

DOI: 10.11779/CJGE201906009

# 基于 Kötter 方程的盾构掘进面上被切削土体受力研究

苏伟林, 李兴高\*, 金大龙

(北京交通大学城市地下工程教育部重点实验室, 北京 100044)

**摘要:** 为了计算不同土体性质与不同掘进参数下盾构刮刀与土体之间的作用力以及由此带来的切削扭矩, 引入了修正后的 Kötter 方程作为补充方程, 求解出开挖面上土体在被动切削至破坏时滑动面上的应力分布, 建立了被切削土体受力模型, 求解出刮刀刃面与土体之间的正压力  $P$ 、摩擦力  $Q$  与侧向土体间抗剪阻力  $U$ , 进而推导出刀盘切削扭矩  $T$  的计算公式。分析得到特定刀盘上刮刀的  $P$ ,  $Q$ ,  $U$  值随土体  $c$ ,  $\phi$  值增大而增大, 通过适当提高刮刀刃面粗糙度来增大摩擦可使土体更易被切至破坏;  $P$ ,  $Q$ ,  $U$  值随刀盘转速  $\omega$  增大而减小,  $P$ ,  $Q$  随支护荷载  $p$  线性增大且  $p$  对于被切削土体受力的影响在砂性土中较大, 最终给出特定刀盘掘进至部分种类土体中的切削扭矩值作为工程参考。

**关键词:** Kötter 方程; 盾构刮刀; 被切削土体; 滑动面应力; 刀具受力; 切削扭矩

中图分类号: TU921

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2019)06-1058-08

**作者简介:** 苏伟林(1990—), 男, 博士研究生, 主要从事盾构法隧道建设方面的研究。E-mail: suwelin@126.com。

## Force states of soils under shield cutting in excavation face based on Kötter equation

SU Wei-lin, LI Xing-Gao, JIN Da-long

(Key Laboratory of Urban Underground Engineering of Ministry of Education, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract:** To calculate the forces between shield scraper and soils as well as the cutting torque caused by them with different tunneling parameters in different soils, a modified Kötter equation is introduced as a supplement to solve the stress distribution on the sliding face when the soils in excavation face are being passively cut to a damage state. A mechanical model for cutting soils is established, and the pressure and friction between the soils and the surface of shield scraper and the lateral shear resistance are solved. Then the method for calculating the cutting torque of cutter head is derived. It can be acquired that the pressure, friction and lateral shear resistance increase with the cohesive force and internal friction angle and decrease with the rotation rate, which illustrates that a properly coarser scraper surface makes the soils easier to be cut, and a lower rotation rate can reduce the force of the tools. The pressure and friction increase linearly with the shield support pressure, which is more obvious in sand. Some cutting torques in different soil types are given as engineering references ultimately.

**Key words:** Kötter equation; shield scraper; cutting soil; sliding face stress; tool force; cutting torque

## 0 引言

盾构法隧道建设过程中, 根据不同工程要求进行盾构机的选型与定制, 并在施工中视地质条件与工况对盾构掘进参数作实时调整, 是隧道顺利施工的先决条件与重要保障<sup>[1]</sup>。因此, 探究不同地质条件下开挖面土体在破坏时与刀具之间的相互作用, 分析开挖面土体性质与掘进参数中各因素对被切削土体受力、盾构机刮刀受力及切削扭矩的影响, 最终实现盾构机刀盘、土体性质与掘进参数三者的相互适应具有重要意义<sup>[2]</sup>。

针对土体切削及受力情况, H Γ 陀勃罗夫斯基等<sup>[4]</sup>计算了挖掘机斗齿的挖掘阻力, 认为切削力由两部分组成, 分别是直接克服斗齿前刃面的阻力与侧刃面黏

着引起的阻力; Evans<sup>[5]</sup>针对切煤情况, 按照最大拉应力理论对切削力进行了计算; Nishimastu<sup>[6]</sup>采用 Mohr-Coulomb 理论, 在无侧向断裂和流动的假设下推算出切削力; 暨智勇<sup>[7]</sup>以 I. Evans 楔形刀具切割煤岩的切削阻力模型为基础, 同时考虑切刀与岩石之间的摩擦力影响以及刀具垂直推进力的作用推导出盾构切削软岩的受力模型; 崔国华等<sup>[8]</sup>基于 Rankine 土压力理论提出了盾构刮刀的荷载计算方法。

以上一系列的研究为土体在切削作用下的受力状

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(“973”计划)(2015CB057800)

收稿日期: 2018-05-02

\*通讯作者 (lxg\_njtu@163.com)

态分析奠定了坚实的理论基础, 但对于软土盾构中刮刀切削土体工况的适用性不佳。其中, H Γ 陀勃罗夫斯基与 IO A 特维洛夫模型未考虑土体表面超载的情况; I. Evans 模型与西松模型均是针对岩石切削而提出, 假定的破坏面分别为圆弧与直线, 而土体在被动剪切下的滑动面更接近于对数螺旋线<sup>[9]</sup>; 而采用 Rankine 土压力理论计算时, 其对土体滑动面上的应力分布情况没有进行求解。

盾构机掘进时刮刀切削土体过程可以看作是土体在刀体作用下沿滑动面发生被动剪切破坏的过程, 被切削土体在破坏时, 土、刀之间的作用力与滑动面上的应力分布有着密切的关系, 而 Kötter 方程则是描述滑动面上应力沿滑动曲线分布规律的微分方程。本文引入修正后的 Kötter 方程作为补充方程, 考虑开挖面土体黏聚力与内摩擦角、刀具前角、掘进参数及支护压力等因素的影响, 求解开挖面上土体在盾构切削条件下到达破坏状态时滑动面上的应力分布情况, 并据此计算盾构刮刀受力情况与克服切削阻力所需的最小扭矩, 为盾构掘进至不同地质情况下的刀具选用与掘进参数选择提供一定的理论依据。

## 1 Kötter 方程简介

1903 年德国学者 Fritz Kötter<sup>[10]</sup>通过对极限平衡状态下水平砂土的微分平衡方程与 Mohr-Coulomb 屈服准则的联立求解, 建立了水平砂土体滑动面上的应力状态方程, 即 Kötter 方程, 具体推导过程如下:

如图 1 (a) 所示, 当土体处于主动或被动平衡状态时, 满足平衡微分方程:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \gamma \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

式中  $\sigma_x, \sigma_y$  为土体沿坐标轴方向上的正应力;  $\tau_{xy}, \tau_{yx}$  为土体沿坐标轴方向上的切应力且  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ;  $\gamma$  为土体重度。

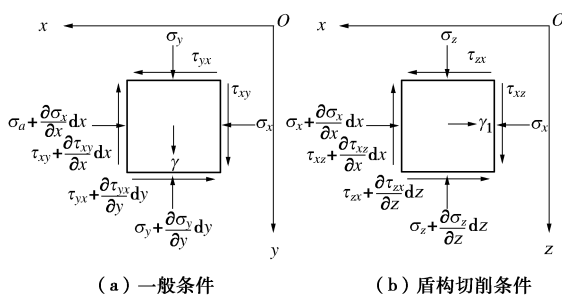


图 1 土体微单元受力

Fig. 1 Stresses on soil unit

如图 2 所示, 若土体处于极限平衡状态, 即 AC

面为土体破坏时的滑动面时, 土体材料满足 Mohr-Coulomb 屈服准则:

$$\tau = \sigma \tan \varphi + c \quad (3)$$

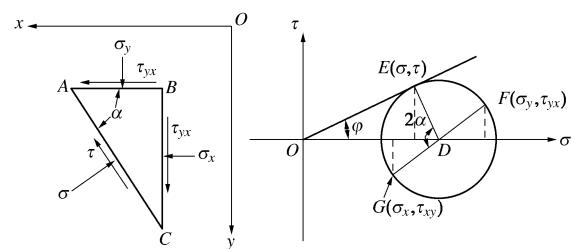
式中  $\sigma, \tau$  分别为与  $x$  轴夹角为  $\alpha$  的 AC 面上的正应力与剪应力;  $\varphi$  为土体内摩擦角;  $c$  为土体黏聚力, 土体为砂土时  $c=0$ 。根据图 2 (b) 所示砂土体应力莫尔圆,  $\sigma, \tau$  与各坐标面上应力之间存在以下关系:

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\cos^2 \varphi} [1 - \sin \varphi \sin(2\alpha + \varphi)] \quad (4)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma}{\cos^2 \varphi} [1 + \sin \varphi \sin(2\alpha + \varphi)] \quad (5)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \pm \sigma \cot \varphi \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \cos(2\alpha + \varphi) \quad (6)$$

需要说明的是, 本文剪应力  $\tau$  取顺时针为正, 即图 2 (b) 中 OE 位于一象限。当  $\tau$  与  $x$  轴的夹角为锐角时, 土体处于主动破坏极限状态; 否则, 土体处于被动破坏极限状态。



(a) 土体滑动面受力

(b) 砂土体应力莫尔圆

图 2 土体极限平衡状态受力

Fig. 2 Limit equilibrium stresses on soils

将式 (4) ~ (6) 分别求偏导后代入式 (1)、(2), 联立化简得到 Kötter 方程的表达式:

$$\frac{d\sigma}{dl} \mp 2\sigma \tan \varphi \frac{d\alpha}{dl} = \gamma \cos \varphi \sin(\alpha + \varphi) \quad (7)$$

式中,  $l$  为土体二维破坏模型中滑动面弧长, 满足  $\sin \alpha = \frac{dy}{dl}$ 。当 “ $\mp$ ” 符取 “ $-$ ” 号时, 式 (7) 表示

砂土体主动极限平衡状态; 当 “ $\mp$ ” 符取 “ $+$ ” 号时, 式 (7) 表示砂土体被动极限平衡状态。

为了扩展 Kötter 方程的适用范围, I Jaky<sup>[11]</sup>指出 Kötter 方程通过变换可以适用于黏性土; 孔德顺<sup>[11]</sup>根据 Kötter 方程的推导方法, 阐述了倾斜黏性土体被动土压力计算方法。

### 1.1 盾构切削下 Kötter 方程修正

由于开挖面为竖直平面, 且为了防止开挖面失稳坍塌, 开挖面一般存在着土舱压力、刀盘压力等盾构支护压力, 因此该条件下与一般水平方向的静止土压力计算有着明显的不同之处, 为了在盾构切削条件下应用 Kötter 方程, 需要对一般情况下的 Kötter 方程加以修正。

首先, 为了建立竖直开挖面上刮刀旋转至任意角度时被切削土体的微分平衡方程, 取开挖面上盾构刮刀运动轨迹切向为  $x$  轴, 盾构机掘进方向为  $z$  轴 (如图 3 所示), 建立直角坐标系  $xOz$ , 并令坐标系  $xOz$  所在平面与水平方向夹角为  $\lambda$ , 将图 1(a) 所示的  $xOy$  平面上的土体单元微分平衡状态修改为图 1(b) 所示  $xOz$  面上的情况。

其次, 随着刀具旋转, 不同切削部位土体的重力对于被动土压力的影响不同; 如图 3 所示, 开挖面上安装半径为  $R$  的盾构刮刀 (阴影区域) 从水平方向沿盾构中心  $O$  点旋转任意角度  $\lambda$  时, 切削土体的重力可以分解为径向分量  $\gamma \sin \lambda$  和切向分量  $\gamma \cos \lambda$ , 径向分量对刀具正面受力不产生影响, 故令

$$\gamma_1 = \gamma \cos \lambda, \quad (8)$$

$$\gamma_2 = \gamma \sin \lambda, \quad (9)$$

式中,  $\lambda$  为刮刀相对水平方向的旋转角度,  $\lambda \in [0, 2\pi]$ ;  $\gamma_1$  为土体重度中对刮刀刃面受力产生影响的沿刀盘旋转方向的切向分量, 其方向如图 3 所示。

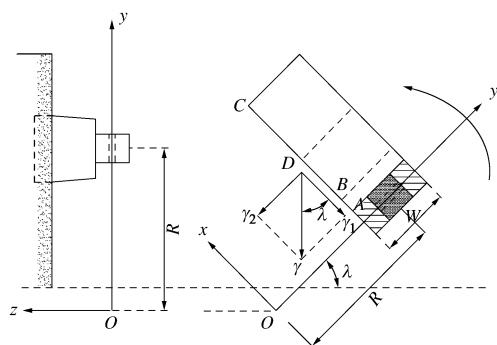


图 3 刀盘旋转时土体重力分解

Fig. 3 Gravity decomposition under rotation of cutterhead

根据图 1(b) 所示微单元在  $x$  方向和  $z$  方向分别受力平衡, 建立该条件下土体的微分平衡方程:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\gamma_1. \quad (11)$$

对于各类土体 (黏性土、砂性土等), 当刀具切削土体达至被动极限平衡状态时, 根据土体破坏面与  $x$  轴正向的夹角关系, 该状态下滑动面上的土体受力模型如图 4 所示。

图 4(a) 中可根据破坏面上的剪应力方向判别此时土体处于被动破坏状态, 图 4(b) 中  $HE$  位于第三、四象限, 土体破坏面上应力满足式 (3) 且一般情况下  $c \neq 0$ , 此时根据土体滑动面上极限平衡状态方程, 式 (4) ~ (6) 变为

$$\sigma_x = \frac{\sigma + c \cot \varphi}{\cos^2 \varphi} [1 - \sin \varphi \sin(2\alpha + \varphi)] - c \cot \varphi, \quad (12)$$

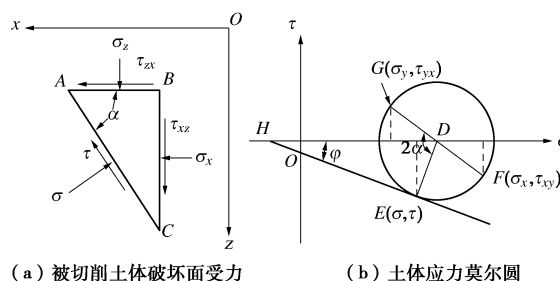
$$\sigma_z = \frac{\sigma + c \cot \varphi}{\cos^2 \varphi} [1 + \sin \varphi \sin(2\alpha + \varphi)] - c \cot \varphi, \quad (13)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -(c + \sigma \cot \varphi) \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \cos(2\alpha + \varphi). \quad (14)$$

此时将式 (12)、式 (13) 和式 (14) 分别求偏导后代入式 (10) 和 (11), 经化简可得:

$$\frac{d\sigma}{dl} + 2(\sigma + c \cot \varphi) \tan \varphi \frac{d\alpha}{dl} = -\gamma \cos \lambda \cos \varphi \cos(\alpha - \varphi). \quad (15)$$

式 (15) 即开挖面土体受盾构刀具切削达到极限平衡下时滑动面应力所满足的修正 Kötter 方程, 当  $c = 0$  时, 方程简化为无黏性砂土体被切削时的情况。与式 (7) 不同的是, 该式中  $\sin \alpha = \frac{dz}{dl}$  且破坏面上的应力大小与盾构刮刀随刀盘旋转角度  $\lambda$  有关。



(a) 被切削土体破坏面受力 (b) 土体应力莫尔圆

图 4 土体被动极限平衡状态受力

Fig. 4 Passive limit equilibrium stresses on soils

## 1.2 被切削土体受力影响因素

由 1.1 节中 Kötter 方程的修正过程可知, 该方程可用于求解盾构切削条件下竖直开挖面上土体达到破坏时滑动面上的应力。

根据式 (15), 被切削土体滑动面上的应力状态与土体参数  $c$ ,  $\varphi$  及刀具旋转角度  $\lambda$  均有关, 因此, 被切削土体滑动面上的应力状态不仅受土体性质影响, 而且与刮刀所处刀盘上的位置有关。

此外, 对于刮刀具而言, 影响其受力的因素还包括刀体宽度  $W$ 、刀刃前角  $\varepsilon$ 、切入深的  $h$  和开挖面上的支护荷载  $p$ , 因此盾构刀具切削下土体所受合力  $F$  可以用以下函数表示:

$$F = f(c, \varphi, \gamma, \lambda, R, W, \varepsilon, h, p). \quad (16)$$

## 2 被切削土体受力模型

为了开挖面土体在被动切削条件下的受力情况, 基于 Kötter 方程建立盾构被切削土体二维受力模型, 同时认为土体侧面受剪破坏受到相应的抗力, 现作出以下基本假设:

(1) 被切削土体为匀质土体, 具有各向同性, 并满足 Mohr-Coulomb 屈服准则。

(2) 切削土体处于被动破坏时, 形成滑块体, 滑动面通过刀尖, 且被动破坏滑动面由一个平面与一个对数螺旋曲面共同构成<sup>[9]</sup>。

(3) 滑动面应力在刀宽两侧边缘分布规律复杂, 不利于对土体受力进行求解, 而且刀刃宽度一般是切入深度的 5~10 倍, 通常可以假设滑动面应力分布沿刀刃宽度方向不变<sup>[4]</sup>。所以尽管被切削土体受力并不是严格意义上的平面应变问题(刀刃宽度有限), 本文仍将被切削土体受力模型近似为平面应变模型处理。

## 2.1 刮刀刃面土体受力模型

土体在盾构刮刀切削平面  $AC$  上支护荷载  $q$  与  $AB$  面上刮刀作用力的共同作用下发生被动剪切破坏, 其中,  $AB$  面上刮刀作用力  $F$  可分解为垂直于  $AB$  的力与平行于  $AB$  的力, 即正压力  $P$  与摩擦力  $Q$ 。取受被动切削达到极限平衡状态的二维土体滑动区域建立切削土体受力模型, 如图 5 所示, 以盾构机前进方向为  $z$  轴,  $AC$  为  $x$  轴,  $A$  点为原点建立直角坐标系  $xAz$ , 刀面  $AB$  与  $z$  轴夹角为  $\varepsilon$ , 即刮刀的前角为  $\varepsilon$ 。

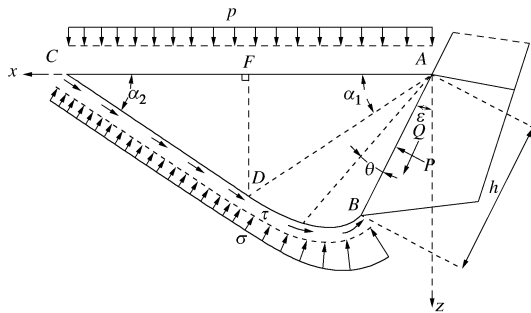


图 5 被切削土体受力模型

Fig. 5 Force model for soils under cutting

根据假设, 土体在被动土压力下受剪破坏时, 滑动面轮廓由直线  $CD$  和对数螺旋线  $BD$  组成, 对数螺旋线方程为

$$r = he^{\theta \tan \varphi} \quad (17)$$

式中,  $r$  为对数螺旋线极径,  $h$  为刀具切入土体部位长度, 即直线  $AB$  的长度,  $\theta$  为对数螺旋线极角。

滑动面与  $x$  轴之间的夹角为  $\alpha$ , 则滑动面直线段  $CD$  上  $\alpha$  为常数  $\alpha_2$ , 此时滑动角  $\alpha_2 = \pi/4 - \varphi/2$ ; 数螺旋线  $BD$  段上  $\alpha$  随  $\theta$  变化, 满足:

$$\alpha = \theta + \varepsilon - \varphi \quad (18)$$

式中,  $\varepsilon$  为刮刀面与  $z$  轴之间的夹角, 即刀刃前角。

## 2.2 基于修正 Kötter 方程求解

滑动面  $BDC$  上应力满足式 (15), 该式可变形为

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dl} + 2\sigma \tan \varphi \frac{d\alpha}{dl} + 2c \frac{d\alpha}{dl} = -\gamma \cos \lambda \cos \varphi \cos(\alpha - \varphi) \quad (19)$$

根据几何关系及对数螺旋线方程, 有

$$dl = r \sec \varphi d\theta = r \sec \varphi d\alpha \quad (20)$$

$$\frac{d\alpha}{dl} = \frac{1}{r} \cos \varphi = \frac{1}{he^{\theta \tan \varphi}} \cos \varphi \quad (21)$$

将式 (21) 代入式 (19) 得

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} + 2\sigma \tan \varphi = -\gamma \cos \lambda \cos(\alpha - \varphi) he^{\theta \tan \varphi} - 2c \quad (22)$$

求解该微分方程得到土体在被动切削下滑动面上的正应力表达式:

$$\sigma = C_1 e^{-2\alpha \tan \varphi} - \frac{c}{\tan \varphi} - \frac{\gamma h \cos \lambda e^{(\alpha - \varepsilon + \varphi) \tan \varphi} [\sin(\alpha - \varphi) + 3 \tan \varphi \cos(\alpha - \varphi)]}{9 \tan^2 \varphi + 1} \quad (23)$$

式中,  $C_1$  为方程求解常数。

盾构掘进时施加在开挖面上单位的支护压力用垂直于切削平面  $AC$  的均布荷载  $p$  表示, 由滑动面上直线段与对数螺旋线段切点  $D$  向  $AC$  作垂线段  $DF$ , 则滑动区域可以分为  $CDF$  和  $ABDF$  两个区域。

对于极限平衡状态下的滑动区域  $CDF$ ,  $DF$  上应力为大主应力  $\sigma_1$ ,  $CF$  上应力为小主应力  $\sigma_3 = p$ , 即此时  $DF$  上不存在剪应力, 设滑动土体在  $DF$  上的内力为  $I$ , 隔离  $CDF$  区域进行受力分析, 如图 6 所示。

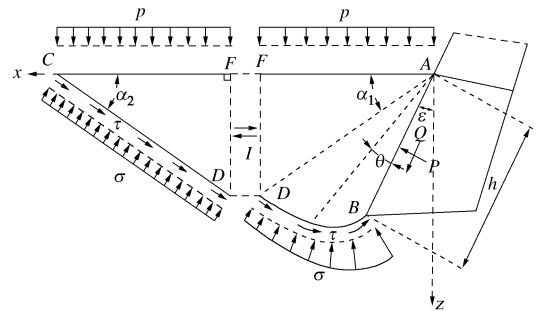


图 6 被切削土体受力模型隔离分析

Fig. 6 Isolated force model for soils under cutting

根据面  $CDF$  在  $z$  向上受力平衡关系  $\sum z=0$ , 得

$$\sigma(1 - \tan \alpha_2 \tan \varphi) - c \tan \alpha_2 = p \quad (24)$$

将式 (23) 代入式 (24), 可解得微分常数

$$C_1 = \frac{\gamma h \cos \lambda e^{\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \varepsilon\right) \tan \varphi}}{(32 \cos^2 \varphi - 36) \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}\right)} \cdot \left[ 3\sqrt{2} \sin 2\varphi (\cos 2\varphi + \sin \varphi) + 2\sqrt{2} \cos^3 \varphi (\cos 2\varphi - \sin \varphi) - \sin^2 2\varphi \left(\cos \frac{3\varphi}{2} - \sin \frac{3\varphi}{2}\right) \right] + \frac{\left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2}\right) (c \cos \varphi + p \sin \varphi)}{\tan \varphi \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}\right)} \quad (25)$$

将式 (25) 代入式 (23) 可以得到

$$\sigma = N_\gamma \cdot \gamma h \cos \lambda + N_c \cdot c + N_p \cdot p \quad (26)$$

式中

$$N_\gamma = \frac{\sin 3\varphi \cos \varphi (3 \sin \varphi + \cos \varphi)}{(16 \cos^2 \varphi - 18) \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} e^{\left( -2\alpha + \frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \varepsilon \right) \tan \varphi} - \frac{3 \tan \varphi \cos(\alpha - \varphi) - \sin(\alpha - \varphi)}{64 - 72 \sec^2 \varphi} e^{(\alpha + \varphi - \varepsilon) \tan \varphi},$$

$$N_c = \frac{\cos \varphi \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\left( -2\alpha + \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \tan \varphi} + 1}{8 \tan \varphi},$$

$$N_p = \frac{1}{8} \cos \varphi \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\left( -2\alpha + \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \tan \varphi}.$$

式(26)即土体在被动切削下滑动面  $\widehat{BDC}$  上的正应力解,该解为3项之和,即滑动面上的应力状态是土体面重力  $\gamma h \cos \lambda$ 、土体黏聚力  $c$  与开挖面支护荷载  $p$  三者共同作用的结果。

再根据隔离区域  $CDF$  在  $x$  方向上的受力平衡关系  $\sum x=0$ , 可得滑土体在  $DF$  上内力  $I$  的表达式为

$$I = \bar{\sigma} L_1 \cos \alpha_2 + \bar{\tau} L_1 + \frac{1}{2} \gamma_1 L_1^2 \tan \alpha_2, \quad (27)$$

式中,  $\bar{\sigma}$  为  $\alpha=\alpha_2$  时  $\sigma$  的取值,  $\bar{\tau}$  为  $\alpha=\alpha_2$  时  $\tau$  的取值即

$$\bar{\tau} = \bar{\sigma} \tan \varphi + c, \quad (28)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma \Big|_{\alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}} = N_{\gamma_1} \cdot \gamma h \cos \lambda + N_{c1} \cdot c + N_{p1} \cdot p, \quad (29)$$

式中,  $N_{\gamma_1}$ ,  $N_{c1}$ ,  $N_{p1}$  分别为  $\alpha=\alpha_2$  时  $N_\gamma$ ,  $N_c$ ,  $N_p$  的值。

为了求解被切削土体达到破坏所需作用力  $P$  和  $Q$ , 隔离图6中区域  $ABDF$  进行受力分析, 分别建立两坐标轴方向上的受力平衡关系  $\sum x=0$  与  $\sum z=0$ , 建立方程组如下:

$$\left[ -\int_0^L \sigma \cos \alpha dl + \int_0^L \tau \sin \alpha dl - \frac{P}{W} \sin \varepsilon + \frac{Q}{W} \cos \varepsilon + p L_1 \right] = 0, \quad (30)$$

$$\left[ \int_0^L \sigma \sin \alpha dl - \int_0^L \tau \cos \alpha dl + \frac{P}{W} \cos \varepsilon + \frac{Q}{W} \sin \varepsilon - \gamma_1 S_1 - I \right] = 0, \quad (31)$$

式中, 积分上限  $L$  为对数螺旋线弧长, 即弧线  $\widehat{BD}$  的长度,  $L_1$  为直线  $CF$  的长度, 根据几何关系, 满足

$$L_1 = h \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) e^{\left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \varepsilon \right) \tan \varphi}, \quad S_1 \text{ 为 } ABDF \text{ 的面积。}$$

分别将式(30)  $\times \cos \alpha$  + 式(31)  $\times \sin \alpha$ 、式(30)  $\times \sin \alpha$  - 式(31)  $\times \cos \alpha$ , 并最终化简解得

$$P = W \left[ \int_0^L \sigma \sin(\alpha - \varepsilon) dl + \int_0^L \tau \cos(\alpha - \varepsilon) dl + \gamma_1 S_1 \cos \varepsilon + p L_1 \sin \varepsilon + I \cos \varepsilon \right], \quad (32)$$

$$Q = W \left[ \int_0^L \sigma \cos(\alpha - \varepsilon) dl - \int_0^L \tau \sin(\alpha - \varepsilon) dl + \gamma_1 S_1 \sin \varepsilon - p L_1 \cos \varepsilon + I \sin \varepsilon \right]. \quad (33)$$

根据对数螺旋线方程(17)、(18), 有

$$S_1 = \frac{1}{2} \left[ h \int_0^L e^{(\alpha - \varepsilon + \varphi) \tan \varphi} dl + \frac{1}{2} h^2 e^{2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \varepsilon \right) \tan \varphi} \cos \varphi \right], \quad (34)$$

$$dl = r \sec \varphi d\theta = h e^{(\alpha - \varepsilon + \varphi) \tan \varphi} \sec \varphi d\alpha. \quad (35)$$

将式(34)、(35)同时代入式(32)、(33), 最终求解被切削土体达到破坏所需作用力  $P$  和  $Q$ :

$$P = \frac{hW}{\cos \varphi} \left\{ \int_{\varepsilon - \varphi}^{\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}} \sigma [\sin(\alpha - \varepsilon) + \tan \varphi \cos(\alpha - \varepsilon)] e^{(\alpha - \varepsilon + \varphi) \tan \varphi} d\alpha + c \int_{\varepsilon - \varphi}^{\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}} \cos(\alpha - \varepsilon) e^{(\alpha - \varepsilon + \varphi) \tan \varphi} d\alpha + \frac{1}{2} h \gamma_1 \cos \varepsilon \int_{\varepsilon - \varphi}^{\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}} e^{2(\alpha - \varepsilon + \varphi) \tan \varphi} d\alpha \right\} + W \left[ p h \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) e^{\left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \varepsilon \right) \tan \varphi} \sin \varepsilon + I \cos \varepsilon + \frac{1}{4} h^2 \gamma_1 e^{2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \varepsilon \right) \tan \varphi} \cos \varepsilon \cos \varphi \right], \quad (36)$$

$$Q = \frac{hW}{\cos \varphi} \left\{ \int_{\varepsilon - \varphi}^{\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}} \sigma [\cos(\alpha - \varepsilon) - \tan \varphi \sin(\alpha - \varepsilon)] e^{(\alpha - \varepsilon + \varphi) \tan \varphi} d\alpha - c \int_{\varepsilon - \varphi}^{\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}} \sin(\alpha - \varepsilon) e^{(\alpha - \varepsilon + \varphi) \tan \varphi} d\alpha + \frac{1}{2} h \gamma_1 \sin \varepsilon \int_{\varepsilon - \varphi}^{\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}} e^{2(\alpha - \varepsilon + \varphi) \tan \varphi} d\alpha \right\} - W \left[ p h \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) e^{\left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \varepsilon \right) \tan \varphi} \cos \varepsilon - I \sin \varepsilon - \frac{1}{4} h^2 \gamma_1 e^{2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \varepsilon \right) \tan \varphi} \sin \varepsilon \cos \varphi \right]. \quad (37)$$

## 2.3 被切削土体侧面抗剪阻力

盾构刮刀切削土体过程中, 被切削土体在受刮刀刃面作用力和滑动面上土体之间相互作用力外, 还受到滑动区域两侧土体的抗剪阻力, 其表达式为

$$U = 2\tau_2 S, \quad (38)$$

式中, 土体的受剪面积  $S$  为图5中区域  $ABDC$  的面积,  $\tau_2$  为剪切面上土体的抗剪强度, 计算表达式分别为

$$S = \frac{1}{2} \left[ h \int_0^L e^{\theta \tan \varphi} dl + h^2 e^{2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \varepsilon \right) \tan \varphi} \cos \varphi \right], \quad (39)$$

$$\tau_2 = \sigma_H \tan \varphi + c = \gamma_2 H \tan \varphi + c. \quad (40)$$

式中  $\sigma_H$  为被切削土体侧面所受正压力;  $H$  为剪切面处土体埋深;  $\gamma_2$  为土体重度中沿刀盘旋转方向的径向分量, 其大小为  $\gamma \sin \lambda$ , 方向如图3所示。

## 3 计算案例

某工程中隧道埋深  $H=10$  m, 采用的  $\Phi 6.17$  m 软土盾构机刀盘(图7)为例, 计算不同位置刮刀受力情况, 并据此计算盾构机克服刮刀切削阻力所需的扭矩, 即切削扭矩  $T$ 。

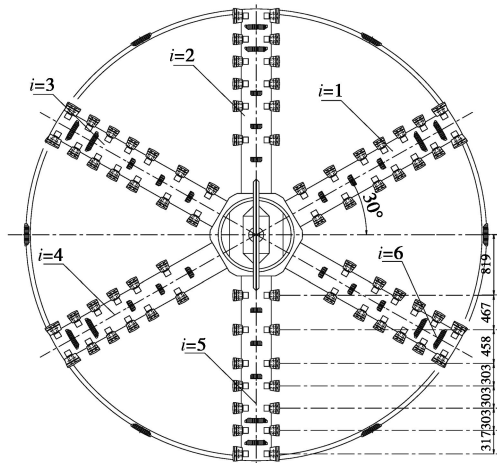


图7 盾构刀盘刀具布置

Fig. 7 Arrangement of cutting tools of cutterhead

如图7, 该刀盘为辐条式刀盘, 刀盘辐条编号为*i* (*i*=1~6); 刀盘上刮刀采用同心圆形式布置, 刮刀宽为100 mm, 刀刃前角为15°, 每根辐条上刀具从刀盘中心向外依次编号为*j* (*j*=1~7), 各位置刀具安装半径 $R_j$ 如图7所示。

盾构刀盘每旋转一周, 刀具随刀盘前进的切入深度为 $v/\omega$ , 故根据几何关系, 刮刀斜向切入土体的长度 $h$ 表达式为

$$h = \frac{v}{\omega \cos \varepsilon} \quad (41)$$

式中,  $v$ 为盾构机掘进速度 (m/min),  $\omega$ 为盾构机刀盘转速 (r/min),  $\varepsilon$ 为刮刀前角。

当图7所示盾构刀盘旋转至任意位置时, 即编号为*i*的辐条旋转至与水平面夹角为 $\lambda_i$ 时, 切削扭矩 $T$ 的计算表达式为

$$T = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^7 [(P_{ij} + U_{ij}) R_j \cos \varepsilon + Q_{ij} R_j \sin \varepsilon] \quad (42)$$

式中,  $P_{ij}$ ,  $Q_{ij}$ ,  $U_{ij}$ 分别为编号为*i*的辐条上安装半径为 $R_j$ 的刮刀所切削土体的各受力分量; 切削扭矩 $T$ 为盾构机总扭矩的一部分, 目前工程中一般采用以下经验公式进行计算<sup>[2]</sup>:

$$T' = k \frac{D^2 v}{8\omega} q_u \quad (43)$$

式中  $D$ 为盾构机刀盘直径;  $k$ 为刀盘辐条数量, 对于图7所示刀盘 $k=6$ ;  $q_u$ 为土体无侧限抗压强度, 显然该经验公式并未考虑盾构机对开挖面的支护压力对切削扭矩的影响, 在使用时具有一定的局限性。

在盾构施工中, 一方面, 刀具切削土体时所受的力及由此带来的刀盘扭矩会随开挖面土体性质的不同而改变, 另一方面, 施工中往往通过调整盾构掘进参数改善刀具受力, 控制刀盘扭矩<sup>[12]</sup>。现针对以上两个方面进行分析。

### 3.1 土体参数的影响

当被切削土体内摩擦角 $\varphi$ 分别取25°, 30°, 支护荷载 $p=100$  kPa, 计算盾构刀盘旋转至图7所示位置时被切削土体达到破坏时 $P$ ,  $Q$ ,  $U$ 值随土体黏聚力 $c$ 的变化情况, 计算结果如图8所示。

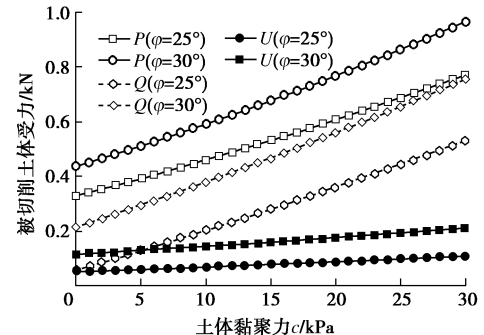


图8 被切削土体受力随黏聚力变化

Fig. 8 Change of force with cohesive force in soils

根据图8,  $P$ ,  $Q$ ,  $U$ 值随土体黏聚力 $c$ 增大均线性增大, 但增加速率不同: 被切削土体受刮刀正面摩擦力增加速率最大, 刮刀正压力的变化速率次之, 而侧面抗剪阻力增加不明显;  $P$ ,  $Q$ ,  $U$ 在 $\varphi=30^\circ$ 时的值均大于 $\varphi=25^\circ$ 时的值, 再次分别计算当 $c$ 为10, 20 kPa时 $P$ ,  $Q$ ,  $U$ 值随土体内摩擦角 $\varphi$ 的变化情况, 如图9所示。

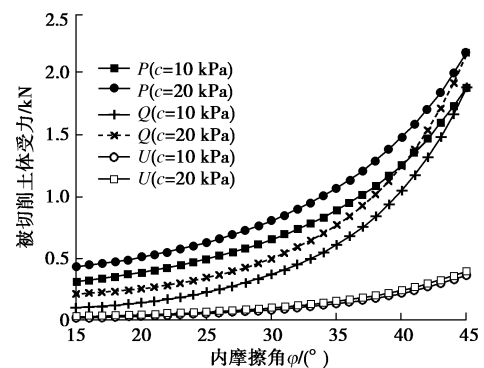


图9 被切削土体受力随内摩擦角变化

Fig. 9 Change of force with internal friction angle in soils

根据图9,  $P$ ,  $Q$ ,  $U$ 值均随土体内摩擦角 $\varphi$ 增大而非线性增大, 同样 $Q$ 值受 $\varphi$ 的影响程度最大,  $P$ 值受影响程度次之,  $U$ 值受影响程度最小。

据上述分析, 被切削土体达到破坏状态时, 无论是所需的刮刀正压力、摩擦力, 还是土体侧面抗剪阻力都随土体 $c$ 值、 $\varphi$ 值增大而增大。其中, 土体达到破坏所需刮刀提供的摩擦力受 $c$ 值、 $\varphi$ 值影响较大, 因此, 当盾构掘进至 $c$ 值或 $\varphi$ 值较大的土层中时, 可通过适当提高刮刀刃面粗糙度等措施相应增大对土体的摩擦力而使土体更易被切至破坏。

### 3.2 盾构掘进参数的影响

当盾构掘进速度分别取 $v$ 为30, 40 mm/min, 支

护荷载  $p=100\text{ kPa}$  时, 计算被切削土体达到破坏时  $P$ ,  $Q$ ,  $U$  值随盾构机刀盘转速  $\omega$  的变化情况, 计算结果如图 10 所示。

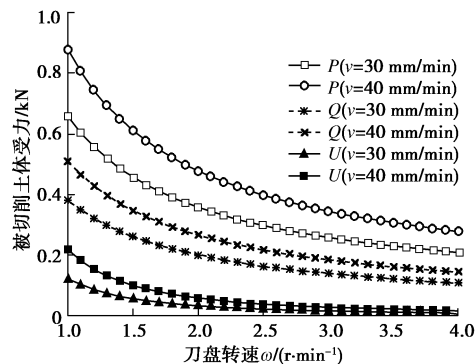


图 10 被切削土体受力随刀盘转速变化

Fig. 10 Change of force with rotation rate of cutterhead in soils

根据图 10, 当盾构机掘进速度一定时,  $P$ ,  $Q$ ,  $U$  值均随刀盘转速  $\omega$  增大而非线性减小。因此, 当盾构隧道施工中因切削扭矩过大而掘进困难时, 可以通过适当提高刀盘转速来减小刮刀切削土体所需的力, 从而减小刀盘切削扭矩。

再按照不同掘进速度  $v$  与不同刀盘转速  $\omega$  取 4 种工况 (表 1), 计算  $P$ ,  $Q$  值随开挖面支护荷载  $p$  的变化情况, 计算结果如图 11 所示。

表 1 计算工况

Table 1 Working conditions for calculation				
工况	工况参数			
	$c/\text{kPa}$	$\varphi/(^\circ)$	$v/(\text{mm}\cdot\text{min}^{-1})$	$\omega/(\text{r}\cdot\text{min}^{-1})$
1	20	25	40	1.5
2	20	25	30	1.5
3	10	40	40	3.0
4	10	40	30	3.0

根据图 11,  $P$ ,  $Q$  均随支护荷载  $p$  线性增大, 并且当土体  $c$  值较大而  $\varphi$  值较小时 (黏性土),  $P$ ,  $Q$  随  $p$  增加缓慢; 而当  $c$  值较小而  $\varphi$  值较大时 (砂性土),  $P$ ,  $Q$  随  $p$  增加较为迅速, 说明支护荷载  $p$  对于被切削土体受力的影响在砂性土中较大。最终根据式 (42)

表 2 不同类型土体中盾构切削扭矩

Table 2 Cutting torques of shield in different types of soils								
土体类型	黏聚力 $c/\text{kPa}$	内摩擦角 $\varphi/(^\circ)$	重度 $\gamma/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-3})$	无侧限抗压强度 $q_u/\text{kPa}$	切削扭矩 $T/(\text{kN}\cdot\text{m})$			
					$v=40\text{ mm/min}$		$v=30\text{ mm/min}$	
					$\omega=1.5\text{ r/min}$	$\omega=3.0\text{ r/min}$	$\omega=1.5\text{ r/min}$	$\omega=3.0\text{ r/min}$
粗砂	0	42	20.5	—	175.9	128.9	79.8	60.7
中砂	0	40	20.7	—	142.4	104.2	64.5	48.9
细砂	2	34	21.4	—	116.6	85.9	52.8	39.4
粉土	16	26	21.0	65.3	94.1 (97.2)	69.8 (72.9)	45.3 (48.6)	33.7 (36.5)
粉质黏土	22	21	19.6	120.3	68.0 (84.0)	50.1 (63.0)	31.2 (42.0)	23.2 (31.5)
黏土	36	13	18.6	147.7	49.0 (40.7)	41.3 (30.6)	22.3 (20.4)	14.4 (15.3)

注: 表中括号内数值为据式 (43) 计算得到的在无侧限抗压强度可测的黏性土体中掘进时盾构刀盘的切削扭矩值。

计算图 7 所示盾构机刀盘掘进至不同类型的土体中采用不同参数掘进时所对应的部分刀盘切削扭矩  $T$  的计算值, 对于无侧限抗压强度可测的黏性土体, 则根据式 (43) 计算切削扭矩值作为对比, 计算结果见表 2。

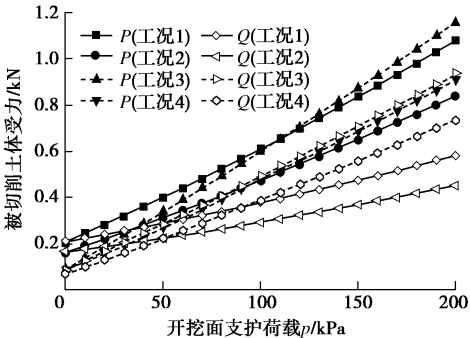


图 11 被切削土体受力随支护荷载变化

Fig. 11 Change of force with support load in soils

根据表 2, 由式 (42), (43) 计算得到的切削扭矩值相差  $0.9\sim 10.7\text{ kN}$ , 且式 (43) 的计算结果随土体类型变化范围较大, 显然采用图 5 所示模型计算时, 盾构机克服刮刀切削阻力所需的扭矩受土体性质影响较小。

## 4 结 论

(1) 在盾构切削土体条件下对 Kötter 方程进行修正, 并据此求解出开挖面各位置土体在被动切削下发生破坏时滑动面上的应力分布。

(2) 建立了被切削土体受力模型, 根据破坏区域土体受力平衡求解出刮刀刃面与土体之间的正压力  $P$ 、摩擦力  $Q$  与侧向抗剪阻力  $U$ , 进而推导出刀盘的切削扭矩的计算公式。

(3) 针对特定盾构刀盘, 分析得到  $P$ ,  $Q$ ,  $U$  值随土体  $c$ ,  $\varphi$  增大而增大, 且摩擦力  $Q$  受影响程度较大, 通过适当提高刮刀刃面粗糙度来增大摩擦可使土体更易被切至破坏。

(4) 分析了盾构掘进参数对土体及刮刀受力的影响, 发现  $P$ ,  $Q$ ,  $U$  值随刀盘转速  $\omega$  增大而减小,  $P$ ,





$Q$  随支护荷载  $p$  线性增大, 且  $p$  对于被切削土体受力的影响较大, 最终给出刀盘掘进至不同类型土体中的部分切削扭矩值作为工程参考, 与既有公式计算结果对比分析发现, 采用本文模型计算时, 盾构机克服刮刀切削阻力所需的扭矩受土体性质影响较小。

### 参考文献:

- [1] 夏毅敏, 卞章括, 胡承欢, 等. 复合式土压平衡盾构机刀盘性能综合评价方法[J]. 机械工程学报, 2014, **50**(21): 1 - 9. (XIA Yi-min, BIAN Zhang-kuo, HU Cheng-huan, et al. Performance comprehensive evaluation of composite earth pressure balanced shield machine cutter head[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2014, **50**(21): 1 - 9. (in Chinese))
- [2] 徐前卫, 朱合华, 丁文其, 等. 均质地层中土压平衡盾构施工刀盘切削扭矩分析[J]. 岩土工程学报, 2010, **32**(1): 47 - 54. (XU Qian-wei, ZHU He-hua, DING Wen-qi, et al. Cutting torque during tunnelling process of earth pressure balance shield machine in homogeneous ground[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, **32**(1): 47 - 54. (in Chinese))
- [3] HE Chuan, WANG Bo. Research progress and development trends of highway tunnels in China[J]. Journal of Modern Transportation, 2013, **21**(4): 209 - 223.
- [4] 徐小荷, 余 静. 岩石破碎学[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1984. (XU Xiao-he, YU Jing. Rock fragmentation[M]. Beijing: China Coal Industry Publishing House, 1984. (in Chinese))
- [5] EVANS I. The force required to cut coal with blunt wedges[J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, 1965, **2**(1): 1 - 12.
- [6] NISHIMATSU Y. The mechanics of rock cutting[J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, 1972, **9**(2): 261 - 270.
- [7] 暨智勇. 盾构掘进机切削刀切削软岩和土壤受力模型研究及实验验证[D]. 长沙: 中南大学, 2009. (JI Zhi-yong. Research and experimental verification of stress model of cutting machine cutting soft rock and soil by shield tunnelling machine[D]. Changsha: Central South University, 2009. (in Chinese))
- [8] 崔国华, 王国强, 王继新, 等. 全断面盾构掘进机切削刀具的计算力学模型求解[J]. 吉林大学学报(工学版), 2008, **38**(增刊 2): 144 - 148. (CUI Guo-hua, WANG Guo-qiang, WANG Ji-xin, et al. Cutting dynamic model for cutters of shield machine under soft soil[J]. Journal of Jilin University Engineering and Technology Edition, 2008, **38**(S2): 144 - 148. (in Chinese))
- [9] TERZAGHI K. Theoretical soil mechanics[M]. New York: John Wiley and Sons, Inc, 1943.
- [10] KÖTTER F. Die bestimmung des drucks an gekrümmten gleitflächen, eine aufgabe aus der lehre vom erddruck[J]. Sitzung Der Physikalisch-Mathematischen Classe Vom, 1903: 229 - 233.
- [11] 孔德顺. Kötter 方程在挡土墙被动土压力求解中的应用[D]. 南京: 河海大学, 2008. (KONG De-shun. Application of Kötter equation to solving passive earth pressure of retaining wall[D]. Nanjing: Hohai University, 2008. (in Chinese))
- [12] 余志刚. 泥质粉砂岩地层泥水盾构掘进参数变化规律及关联性分析[J]. 施工技术, 2018, **47**(1): 116 - 121. (YU Zhi-gang. Change rule and correlation analysis of slurry shield tunneling parameters under argillaceous siltstone formation[J]. Construction Technology, 2018, **47**(1): 116 - 121. (in Chinese))