真空度发生衰减的力学机理以及如何理论分析真空度沿深度衰减速率,则在上述研究中没有涉及。

目前对真空度衰减规律的研究主要采用现场测试方法,如朱群峰等<sup>[13]</sup>现场测得真空度在吹填软土段的衰减速率为10 kPa/m,在天然软土段的衰减速率为2 kPa/m;唐彤芝等<sup>[14]</sup>报道无砂垫层真空预压的真空度损耗率达到7.5~15 kPa/m。姜彦彬等<sup>[15]</sup>室内试验测得真空度损耗率为6~10 kPa/m。Zhang等<sup>[16]</sup>采用泥浆搅拌桩密封真空预压周边土层后,测得真空度沿排水板的损耗率约为1~1.5 kPa/m。现场测试方法虽然能够获得真空度随深度衰减模式,但在施工还未实施的设计阶段,无法获得最终负孔压实测数据,难以完全满足真空预压工艺设计和理论预测要求。

为了弥补上述缺陷,胡亚元认为真空预压在加固区形成负孔压场,势必与周边非加固区存在水头梯度,从而在加固区边界上出现水力渗透。因此需要在传统真空预压地基模型中选取半透水边界,才能揭示最终负孔压衰减分布规律。为此,胡亚元采用半透水边界均质砂井地基模型<sup>[17-18]</sup>,理论探索了最终负孔压沿深度线性衰减的力学机理,揭示了边界透水系数对最终负孔压衰减的影响规律,为事先预估真空度随深度衰减特性提供了一种理论分析方法。

在实际工程中,真空预压加固地层大都属于不均匀地基;同时,在吹填淤泥真空预压过程中,淤堵现

象十分严重,这些均造成了场地和砂井地基竖向排水体渗透系数的不均匀性。真空度引起的最终负孔压在这些场地中具有怎样特殊的衰减规律,是岩土工程界十分关心的问题。然而有关这方面的理论研究却十分少见,本文试图在这方面作一些研究尝试。

## 1 “真空度”和“负压”术语阐释

随着真空预压加固机理研究的不断深入,描述真空预压加固机理的术语不断增多,含义也不断丰富和发展。在这些术语中,对“真空度”的内涵和外延发展的最为丰富。如果不对其在具体语境中确切含义做出规定,容易让论文产生歧义。笔者认真学习了各位学者的深入剖析<sup>[15, 19-20]</sup>,研究了真空预压与堆载预压术语的对应关系,见表1。

表1 本文所用真空预压术语与堆载预压术语对应表

Table 1 Corresponding table of terminology between vacuum preloading and surcharge preloading

预压方式	施荷方式	固结过程(某一时刻的)	固结初始和完成
堆载预压	①外荷载 ②附加应力 空间分布	①正孔压 ②有效应力 ③固结度 ④沉降	①初始正孔压分布 ②最终有效应力分布 ③最终沉降
真空预压	①真空度 ②真空度空间分布	①负孔压 ②有效应力 ③固结度 ④沉降	①最终负孔压分布 ②最终有效应力分布 ③最终沉降

在堆载预压中,由于外荷载传递到土体中时存在应力扩散现象,土体内部应力不等于表面应力,因此在表1所示“施荷方式”术语上,除了应用“外荷载”这一术语外,在理论分析中还应用“附加应力空间分布”这一描述作为对“外荷载”术语的补充。只有引入“附加应力空间分布”这一概念,才能确定堆载预压固结方程中与之相等的初始正孔压空间分布。值得指出的是,决定附加应力空间分布的力学机理是布辛涅斯克解,与固结机制以及由固结引起的孔压随深度衰减无关。与堆载预压相似,在真空预压中,由于作用在膜下的真空度传递到土体中存在损耗现象,土体内部真空预压效果也不等于表面真空度效果,因此需要一个与“附加应力空间分布”类似的辅助术语作为“膜下真空度”术语的补充,以便确定真空预压理论分析所需的最终负孔压分布模式(真空预压的初始孔压为零,逐步固结到最终负孔压)。这一与堆载预压“附加应力空间分布”相对应的术语,在大多数真空预压理论分析中把它称为“真空度空间分布特性”或“真空度衰减特性”,其本质,是为了表征真空预压理论分

析所需的并与之相等的“最终负孔压分布模式”。

从上述分析可以看出, 在真空预压理论分析中, “真空度衰减特性”术语中的“真空度”与《水力学》和真空测量中使用的传统“真空度”在概念中是有所不同的<sup>[15, 19-20]</sup>。首先, 传统“真空度”指的是某一点某一时刻的应力状态, 它不但随固结过程发生变化, 而且受真空度衰减特性影响。而“真空度衰减特性”中的“真空度”指的是真空预压固结完成时在土体内部所能提供的最终负孔压, 只取决于膜下真空度及固结完成时的稳态渗流特性, 不受固结过程影响。其次, 传统“真空度”侧重的是应力状态, 通常用于某一点上, 而“真空度衰减特性”术语中的“真空度”侧重的是最终负孔压沿空间分布模式, 属于应力场范畴。由于最终负孔压往往是固结过程中的最大负压, 因此“真空度衰减特性”中的“真空度”强调的是真空预压在土体内部可能达到的最大加固能力。上述分析表明, 真空度在真空预压具有不同于传统的力学内涵, 按理需要采用新术语来指代“真空度衰减特性”。但“真空度衰减特性”术语也具有十分鲜明的优点, 就是这一称呼十分醒目地表征了真空预压的独特加载方式, 因此在中外工程界和学术界得到广泛地应用。实际上传统“真空度”与“真空度衰减特性”中的“真空度”两者使用语境完全不同, 只要谨慎使用, 在具体语境中不易相互混淆。因此本文保留“真空度空间分布”和“真空度衰减”等称谓, 以表征真空预压完成时的最终负孔压空间分布特性。但在描述真空预压固结方程和固结过程时使用语义更明确的“负孔压”术语而不用“真空度”, 以避免概念发生歧义。下文为了行文简洁把“负孔压”简称为“负压”<sup>[15]</sup>。在描述固结完成时的应力量和沉降量时加上“最终”两字以示与固结过程中的应力量和沉降量相区别。

## 2 真空预压和堆载预压的固结解对比

真空预压虽然在施荷方式上与堆载预压存在较大的不同, 但它们遵循相同的渗流固结理论和Terzaghi有效应力原理, 因此在真空预压研究中常常把真空压力等效为堆载预压来进行设计和分析<sup>[1-2, 5]</sup>。探索这种等效的理论依据是什么, 是一件十分有意义的研究工作。笔者认为这一等效的理论依据是数学物理方程非齐次边界的齐次化理论。本节以只考虑径向渗透的砂井地基固结方程为例来证明这一结论。

砂井地基单井计算简图如图1所示。设 $r$ 和 $z$ 为径向和竖向坐标,  $t$ 为时间。 $r_e$ 为砂井影响区半径,  $r_s$ 为涂抹区半径,  $r_w$ 为砂井半径。未扰动原状土的渗透系数为 $K_h$ , 涂抹区土体的水平向渗透系数为 $K_s$ , 砂井

井料渗透系数为 $K_w$ ,  $A_w$ 为砂井的截面积,  $q_w=A_wK_w$ 为砂井通水量。 $H$ 为软土层层厚,  $\gamma_w$ 为水重度。当 $H/r_e > 4$ 时固结主要由径向渗透完成, 实际砂井地基基本满足这一条件, 因此只考虑砂井地基径向固结。

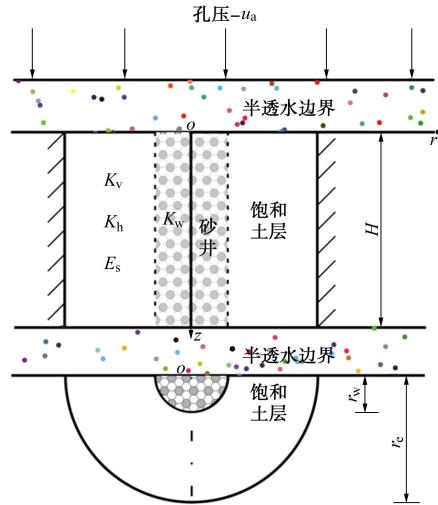


图1 砂井地基单井固结计算简图

Fig. 1 Analytical sketch of consolidation for unit cell in sand-drained ground

真空预压砂井地基的径向固结方程为:

(1) 设 $u$ 为土体部分的超孔压,  $\varepsilon_0$ 为土体体应变,  $E_s$ 为压缩模量, 土体部分的渗流固结方程为

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = -\frac{1}{E_s} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{K_s}{\gamma_w} r \frac{\partial u}{\partial r} \right] = \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (r_w \leq r \leq r_s), \quad (2)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{K_h}{\gamma_w} r \frac{\partial u}{\partial r} \right] = \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (r_s \leq r \leq r_e). \quad (3)$$

式(1)中的 $\bar{u}$ 为砂井地基土体部分的径向平均孔压,

$$\bar{u} = \frac{1}{\pi(r_e^2 - r_w^2)} \int_{r_w}^{r_e} 2\pi r u d r. \quad (4)$$

(2) 设 $u_w$ 为砂井部分的超孔压, 砂井渗流固结方程为

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( q_w \frac{\partial u_w}{\partial z} \right) = -2\pi r_w K_s \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_w}. \quad (5)$$

砂井地基径向边界条件表示为

$$r = r_e, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0. \quad (6)$$

a) 对于真空预压, 它的初始条件为

$$t = 0, \quad u = 0. \quad (7)$$

顶部竖向边界条件为

$$z = 0, \quad u_w = -u_a. \quad (8)$$

底部竖向半透水边界条件可统一表示为<sup>[3-13, 17-18]</sup>

$$z = H, \frac{\partial u_w}{\partial z} = i_{wL} - \frac{R_{wL}}{H}(u_w - u_{wL}) \quad . \quad (9)$$

式(8)、(9)中,  $u_a$  为真空度,  $i_{wL}$  和  $u_{wL}$  是与边界透水特性有关的常数,  $R_{wL}$  为底层透水系数。当  $R_{wL}=0$  时底部为定梯度边界,  $R_{wL}=0$  和  $i_{wL}=0$  为不透水边界;  $R_{wL}=\infty$  时为定孔压边界,  $R_{wL}=\infty$  和  $u_{wL}=0$  为透水边界。

b) 对于堆载预压砂井地基, 孔压初始条件等于外荷载产生的附加应力分布  $p_a(z)$ , 有

$$t = 0, u(z, 0) = p_a(z) \quad . \quad (10)$$

竖向边界条件可表示为

$$z = 0, u_w = 0 \quad , \quad (11)$$

$$z = H, \frac{\partial u_w}{\partial z} = -\frac{R_{wL}}{H} u_w \quad . \quad (12)$$

从竖向边界条件可看出, 堆载预压边界条件式(11), (12) 满足齐次边界条件, 而真空预压式(8), (9) 不满足齐次边界条件。根据数学物理方程理论, 真空预压非齐次边界可以通过齐次化理论转变为齐次边界条件。假设  $q_w$  恒定, 其齐次化公式为

$$u^* = u + \left[ 1 - \frac{i_{wL}H + R_{wL}(u_a + u_{wL})}{(R_{wL} + 1)u_a} \frac{z}{H} \right] u_a \quad . \quad (13)$$

把  $u_w^* = u_w + u^* - u$  和式(13)代入到式(7)、(9)得

$$t = 0, u^* = \left[ 1 - \frac{i_{wL}H + R_{wL}(u_a + u_{wL})}{(R_{wL} + 1)u_a} \frac{z}{H} \right] u_a \quad , \quad (14)$$

$$z = 0, u_w^* = 0 \quad , \quad (15)$$

$$z = H, \frac{\partial u_w^*}{\partial z} = -\frac{R_{wL}}{H} u_w^* \quad . \quad (16)$$

首先, 容易验证, 式(13)~(16)中的  $u^*$  和  $u_w^*$  仍满足固结方程式(1)~(6)。其次,  $u_w^*$  的竖向边界条件式(15), (16)满足齐次要求, 其形式与堆载预压竖向边界条件式(11), (12)完全相同。因此, 只要把堆载预压初始条件式(10)中的初始孔压  $u(z, 0)$  (或附加应力  $p_a(z)$ ) 取为与式(14)相同形式, 则  $u^*$  所满足的固结方程与堆载预压所满足的固结方程完全相同。故  $u^*$  的解答, 包括竖向固结沉降, 固结度, 最终竖向有效应力, 均可以用堆载预压的解答来等效。当然, 由于一维固结方程只涉及竖向应力与应变, 因此所谓等效指的是竖向应力和变形相等; 至于水平方向的应力和变形, 由于真空预压在三维空间中属于等向受压, 真空预压和堆载预压在水平方向的应力量和应变量是不等效的<sup>[19]</sup>。

根据抛物线偏微分方程的性质和堆载预压实践可知, 固结完成后真空预压齐次化后的孔压值  $u^*$  消散为0。由式(13)可得固结完成时的最终负压公式为

$$u_\infty = - \left[ 1 - \frac{i_{wL}H + R_{wL}(u_a + u_{wL})}{(R_{wL} + 1)u_a} \frac{z}{H} \right] u_a \quad . \quad (17)$$

真空预压的土体总应力为零, 根据Terzaghi有效应

力原理, 可得固结完成时最终竖向有效应力  $\sigma'_{za\infty}$  为

$$\sigma'_{za\infty} = -u_\infty = \left[ 1 - \frac{i_{wL}H + R_{wL}(u_a + u_{wL})}{(R_{wL} + 1)u_a} \frac{z}{H} \right] u_a \quad . \quad (18)$$

由于式(14)所示初始孔压在固结过程中是单调消散为零的, 式(17)所示最终负压是固结过程中的最大负压。式(17), (18)互为相反式, 故最终负压决定了真空预压所能产生的最终和最大竖向有效应力, 体现了真空预压所蕴含的最大加固能力。如前所述, 这个潜在最大加固能力随深度变化的性质被真空预压工程界形象地称为“真空度随深度分布特性”<sup>[20]</sup>。故式(17)也是真空度沿深度分布公式, 具有沿深度单一线性衰减特性。边界密封性越差, 渗透性越强, 式(17)所示的真空度沿深度衰减率越大。

根据上述理论, 表2给出了几个经典的与真空预压等效的堆载预压固结解以及所对应的最终负压和附加应力公式<sup>[3, 5, 8, 17, 21-23]</sup>, 供读者验证。

表 2 真空预压及其与之等效的堆载预压固结解

Table 2 Analytical solutions of consolidation of vacuum preloading and equivalent solutions of surcharge preloading

真空预压	等效堆载预压
董志亮解 <sup>[3]</sup>	谢康和解 <sup>[21]</sup>
底部边界和初始条件: $z = H, \partial u_w / \partial z = 0$ $t = 0, u = 0$ 最终负压: $u_\infty = -u_a$	底部边界和初始条件: $z = H, \partial u_w^* / \partial z = 0$ $t = 0, u^* = p_a$ 等效附加应力: $p_a = u_a$
Indraratna等解 <sup>[5]</sup>	单面透水Hanbso解 <sup>[22]</sup>
底部边界和初始条件: $z = H, \partial u_w / \partial z = ku_a / H$ $t = 0, u = 0$ 最终负压:	底部边界和初始条件: $z = H, \partial u^* / \partial z = 0$ $t = 0, u^* = p_a$ 等效附加应力:
$u_\infty = -u_a + kz u_a / H$	$p_a = u_a - kz u_a / H$
周琦等解 <sup>[8]</sup>	双面透水Hanbso解 <sup>[22]</sup>
底部边界和初始条件: $z = H, u_w = -(1-k)u_a$ $t = 0, u = 0$ 最终负压: $u_\infty = -u_a + kz u_a / H$	底部边界和初始条件: $z = H, u^* = 0$ $t = 0, u^* = p_a$ 等效附加应力: $p_a = u_a - kz u_a / H$
胡亚元半透水边界解 <sup>[17]</sup>	王瑞春半透水边界解 <sup>[23]</sup>
底部边界和初始条件: $z = H, \partial u_w / \partial z = -R_{wL}u / H$ $t = 0, u = 0$ 最终负压: $u_\infty = -u_a + \left(1 - \frac{1}{R_{wL} + 1}\right) \frac{z}{H} u_a$	底部边界和初始条件: $z = H, \partial u_w^* / \partial z = -R_{wL}u^* / H$ $t = 0, u^* = p_a$ 等效附加应力: $p_a = u_a - \left(1 - \frac{1}{R_{wL} + 1}\right) \frac{z}{H} u_a$

注: 表中真空和堆载预压的顶部( $z=0$ )边界条件分别均为  $u_w = -u_a$  和  $u_w^* = 0$ ;  $k$  为真空度衰减系数。

真空预压的土体总应力为零, 故真空预压引起的最终负压之负(乘以-1)等于最终竖向有效应力, 也

等于边界齐次化后真空预压固结方程的初始孔压和与之等效的堆载预压附加应力(简称等效附加应力)。这一结论不仅在表2以及式(14), (17), (18)中得到验证, 而且对所有的真空预压地基均成立, 故真空预压的最终负压空间分布特性无论在求解固结方程还是在评估预压固结效果中均具有重要作用, 因此需要专门予以研究。虽然根据数学物理方程非齐次边界的齐次化理论能够获得真空预压的最终负压分布, 但当地基复杂时构造齐次化公式的数学技巧较强, 难度较大, 在实际工程中难以应用。下文从固结完成时的稳态渗流方程出发来理论分析半透水边界条件下的最终负压分布模式, 确定真空预压产生的最终竖向有效应力, 以揭示真空度沿深度衰减特性的内在力学机理。

### 3 最终负压和最终有效应力分析

#### 3.1 固结完成时的渗流方程

根据Terzaghi有效应力原理有

$$\sigma' = \sigma - u \quad , \quad (19)$$

式中,  $\sigma'$ 为有效应力,  $\sigma$ 为总应力,  $u$ 为超孔压。地基固结过程的渗流连续方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad , \quad (20)$$

其中,  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$ 分别是水平  $x$  和  $y$  方向和竖直  $z$  方向的渗透系数。固结完成后土体不发生体积变形, 即  $\partial \varepsilon_v / \partial t = 0$ , 此时  $u = u_\infty$ ,  $u_\infty$ 为固结完成后的最终孔压, 把它代入到式(20)得

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial u_\infty}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial u_\infty}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial u_\infty}{\partial z} \right) = 0 \quad . \quad (21)$$

式(21)就是固结完成时的渗流方程, 与土体稳态渗流方程相同。

3.2节采用真空联合堆载预压, 以便既研究真空预压引起的最终负压, 又揭示边界条件对真空和堆载预压不同的影响规律。3.3~3.5节采用真空预压, 以重点研究真空预压引起的最终负压。

#### 3.2 一维单层地基的最终负压和最终有效应力

在一维单层均质地基条件下渗流方程退化为

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial u_\infty}{\partial z} \right) = 0 \quad . \quad (22)$$

真空预压使加固区域形成一个负压区, 在水力梯度作用下, 下卧层边界或多或少具有一定的透水性, 故加固区底部采用半透水边界, 相应的边界条件取为

$$z = 0, \quad u_\infty = -u_a \quad , \quad (23)$$

$$z = H, \quad \frac{\partial u_\infty}{\partial z} = -\frac{R_L}{H} u_\infty \quad , \quad (24)$$

式中,  $R_L$ 为底层透水系数<sup>[23]</sup>。

对式(22)求解并利用式(24), (25)得

$$u_\infty = -u_a + \frac{R_L z}{(R_L + 1)H} u_a \quad . \quad (25)$$

本节采用真空联合堆载预压, 设堆载压力为  $p_0$ , 故总应力为  $\sigma_z = p_0$ , 真空联合堆载预压引起的最终有效应力由式(19)、(25)得

$$\sigma'_{z\infty} = p_0 + u_a - \frac{R_L z}{(R_L + 1)H} u_a \quad , \quad (26)$$

其中真空预压引起的最终有效应力  $\sigma'_{z\infty}$  为

$$\sigma'_{z\infty} = u_a - \frac{R_L z}{(R_L + 1)H} u_a \quad . \quad (27)$$

当真空预压效果用堆载预压等效时, 根据堆载预压中堆载引起的附加应力等于最终有效应力的性质, 可知与真空预压等效的附加应力  $p_a$  等于式(27)中  $\sigma'_{z\infty}$ 。设土层压缩模量为  $E_s$ , 则真空预压引起的最终沉降为

$$S_{\infty} = \int_0^H \frac{\sigma'_{z\infty}}{E_s} dz = \frac{R_L + 2}{2R_L + 2} \left( \frac{u_a}{E_s} H \right) \quad . \quad (28)$$

真空联合堆载预压产生的总最终沉降为

$$S_{\infty} = \int_0^H \frac{\sigma'_{z\infty}}{E_s} dz = \frac{p_0}{E_s} H + \frac{R_L + 2}{2R_L + 2} \left( \frac{u_a}{E_s} H \right) \quad . \quad (29)$$

根据式(25)绘制的负压随深度衰减特性如图2所示。

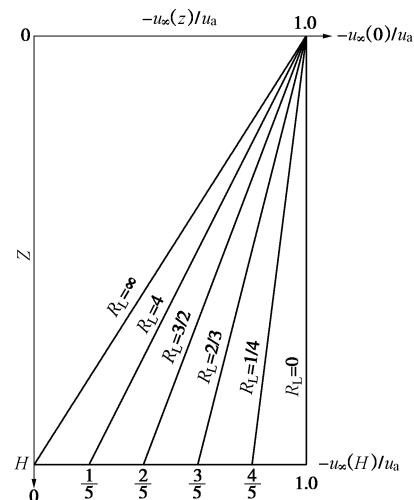


图2 最终负压随深度衰减特性

Fig. 2 Decrease properties of final negative pressure along depth

从式(25)和图2可以看出, 当  $R_L = 0$  即  $\partial u / \partial z = 0$  时底层不透水, 固结完成时的最终负压不随深度  $z$  减小, 其值等于  $-u_a$ 。当  $R_L \neq 0$  时即底层半透水时, 固结完成时的最终负压出现随深度衰减现象,  $R_L$ 越大, 最终负压衰减越快。当  $R_L = \infty$  时, 底部完全透水, 最终负压衰减为零。在真空预压中最终负压通常用“真空度”术语来描述, 图2表明加固区土层底部边界的透水性是造成真空度沿深度衰减的主要原因。真空预压引起的最终竖向有效应力与最终负压互为相反数

(乘以-1), 故上述有关最终负压的研究结论同样适用于真空预压引起的最终竖向有效应力。从式(28)可知, 随着  $R_L$  增大, 真空预压引起的最终竖向沉降逐渐减小。当  $R_L = \infty$  即底部完全透水时, 真空预压引起的最终固结沉降只有底部完全不排水时的一半。式(26)和式(29)中与堆载预压有关的表达式项表明底层透水特性大小变化不会影响堆载预压引起的最终竖向有效应力和最终沉降。故在半透水边界条件下真空预压和堆载预压呈现出明显不同的固结特性。

### 3.3 一维多层地基的最终负压和最终有效应力

设每层地基厚度为  $H_i$ , 渗透系数为  $K_{zi}$ , 第  $n$  层底深度为  $z_n = \sum_{i=1}^n H_i$ , 总厚度为  $\sum_{i=1}^N H_i = H$ , 此时一维条件下固结完成时的渗透方程变为

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( K_{zi} \frac{\partial u_\infty}{\partial z} \right) = 0 \quad . \quad (30)$$

多层地基界面满足连续条件:

$$\text{当 } z = z_n \text{ 时, } u_\infty^+ = u_\infty^-, \quad K_{zn} \frac{\partial u_\infty^+}{\partial z} = K_{z(n+1)} \frac{\partial u_\infty^-}{\partial z} \quad . \quad (31)$$

式(31)中的<sup>+</sup>表示界面上侧, <sup>-</sup>表示界面下侧。上下边界条件与单层地基相同, 如式(23), (24)所示。令

$$\lambda_{Ki} = \frac{K_{zi}}{K_{zN}}, \quad \lambda_{Hi} = \frac{H_i}{H}, \quad \lambda_{K0} = 1, \quad \lambda_{H0} = 0 \quad . \quad (32)$$

求解式(30)并用式(23), (24), (31)得第  $n$  层孔压为

$$u_{\infty n} = -u_a + \frac{R_L u_a}{1 + R_L \sum_{i=1}^N \lambda_{Hi}} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_{Hi}}{\lambda_{Ki}} + \frac{z - z_{n-1}}{\lambda_{Kn} H} \right) \quad . \quad (33)$$

设第  $n$  层土的压缩模量为  $E_{sn}$ , 真空预压土层的总应力为零, 故真空预压最终竖向有效应力  $\sigma'_{\infty n} = -u_{\infty n}$ 。由此可得真空预压引起的最终沉降为

$$S_{\infty n} = \sum_{n=1}^N \left[ 1 - \frac{R_L}{1 + R_L \sum_{i=1}^N \lambda_{Hi}} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_{Hi}}{\lambda_{Ki}} + \frac{\lambda_{Hn}}{2\lambda_{Kn}} \right) \right] \frac{u_a}{E_{sn}} H_n \quad . \quad (34)$$

图3分析了当  $\lambda_{H1} = \lambda_{H2} = 0.5$ 、 $\lambda_{K1} = 0.2$  和  $\lambda_{K2} = 1$  时双层地基底部边界透水系数  $R_L$  对最终负压的影响, 从图中可以看出, 最终负压在双层地基中呈分段线性减小。当  $R_L$  增大时, 最终负压衰减速率也增大, 底部边界处的最终负压越小, 当  $R_L = 3$  时, 底部边界处的最终负压只有顶部最终负压的 0.1 倍。由于  $\lambda_{K1} = 0.2$ , 故场地上层渗透系数小于下层渗透系数, 从图3可以看出, 不管  $R_L$  如何变化, 上层最终负压的衰减速率均大于下层最终负压衰减速率。当地层完全不透水即  $R_L = 0$  时, 最终负压沿深度不会出现衰减现象。由于

$\sigma'_{\infty n} = -u_{\infty n}$ , 即真空预压最终竖向有效应力与最终负压互为相反数, 故上述有关最终负压的规律同样适用于真空预压最终竖向有效应力。

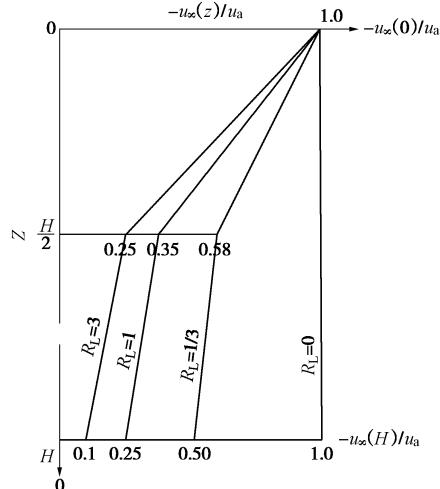


图3 双层地基最终负压随  $R_L$  变化曲线

Fig. 3 Varying curves of final negative pressure with  $R_L$  in double-layered ground

图4分析了当  $\lambda_{H1} = \lambda_{H2} = 0.5$ 、 $\lambda_{K2} = 1$  和  $R_L = 1/3$  时双层地基上下层渗透系数之比  $\lambda_{K1}$  对固结完成时最终负压的影响。

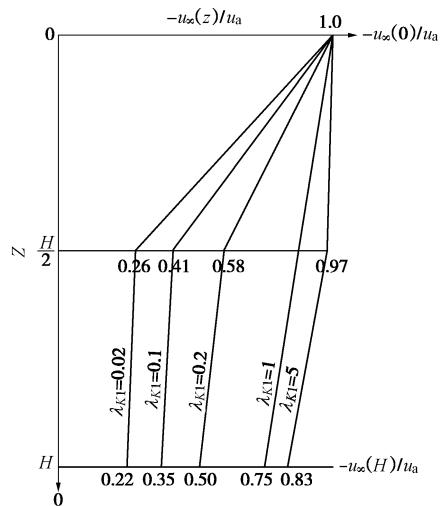


图4 双层地基最终负压随  $\lambda_{K1}$  变化曲线

Fig. 4 Varying curves of final negative pressure with  $\lambda_{K1}$  in double-layered ground

从图4中可以看出, 当  $\lambda_{K1} = 1$  即渗透系数沿深度均匀分布时, 最终负压沿深度呈单一线性衰减, 当  $\lambda_{K1} \neq 1$  时即渗透系数沿深度分段均匀分布时, 最终负压沿深度分段线性衰减。 $\lambda_{K1}$  小于 1, 上层最终负压衰减速率大于下层最终负压衰减速率,  $\lambda_{K1}$  大于 1 时, 上层最终负压衰减速率小于下层最终负压衰减速率。 $\lambda_{K1}$  越小, 上层最终负压衰减越快, 下层最终负压衰减越慢, 底部边界处的最终负压越小。由于

$\sigma'_{z\infty} = -u_{\infty}$ , 即真空预压最终竖向有效应力与最终负压互为相反数, 故上述规律同样适用于最终竖向有效应力沿深度变化特性。从式(33)还可以看出, 当  $R_L = 0$  即底部完全不透水时, 无论  $\lambda_{ki}$  如何变化, 均不会出现最终负压和最终竖向有效应力衰减现象。

### 3.4 砂井地基的最终负压和最终有效应力

计算简图仍如图1所示, 砂井地基的基本假定、固结方程、径向边界条件和顶部边界条件与第2节相同, 底部边界条件根据砂井地基实际状况作如下简化:

$$z = H, \frac{\partial u_w}{\partial z} = -\frac{R_{wL}}{H} u_w \quad . \quad (35)$$

固结完成后有  $\partial \varepsilon_v / \partial t = 0$ , 此时  $u = u_\infty$ ,  $u_w = u_{w\infty}$ ,  $u_\infty$  为固结完成后的土体最终孔压,  $u_{w\infty}$  为固结完成后的砂井孔压。将其代入式(2), (3) 并利用式(6) 得

$$\frac{\partial u_\infty}{\partial r} = 0 \quad . \quad (36)$$

把  $u = u_\infty$ ,  $u_w = u_{w\infty}$  代入式(5), (8), (35) 后, 利用式(8), (35), (36) 求解式(5) 得

$$u_{w\infty}(z) = -u_a + \frac{R_{wL}z}{(R_{wL}+1)H} u_a \quad . \quad (37)$$

利用井壁孔压连续条件  $u_{w\infty}(z) = u_\infty(r_w, z)$  和式(37) 得

$$u_\infty(r, z) = u_\infty(r_w, z) = u_{w\infty}(z) = -u_a + \frac{R_{wL}z}{(R_{wL}+1)H} u_a \quad . \quad (38)$$

最终竖向有效应力由  $\sigma'_{z\infty} = -u_\infty$  和式(38) 得

$$\sigma'_{z\infty}(r_w, z) = u_a - \frac{R_{wL}z}{(R_{wL}+1)H} u_a \quad . \quad (39)$$

式(39) 与  $i_{wL} = u_{wL} = 0$  时的式(18) 相同, 说明两种方法获得的最终结果是一样的。

设压缩模量为  $E_s$ , 则真空预压的最终沉降为

$$S_{a\infty} = \frac{R_{wL} + 2}{2R_{wL} + 2} \left( \frac{u_a}{E_s} H \right) \quad . \quad (40)$$

从上文推导可以看出, 当周边土层为多层地基时式(38)~(40) 依然成立。这说明当砂井地基只考虑径向固结时, 固结完成时的最终负压分布模式只与竖向排水体的渗透特性有关, 而与周边土体的渗透性无关。把式(38)~(40) 与 3.2 节单层地基的式(25), (27), (28) 对比可以看出, 相同物理量的数学表达式在形式上相同, 故当砂井地基竖向排水体通水量沿深度均匀分布时, 真空预压的最终负压和最终竖向有效应力分布特性与 3.2 节的单层地基相同。由于固结完成时的最终负压反映了真空预压真空度的分布规律, 故此时真空度衰减规律也与 3.2 节的单层地基相同。

### 3.5 变通水量砂井地基最终负压和最终有效应力

竖向排水体通水量  $q_w$  反映了从竖向排水体中排

出水体的难易程度, 因此,  $q_w$  随深度的变化规律反映了井阻随深度的变化规律。一些文献认为,  $q_w$  随着围压、变形和施工工艺而发生变化, 因此本节把它视为关于深度的函数, 记为  $q_w(z)$ 。

假定除  $q_w$  随深度变化外其它条件均与 3.4 节相同, 故式(36) 依然成立。利用  $u = u_\infty$  和  $u_w = u_{w\infty}$ , 把式(36) 代入式(5) 并积分得

$$\frac{\partial u_{w\infty}}{\partial z} = \frac{a_1}{q_w(z)} \quad , \quad (41)$$

式中,  $a_1$  为积分常数。求解式(41) 并利用  $u = u_\infty$ 、 $u_w = u_{w\infty}$ 、式(8), (35) 和井壁孔压连续条件  $u_{w\infty}(z) = u_\infty(r_w, z)$  可得最终负压公式为

$$u_\infty = u_{w\infty} = -u_a + \frac{R_{wL} \int_0^z \frac{q_w(H)}{q_w(z)} dz}{H + R_{wL} \int_0^H \frac{q_w(H)}{q_w(z)} dz} u_a \quad . \quad (42)$$

相应的最终竖向有效应力为  $\sigma'_{z\infty} = -u_\infty$ 。根据微积分理论可知, 式(42) 和  $\sigma'_{z\infty} = -u_\infty$  表明当砂井地基的竖向排水体通水量沿深度连续变化时, 最终负压和最终竖向有效应力沿深度按曲线分布。

当竖向排水体根据其通水量分为  $N$  段, 每一段的通水量为常数时, 设第  $n$  段的竖向排水体长度为  $L_{wn}$ , 通水量为  $q_{wn}$ , 第  $n$  段底深度为  $z_{wn} = \sum_{i=1}^n L_{wi}$ , 把这些条件代入到式(42) 得

$$u_\infty = u_{w\infty} = -u_0 + \frac{R_{wL} u_0}{1 + R_{wL} \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_{Li}}{\lambda_{wi}}} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_{Li}}{\lambda_{wi}} + \frac{z - z_{n-1}}{\lambda_{wi} H} \right) \quad . \quad (43)$$

设第  $n$  段竖向排水体所对应土层的压缩模量为  $E_{Sn}$ , 则真空预压最终沉降通过  $\sigma'_{z\infty} = -u_\infty$  对  $\sigma'_{z\infty}$  积分得

$$S_{a\infty} = \sum_{n=1}^N \left[ 1 - \frac{R_{wL}}{1 + R_{wL} \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_{Li}}{\lambda_{wi}}} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_{Li}}{\lambda_{wi}} + \frac{\lambda_{Ln}}{2\lambda_{wn}} \right) \right] \frac{u_a}{E_{Sn}} L_{wn} \quad , \quad (44)$$

式中

$$\lambda_{wi} = \frac{q_{wi}}{q_{wN}}, \quad \lambda_{Li} = \frac{L_{wi}}{H} \quad . \quad (45)$$

图 5 给出了砂井地基当竖向排水体通水量分两段恒定时的最终负压沿深度分布图。绘制图中曲线所用的参数为  $\lambda_{L1} = \lambda_{L2} = 0.5$ ,  $\lambda_{w1} = 0.2$  和  $\lambda_{w2} = 1$ , 以分析了竖向排水体底部边界透水系数  $R_{wL}$  对真空预压最终负压的影响。从图中可以看出, 当竖向排水体通水量分段恒定时, 最终负压呈分段线性减小分布。当  $R_{wL}$  增大时, 最终负压衰减速率也增大, 底部边界处的最终负压越小。当  $R_{wL} = 5$  时, 底部边界处的最终负压只有

顶部最终负压的 0.05 倍。由于  $\lambda_{w1} = 0.2$ , 故场地的上层渗透系数小于下层渗透系数, 从图 5 可以看出, 上层最终负压的衰减速率大于下层最终负压衰减速率。从图 5 还可以看出, 当地层完全不透水即  $R_{wL} = 0$  时, 最终负压沿深度不会出现衰减现象。从式(43)可以看出, 当  $R_{wL} = 0$  即底部完全不透水时, 无论  $\lambda_{wi}$  如何变化, 均不会出现最终负压衰减现象。当  $R_{wL} \neq 0$  且各层的  $\lambda_{wi}$  相等时, 即渗透系数沿竖向排水体均质分布时, 最终负压沿深度单一线性衰减。当  $R_{wL} \neq 0$  且竖向排水体各段的  $\lambda_{wi}$  互不相等时, 最终负压沿深度分段线性衰减。 $\lambda_{wi}$  越小, 该层最终负压衰减越快, 底部边界处的最终负压越小。由于真空预压的最终竖向有效应力与最终负压互为相反数, 故上述规律对真空预压最终竖向有效应力一样成立。

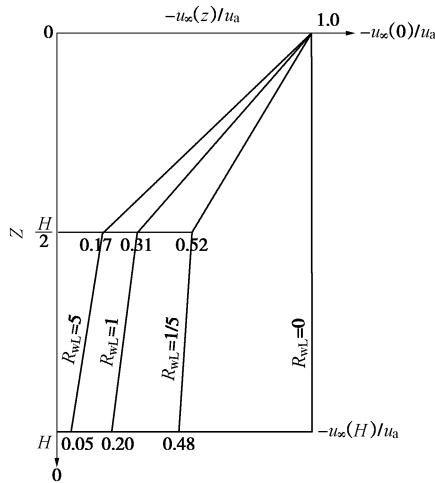


图 5 双层砂井时最终负压随  $R_{wL}$  变化曲线

Fig. 5 Varying curves of final negative pressure with  $R_{wL}$  in double-layered ground

#### 4 算 例

丁天锐等<sup>[24]</sup>依托上海某场地形成工程进行了大面积真空预压地基处理现场试验。工程总面积 1.74 km<sup>2</sup>, 场地范围内地层为第四纪长江三角洲滨海平原型沉积土层, 主要由黏性土、粉性土及砂土组成。场地地表分布有厚度 0.5~6 m 的素填土, 填土下第②层为褐黄~灰黄色粉质黏土, 俗称“硬壳层”, 厚度 0.7~3.2 m; 其下为流塑状的第③层灰色淤泥质粉质黏土和第④层灰色淤泥质黏土; 第⑤层灰色黏性土埋深为 16.5~19.0 m<sup>[24]</sup>。采用真空预压处理的场地面积为 38926 m<sup>2</sup>。真空预压工艺参数为: ①膜下真空度要求大于 80 kPa; ②排水设计采用板宽为 100 mm 的 SPB-C 型塑料排水板, 插入深度 16.5 m; ③密封墙采用直径为 700 mm 的双轴水泥黏土搅拌桩 (掺 0.8% 膨润土), 长 10 m, 搭接长度为 200 mm; ④预压时间为 1 a, 预

压沉降要求达到 550 mm。根据丁天锐等测得真空预压完成时的最终负压随深度变化如图 6 所示。

根据上述地质条件和真空预压施工工艺参数可知, 塑料排水板插入深度为 16.5 m, 故  $H$  取 16.5 m。主要加固地层为流塑状的第③层和第④层软土, 厚度约 8.5 m 左右。由于该深度范围内的软土变形大, 塑料排水板容易弯曲; 同时细小颗粒多, 容易造成塑料排水板某种程度堵塞, 故该段塑料排水板的渗透系数应予以折减。本文根据上述情况把塑料排水板分为两段。上部硬壳层和素填土范围内的塑料排水板为第一段, 长度为 8.0 m; 第③和第④层软土范围内的塑料排水板为第二段, 长度为 8.5 m, 故由式(45)可知  $\lambda_{L1} = 0.485$ ,  $\lambda_{L2} = 0.515$ 。假定塑料排水板的截面积相同, 从式(45)可知  $\lambda_{w2} = 1$ ,  $\lambda_{w1} = q_{w1}/q_{w2} = K_{w1}/K_{w2}$ , 第一层塑料排水板的渗透系数在预压前后几乎保持不变, 故  $\lambda_{w1}$  即为第二层塑料排水板渗透系数的折减倍数, 反映了第二层塑料排水板渗透系数减小的影响。由于该真空预压场地四周采用水泥黏土搅拌桩密封墙封闭, 故四周密封效果相对较好, 但场地底部下卧层第⑤层灰色黏性土的渗透系数与软土渗透系数相当, 故底部边界仍会渗透, 渗透系数  $R_{wL}$  约为  $0.15\lambda_{w1}$ 。由此按式(43)可得该真空预压场地  $\lambda_{w1}$  对最终负压沿深度分布规律的影响如图 6 所示。

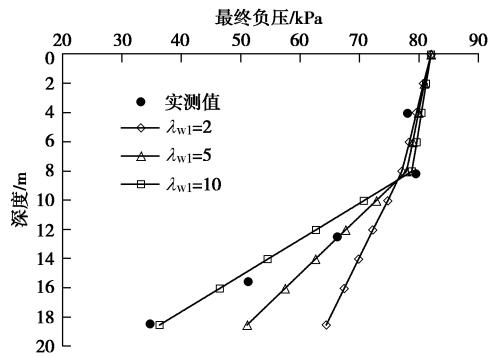


图 6 最终负压随深度分布曲线

Fig. 6 Distribution curves of final negative pressure along depth in vacuum preloading

从图 6 可以看出, 实测和理论分析所获得的最终负压均呈现出沿深度分段线性减小规律,  $\lambda_{w1}$  变化对砂井地基最终负压分布产生明显影响, 当  $\lambda_{w1}$  增大时, 会明显增大第二段塑料排水板最终负压的衰减速率, 减少砂井底部最终负压值。造成这一结果的原因是淤泥质软土范围内的颗粒较细, 变形大, 该地层范围内的塑料排水板出现一定的弯折和淤堵, 使得渗透系数出现不同程度的降低。由于塑料排水板的初始通水量较大, 这些弯折和淤堵可能不会对砂井固结产生较大影响, 却会明显增加淤塞段真空预压最终负压的衰减

速率。从式(43)、(45)可以看出, 真空预压最终负压沿深度衰减速率与竖向排水体上下段渗透系数之比密切相关。图6表明当 $\lambda_{w1} = 10$ 时, 理论分析和测试结果吻合的较好, 说明本文模型可以较合理模拟真空预压最终负压随深度变化特性, 呈现真空调度沿深度复杂的衰减特性。

## 5 结 论

本文通过一维半透水边界地基模型, 从数学物理方程非齐次边界的齐次化理论和固结完成后的稳态渗流方程两种方法出发, 根据Terzaghi有效应力原理, 分析了真空预压最终负压和最终竖向有效应力分布特性, 得出如下结论:

(1) 当渗流固结方程符合线性偏微分方程时, 真空预压固结效果可以采用堆载预压等效, 等效附加应力可以采用非齐次边界的齐次化理论来推导。真空预压最终负压和最终竖向有效应力分布特性可以通过非齐次边界的齐次化理论来分析。

(2) 对于多层地基或竖向排水体通水量分段恒定的砂井地基, 当地层边界半透水时, 若各层渗透系数(或各段通水量)相等时最终负压沿深度单一线性衰减; 当各层渗透系数(或各段通水量)不相等时最终负压沿深度分段线性衰减; 当底层边界不透水时, 最终负压不随深度衰减。

(3) 对于多层地基或竖向排水体通水量分段恒定的砂井地基, 该层渗透系数(或该段通水量)与最底层渗透系数(或最低段通水量)的比值越小, 最终负压衰减越快, 底层边界处的最终负压值越小。

(4) 由于真空预压引起的最终竖向有效应力是最终负压的相反数, 故上述结论对真空预压产生的最终竖向有效应力沿深度分布规律同样适用。

## 参考文献:

- [1] 闫澍旺, 陈环. 用真空加固软土地基的机制与计算方法[J]. 岩土工程学报, 1986, 8(2): 35 - 44. (YAN Shu-wang, CHEN Huan. Mechanism and calculation methods of vacuum stabilization of soft clay[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1986, 8(2): 35 - 44. (in Chinese))
- [2] CHU J, YAN W, YANG H. Soil improvement by the vacuum preloading method for an oil storage station[J]. Géotechnique, 2000, 50(6): 625 - 632.
- [3] 董志良. 堆载及真空预压砂井地基固结解析理论[J]. 水运工程, 1992(9): 1 - 7. (DONG Zhi-liang. Consolidation theory on heaped load & vacuum preloading of sand drain foundation[J]. Port & Water Engineering, 1992(9): 1 - 7. (in Chinese))
- [4] 彭勘, 刘汉龙, 陈永辉, 等. 真空-堆载联合预压法软基加固对周围环境的影响[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(5): 656 - 659. (PENG Jie, LIU Han-long, CHEN Yong-hui, et al. Effect of soft ground under preloading with vacuum preloading on environment[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(5): 656 - 659. (in Chinese))
- [5] INDRARATNA B, RUJIKIATKAMJORN C, SATHANANTHAN L. Analytical and numerical solutions for a single vertical drain including the effects of vacuum preloading[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2005, 42(4): 994 - 1014.
- [6] CHAI J C, CARTER J P, HAYASHI S. Vacuum consolidation and its combination with embankment loading[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2006, 43(10): 985 - 996.
- [7] RUJIKIATKAMJORN C, INDRARATNA B. Analytical solutions and design curves for vacuum-assisted consolidation with both vertical and horizontal drainage[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2007, 44: 188 - 200.
- [8] 周琦, 张功新, 王友元, 等. 真空预压条件下的砂井地基 Hansbo 固结解[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(增刊2): 3994 - 3998. (ZHOU Qi, ZHANG Gong-xin, WANG You-yuan, et al. Hansbo consolidation solution for and-drained ground under vacuum preloading[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(S2): 3994 - 3998. (in Chinese))
- [9] 郭彪, 龚晓南, 卢萌盟, 等. 真空联合堆载预压下竖井地基固结解析解[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(6): 1045 - 1054. (GUO Biao, GONG Xiao-nan, LU Meng-meng, et al. Analytical solution for consolidation of vertical drains by vacuum-surcharge preloading[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(6): 1045 - 1054. (in Chinese))
- [10] 鲍树峰, 周琦, 陈平山, 等. 负压非均匀分布边界条件下砂井地基固结解析[J]. 水运工程, 2015, 501(3): 12 - 20. (BAO Shu-feng, ZHOU Qi, CHEN Ping-shan, et al. Consolidation analysis for sand drains foundations with non-uniform distribution of negative pressure boundary condition[J]. Port & Waterway Engineering, 2015, 501(3): 12 - 20. (in Chinese)).
- [11] 蒋基安, 陈海英, 陈越, 等. 排水板真空调度损耗的排水固结解析解[J]. 岩土工程学报, 2016, 38(3): 404 - 418. (JIANG Ji-an, CHEN Hai-ying, CHEN Yue, et al. Analytical solutions to drainage consolidation considering vacuum loss

- in prefabricated vertical drain[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, **38**(3): 404 - 418. (in Chinese))
- [12] 吴跃东, 吴鸿昇, 罗如平, 等. 考虑真空度衰减及涂抹区渗透系数变化的真空预压固结解析解[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2016, **44**(2): 122 - 128. (WU Yue-dong, WU Hong-sheng, LUO Ru-ping, et al. Analytical solutions for vacuum preloading consolidation considering vacuum degree attenuation and change of permeability coefficient in smear zones[J]. Journal of Hohai University (Natural Science), 2016, **44**(2): 122 - 128. (in Chinese))
- [13] 朱群峰, 高长胜, 杨守华, 等. 超软淤泥地基处理中真空度传递特性研究[J]. 岩土工程学报, 2010, **32**(9): 1429 - 1432. (ZHU Qun-feng, GAO Chang-sheng, YANG Shou-hua, et al. Transfer properties of vacuum degree in treatment of super-soft muck foundation[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, **32**(9): 1429 - 1432. (in Chinese))
- [14] 唐彤芝, 董江平, 黄家青, 等. 薄砂层长短板结合真空预压法处理吹填淤泥土试验研究[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(5): 899 - 905. (TANG Tong-zhi, DONG Jiang-ping, HUANG Jia-qing, et al. Experimental research on hydraulic filled mud consolidated by vacuum preloading method combining long and short boards with thin sand cushions[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(5): 899 - 905. (in Chinese))
- [15] 姜彦彬, 何 宁, 许滨华, 等. 真空预压负压分布规律模型试验研究[J]. 岩土工程学报, 2017, **39**(10): 1834 - 1883. (JIANG Yan-bin, HE Ning, XU Bin-hua, et al. Model tests on negative pressure distribution in vacuum preloading[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2017, **39**(10): 1834 - 1883. (in Chinese))
- [16] ZHANG Zhen, YE Guan-bao, XU Yan. Comparative analysis on performance of vertical drain improved clay deposit under vacuum or surcharge loading[J]. Geotextiles and Geomembranes, 2018, **46**:146 - 154.
- [17] 胡亚元. 半透水边界砂井地基的真空预压固结[J]. 工程科学与技术, 2018, **50**(2): 32 - 41. (HU Ya-yuan. Consolidation solution for sand-drained ground with impeded boundaries under vacuum preloading[J]. Advanced Engineering Sciences, 2018, **50**(2): 32 - 41. (in Chinese))
- [18] 胡亚元. 半透水边界砂井真空联合堆载预压 Hansbo 固结解[J]. 工程科学学报, 2018, **40**(7): 783 - 792. (HU Ya-yuan. A Hansbo's consolidation solution of sand-drained ground with impeded boundaries under vacuum and surcharge preloading[J]. Chinese Journal of Engineering, 2018, **40**(7): 783 - 792. (in Chinese))
- [19] 岑仰润, 俞建霖, 龚晓南. 真空排水预压工程中真空度的现场测试与分析[J]. 岩土力学, 2003, **24**(4): 603 - 605. (CEN Yang-run, YU Jian-lin, GONG Xiao-nan. Field test and analysis of vacuum pressure in vacuum drainage preloading[J]. Rock and Soil Mechanics, 2003, **24**(4): 603 - 605. (in Chinese))
- [20] 仲 彦, 赵 岩, 尹长权. 真空荷载的几种表述及其应用[J]. 中国港湾建设, 2014(10): 23 - 26. (ZHONG Yan, ZHAO Yan, YI Chang-quan. Some expressions of vacuum load and their application[J]. China Harbour Engineering, 2014(10): 23 - 26. (in Chinese))
- [21] 谢康和, 曾国熙. 等应变条件下的砂井地基固结解析理论[J]. 岩土工程学报, 1989, **11**(2): 3 - 17. (XIE Kang-he, ZENG Guo-xi. Analytical theory of sand-drained ground under equal strain condition[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1989, **11**(2): 3 - 17. (in Chinese))
- [22] HANSBO S. Consolidation of fine-grained soils by prefabricated drains[C]// Proceedings of the 10th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Stockholm, 1981: 677 - 682.
- [23] 王瑞春, 谢康和. 半透水边界的竖向排水井地基粘弹性固结分析[J]. 长江科学院院报, 2001, **18**(6): 33 - 36. (WANG Rui-chun, XIE Kang-he. Analysis of viscoelastic consolidation of soil foundations by vertical drain wells considering semi-permeable boundary[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 2001, **18**(6): 33 - 36. (in Chinese))
- [24] 丁天锐, 叶观宝, 许 言, 等. 场地形成工程处理效果及真空度传递研究[J]. 公路交通科技(应用技术版), 2016(5): 156 - 158. (DING Tian-rui, YE Guan-bao, XU Yan, et al. Study on treatment effects and vacuum transfer in site formation engineering[J]. Journal of Highway and Transportation (Applied Science and Technology Edition), 2016(5): 156 - 158. (in Chinese))