

DOI: 10.11779/CJGE201905003

非饱和土中热湿盐多场耦合过程分析

周凤玺^{1, 2}, 高国耀¹

(1. 兰州理工大学土木工程学院, 甘肃 兰州 730050; 2. 西部土木工程防灾减灾教育部工程研究中心, 甘肃 兰州 730050)

摘要: 以多孔介质理论为基础研究了非稳态条件下非饱和土中温度-水分-盐分多场耦合问题。考虑到非饱和土中孔隙被液态水、溶解的盐分、水蒸气和干燥气体等填充, 在质量和能量守恒的基础上获得了非饱和土中水分、气体、盐分的质量守恒方程以及能量守恒方程。考虑一维非稳态问题, 选取温度、孔隙气压、孔隙水压和含盐量以及其梯度作为状态变量, 得到问题的状态方程组。利用 Laplace 变换将时域上的状态方程转换到频域上, 在给定的边界条件下, 采用打靶法求解该强耦合的非线性变系数微分方程组。基于 Hausdorff 矩问题的稳定化算法将频域上的数值解转化到时域上, 通过与已有的试验结果相比较, 验证了模型的有效性。基于数值算例与参数, 分析了压力梯度、温度梯度、孔隙率等条件对非饱和中温度场、水分场和盐分场分布的影响规律。

关键词: 非饱和土; 热湿盐耦合; 非稳态条件; 打靶法; Laplace 变换; Hausdorff 矩问题

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2019)05-0813-08

作者简介: 周凤玺(1979—), 男, 甘肃会宁人, 教授, 博士, 主要从事岩土力学、复合材料结构力学等方面的研究与教学工作。E-mail: geolut@163.cn。

Multi-field coupling process of heat-moisture-salt in unsaturated soil

ZHOU Feng-xi^{1, 2}, GAO Guo-yao¹

(1. School of Civil Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China; 2. Engineering Research Center of Disaster Mitigation in Civil Engineering of Ministry of Education, Lanzhou 730050, China)

Abstract: On the basis of porous media theory, the multi-field coupling problem of temperature-moisture-salt in unsaturated soils under non-steady state conditions is studied. Considering that the pores are filled with liquid water, dissolved salts, water vapor and dry gas, the mass conservation equations for water, gas and salt in unsaturated soils and the relevant energy conservation equations are obtained on the basis of mass and energy conservation. For the one-dimensional unsteady state problem, the state equations for the problem are obtained by selecting temperature, pore pressure, pore water pressure, salt solution concentration and their derivatives as the state variables. The Laplace transform is used to transform the state equations in the time domain to those in the frequency one. Under the given boundary conditions, the shooting method is used to solve the strongly coupled nonlinear variable coefficient differential equations. The stability algorithm based on the Hausdorff moment problem transforms the numerical solutions in the frequency domain to those in the time one, and the validity of the model is verified by comparing with the existing experimental results. On the basis of numerical examples and parameters, the influences of pressure gradient, temperature gradient and porosity on the distribution of temperature field, water field and salt field in unsaturated soils are discussed.

Key words: unsaturated soil; heat-moisture-salt coupling; unsteady state condition; shooting method; Laplace transform; Hausdorff moment problem

0 引言

多孔介质中质量、动量和能量的传递过程是一种非常复杂的传输现象, 对其运动过程的研究相对比较困难。自 De Vries^[1]首次把液态水分方程和气态水分方程有机结合起来, 将单一驱动机制推向以温度和水分梯度为推动势的双场耦合理论模型, 国内外学者对非饱和多孔介质中热-湿传递理论做了一系列的研究。

Wang 等^[2]通过对非饱和土中温度效应的研究, 建立了由温度梯度引起的含水率变化的耦合方程。蔡国庆等^[3]通过对地质处置库的研究发现, 缓冲材料的饱和度、吸力、孔隙水压力对温度场均有不同程度的依赖, 滕

基金项目: 国家自然科学基金项目(51368038); 甘肃省陇原青年创新创业人才计划(059003)

收稿日期: 2018-06-15

继东等^[4]通过研究得出土体中水分的蒸发与冷凝对其迁移有重大的影响,因此在水热耦合中很有必要考虑水蒸气的迁移。在考虑压力梯度和温度梯度共同驱动液相与水蒸气的迁移时,通过选取不同的物理量为未知量,建立的非饱和土水-热耦合模型^[5],Yang 等^[6]与 Zeng 等^[7]又将气相分为干气与水蒸气,明确了气相在水-热耦合中的重要性。为了全面考虑非饱和土中液态水、水蒸气、干燥气体及溶解气体之间的相互作用,Abed 等^[8]和 Chen 等^[9]建立了较为详细的非饱和土水-热-力多场耦合的数学模型。

现在对多孔介质中热、湿、盐耦合效应,尤其是非饱和多孔介质中传输现象的研究成果则相对较少。不同于水-热耦合中主要以温度梯度与压力梯度作为驱动力,而水-热-盐迁移是以温度梯度、压力梯度以及溶质浓度梯度作为驱动力。在 Cleall 等^[10]在试验中发现,在热梯度的作用下盐分会向热源方向迁移而水分则是向冷端方向迁移。Adala 等^[11]运用多孔介质热-质传递理论建立的水-热-盐耦合模型,但是模型中没有对土体中的气相进行详细的划分,并且忽略了由温度的变化导致模型中水汽分量的变化,且建立的能量守恒方程也比较简单没有考虑土体中的盐分。Konioreczyk 等^[12-13]给出了一类描述多孔介质中水-热-盐耦合的数学模型,该模型考虑了盐分对土体中水分的影响,以及盐分对热力学平衡的影响,但忽略了干气、液相中溶解气体等气相分量在水-热-盐耦合中的作用。刘炳成等^[14]建立的水-热-盐耦合的数学模型忽略了干燥气体、液相中溶解气体以及流体压力变化对耦合作用的影响,同时该模型中的能量守恒方程也忽略了盐分在土体能量守恒的作用。

本文在水-热耦合的研究基础之上^[8],结合多孔介质中盐分的迁移研究成果,在耦合过程中全面考虑了孔隙中溶液、溶解在水中的气相、气相中的水分、干燥气体等组分的影响因素,并在现有能量守恒的基础上增加了盐分、干燥气体以及土体各组分导热系数等分项的能量守恒。基于多孔介质理论,建立了非饱和多孔介质中有关于水分、干气、盐分和能量的多场耦合的数学模型。因为每个本构方程可以被给定材料的另一个本构方程代替,因此模型具有较强的通用性可模拟多种岩土材料的水-热-盐耦合过程。选取孔隙气压力、孔隙水压力、温度以及盐分浓度四个物理量为未知数,建立了一维非稳态问题的状态方程。由于求解微分方程的边值问题比初值问题困难,而打靶法的本质是将边值问题转化为初值问题来求解,并具有精度高、收敛快等优点。利用打靶法求解边值问题通常包括两部分,一是用数值方法解初值问题,二是选择迭代方法求解非线性方程组。利用 Laplace 变换将时

域上的状态方程组转换到频域上,采用打靶法^[15]求解该微分方程组,基于 Hausdorff 矩^[16]问题的稳定化算法将频域上的数值解转化到时域上。通过数值分析对模型的有效性验证和相关参数进行了分析。

1 数学模型

考虑孔隙率为 n 的非饱和土,其孔隙分别被体积分数为 ϕ^l 的液相和 ϕ^g 的气相共同填充,则有 $n = \phi^l + \phi^g$ 。液态水中溶解有盐分和干燥的气体,气相由水蒸气和干燥气体两种组分组成。非饱和土各组分构成如图 1 所示。

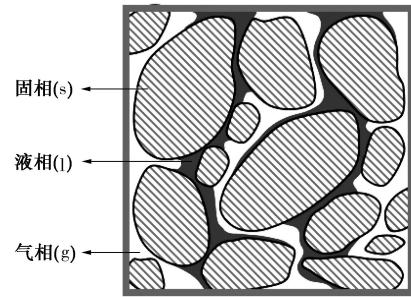


图 1 非饱和多孔介质的示意图

Fig. 1 Schematic representation of porous media of unsaturated soils

1.1 质量守恒方程

组分 α 在 π 相中的质量守恒方程可表示为^[17-18]

$$\frac{\partial(\phi^\pi \rho_\alpha^\pi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi^\pi \rho_\alpha^\pi \mathbf{v}^\alpha) + \nabla \cdot \mathbf{j}_\alpha^\pi = \dot{m}_\alpha^\pi , \quad (1)$$

式中, ϕ^π 为 π 相的体积分数 $\phi^\pi = V_\pi / V$, \mathbf{j}_α^π 为 π 相中 α 组分的非对流通量(扩散与机械弥散)。 ρ_α^π 为组分 α 在单位体积 π 相中的质量分数 $\rho_\alpha^\pi = m_\alpha / V_\pi$ 。

(1) 水分的质量守恒

考虑水分主要在液相和气相中,忽略固体颗粒中的水分含量,有且 $\phi^l = nS^l$, $\phi^g = nS^g$, $S^g + S^l = 1$ 。将表达式代入式(1)可得

$$\frac{\partial(nS^g \rho_w^g)}{\partial t} + \nabla \cdot (nS^g \rho_w^g \mathbf{v}^g) + \nabla \cdot \mathbf{j}_w^g = \dot{m}_w^g , \quad (2)$$

$$\frac{\partial(nS^l \rho_w^l)}{\partial t} + \nabla \cdot (nS^l \rho_w^l \mathbf{v}^l) + \nabla \cdot \mathbf{j}_w^l = -\dot{m}_w^g . \quad (3)$$

式中 \dot{m}_w^g 为水分蒸发率; \mathbf{j}_w^g 为气相中水蒸气的非对流通量; \mathbf{j}_w^l 为液相中液态水的非对流通量。

由于在液相中的非对流质量传递机制可忽略不计,即 $\nabla \cdot \mathbf{j}_w^l = 0$ 。可得到水分平衡方程为

$$\frac{\partial(nS^l \rho_w^l)}{\partial t} + \frac{\partial(nS^g \rho_w^g)}{\partial t} + (nS^l \rho_w^l + nS^g \rho_w^g) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w^l \mathbf{q}^l) + \nabla \cdot (\rho_w^g \mathbf{q}^g) + \nabla \cdot \mathbf{j}_w^g = 0 . \quad (4)$$

由于基质吸力 ψ 与孔隙气压力、孔隙水压力存在

表达式 $\psi = P_g - P_i$, 同时与饱和度存在如下关系式:

$$S^l = (S_{\text{sat}}^l - S_{\text{res}}^l) \left[1 + \left[\alpha_{\text{vg}} \psi \right]^{m_{\text{vg}}} \right]^{-m_{\text{vg}}} + S_{\text{res}}^l \quad (5)$$

式中, α_{vg} , m_{vg} , n_{vg} 分别为 VG 模型中的拟合参数。

固体骨架位移速率的散度可以与固体基质的体积应变率结合起来^[8], 由 $\mathbf{v}^s = \partial \mathbf{u} / \partial t$ 与 $\varepsilon_v = \nabla \cdot \mathbf{u}$ 可得

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^s = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (6)$$

引入平均相对速度^[8]:

$$\mathbf{v}^l = \frac{\mathbf{q}^l}{nS^l} + \mathbf{v}^s \quad , \quad (7)$$

$$\mathbf{v}^g = \frac{\mathbf{q}^g}{nS^g} + \mathbf{v}^s \quad . \quad (8)$$

根据非饱和土修正后的达西定律, 液相和气相的对流通量可分别表示为^[8]

$$\mathbf{q}^l = -K^l (\nabla P_i + \rho_a^l \mathbf{g}) \quad , \quad (9)$$

$$\mathbf{q}^g = -K^g (\nabla P_g + \rho_a^g \mathbf{g}) \quad , \quad (10)$$

式中, 液相与气相的渗透可表示为 $K^l = k k_r^l / \mu_l$, $K^g = k k_r^g / \mu_g$, 式中各个参数存在表达式^[8, 19]:

$$k = k_0 \frac{n_{\text{eff}}^3}{(1-n_{\text{eff}})^2} \frac{(1-n)^2}{n^3} \quad , \quad (11)$$

$$k_r^l = 1 - k_r^g = S_e^{1/2} \left[1 - (1 - S_e^{m_{\text{vg}}-1})^{m_{\text{vg}}} \right]^2 \quad , \quad (12)$$

$$S_e = (S^l - S_{\text{res}}^l) / (S_{\text{sat}}^l - S_{\text{res}}^l) \quad , \quad (13)$$

$$\mu_g = 1.48 \times 10^{-6} \frac{\sqrt{T}}{1 + 119/T} \quad , \quad (14)$$

$$\mu_l = 2.1 \times 10^{-6} \exp(1808.5/T) \quad . \quad (15)$$

水蒸汽密度^[17] ρ_w^g 可以表示为 $\rho_w^g = RH \rho_{w0}^g$, 式中 RH 表示相对湿度, 有且

$$RH = \exp \left(\frac{-M_w \psi}{RT \rho_w^l} \right) \quad , \quad (16)$$

其中, ρ_{w0}^g 为饱和蒸汽压力是有关于温度的函数,

$$\rho_{w0}^g = 10^{-3} \exp(19.891 - 4974.0/T) \quad . \quad (17)$$

非对流水通量遵循 Philip 和 De Vries 所建立的模型^[18]。根据其理论, 气相中水蒸汽的非对流通量 \mathbf{j}_w^g 的变化是由基质吸力导致的水蒸汽非对流通量 \mathbf{j}_w^g 的变化和系统中温度导致的水蒸汽非对流通量 \mathbf{j}_{vt}^g 的变化:

$$\mathbf{j}_w^g = \mathbf{j}_{vw}^g + \mathbf{j}_{vt}^g = -D_{vw} \nabla P_i + D_{vw} \nabla P_g - D_{vt} \nabla T \quad , \quad (18)$$

式中, 由温度和水分引起的分子扩散系数可以表示为

$$D_{vt} = nS^g \rho_w^g D_{\text{atm}} \nu \tau f_{\text{TV}} \left[\frac{4974.0}{T^2} + \frac{M_w \psi}{RT^2 \rho_w^l} \right] \quad , \quad (19)$$

$$D_{vw} = nS^g \rho_w^g D_{\text{atm}} \nu \tau \frac{M_w}{RT \rho_w^l} \quad , \quad (20)$$

式中, D_{atm} 为水蒸气分子的扩散系数, τ 为曲率因子,

该系数可表示为温度的函数^[1]:

$$D_{\text{atm}} = 2.16 \times 10^{-5} (T / 273.15)^{1.8} \quad . \quad (21)$$

(2) 干燥气体的质量守恒

干燥气体存在于气相和溶解在液态水中, 不考虑存在于固相中的干燥气体。溶解在液相中的干空气的质量分数可通过 Henry 的体积溶解度系数 H 得到^[20], 结合式 (1) 可得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(nHS^l \rho_a^l)}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi^l \rho_a^l \mathbf{v}^l) + \nabla \cdot \mathbf{j}_a^l + \\ & \frac{\partial(nS^g \rho_a^g)}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi^g \rho_a^g \mathbf{v}^g) + \nabla \cdot \mathbf{j}_a^g = 0 \quad . \quad (22) \end{aligned}$$

液相中不可能发生干空气扩散, 因此 $\mathbf{j}_a^l = 0$ 。在非对流项中干燥气体的质量通量与水蒸气的质量通量存在表达式 $\mathbf{j}_a^g = -\mathbf{j}_w^g$ 。假设孔隙中干燥气体的密度与干燥气体的密度相等且均用 ρ_a 表示即 $\rho_a^l \approx \rho_a^g = \rho_a$, 代入式 (22) 可得气体的质量平衡方程为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(nS^g \rho_a)}{\partial t} + \frac{\partial(nHS^l \rho_a)}{\partial t} + n\rho_a (S^g + HS^l) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \\ & \nabla \cdot (\rho_a H \mathbf{q}^l) + \nabla \cdot (\rho_a \mathbf{q}^g) - \nabla \cdot \mathbf{j}_w^g = 0 \quad . \quad (23) \end{aligned}$$

干燥气体的密度可表示为^[8]

$$\rho_a^g = \frac{M_a}{RT} (P_g - P_v) \quad , \quad (24)$$

式中, $P_v = \rho_w^g RT / M_w$ 为水蒸气压力。

(3) 盐分的质量守恒

考虑盐溶液的浓度 $\omega = m_p / m_w$, 结合式 (1) 可以给出液相中盐分的质量守恒方程为

$$\frac{\partial(\phi^l \rho_p^l)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w^l \omega \mathbf{q}^l) + \nabla \cdot \mathbf{j}_p^l = 0 \quad . \quad (25)$$

不考虑溶质的溶解和析出, 溶质的扩散 \mathbf{j}_p^l 可以表示为 $\mathbf{j}_p^l = -nS^l \rho_w^l \tau D_p \nabla \omega$, 溶质的扩散系数 D_p 可表示为

$$D_p = 1.1 \times 10^4 \exp \left(\frac{-24530}{RT} \right) \quad . \quad (26)$$

2.2 能量平衡方程

系统中能量平衡的一般形式为^[19]:

$$\frac{\partial \Phi_h}{\partial t} + Q + \nabla \cdot \mathbf{q}_h = 0 \quad , \quad (27)$$

式中, Φ_h 为土体内能, Q 为潜热, $\nabla \cdot \mathbf{q}_h$ 为对流和传导引起的热量变化。

(1) 内能

π 相中 α 组分的内能为^[19] $\Phi_h = \phi^\pi \rho_\alpha^\pi E_{T\alpha}^\pi$, 考虑局部平衡以及不同组分的温度相等的条件下, 即 $T^s = T^l = T^g$ 可得

$$\frac{\partial \Phi_h}{\partial t} = (\rho c)_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial t} \quad , \quad (28)$$

式中,

$$(\rho c)_{\text{eff}} = (1-n)\rho^s c_s + nHS^l \rho_a c_a +$$

$$nS^g\rho_a c_a + nS^l \rho_w^l c_w^l + nS^g \rho_w^g c_w^g \quad \text{。} \quad (29)$$

(2) 相变潜热

土体中由汽化和凝结引起的能量变化可表示为

$$Q = \dot{m}_w^g H_{gw} \quad , \quad (30)$$

式中, H_{gw} 为相变(水的汽化)引起的焓^[21],

$$H_{gw} = L_{gw} - (c_w^l - c_w^g)(T - T_0) \quad . \quad (31)$$

(3) 热流

忽略黏性、变形耗散以及热辐射的影响。热流方程包括热传导、液相对流、气相对流三部分:

$$\begin{aligned} q_h &= \mathbf{q}^T + \rho_\alpha^\pi E_{T\alpha}^\pi \mathbf{q}^\alpha + E_{T\alpha}^\pi \mathbf{j}_\alpha^\pi \\ &= -\lambda_{eff} \nabla T + (\rho_a c_a + \rho_w^g c_w^g) \mathbf{q}^g \cdot (T - T_0) + \\ &\quad (c_w^g - c_a) \mathbf{j}_w^g \cdot (T - T_0) + \mathbf{c}_p^l \mathbf{j}_p^l \cdot (T - T_0) + \\ &\quad (\rho_a c_a H + \rho_w^l c_w^l) \mathbf{q}^l \cdot (T - T_0) \quad , \end{aligned} \quad (32)$$

式中, λ_{eff} 为等效热传导系数,

$$\lambda_{eff} = \lambda_s^{1-n} + \lambda_l^{ns^l} + \lambda_g^{ns^g} \quad . \quad (33)$$

将式(2)、(28)、(30)代入式(27)可以得到能量平衡方程:

$$\begin{aligned} &\left[n\rho_w^g \frac{\partial S^g}{\partial t} + nS^g \frac{\partial \rho_w^g}{\partial t} + S^g \rho_w^g \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w^g \mathbf{q}^g) + \nabla \cdot \mathbf{j}_w^g \right] \cdot \\ &H_{gw} - \lambda_{eff} \nabla \cdot \nabla T + (\rho_a c_a + \rho_w^g c_w^g) \mathbf{q}^g \cdot \nabla T + (c_w^g - c_a) \mathbf{j}_w^g \cdot \\ &\nabla T + (\rho_a c_a H + \rho_w^l c_w^l) \mathbf{q}^l \cdot \nabla T + \mathbf{c}_p^l \mathbf{j}_p^l \cdot \nabla T = 0 \quad . \end{aligned} \quad (34)$$

在热-水-盐多场耦合的情形下, 式(4)、(23)、(25)、(34)分别给出了非饱和土中水分、气体、盐分和能量等多物理场相互耦合的数学模型。

2 一维非稳态问题的状态方程

式(4)、(23)、(25)、(34)给出了非饱和土中水-热-盐多场耦合过程的控制方程, 经过理论推导可以得到水分、干气、盐分、能量的封闭方程:

$$\begin{aligned} &(\rho_w^l K_l + D_{vw}) \frac{\partial^2 P_l}{\partial z^2} + (K_g \rho_w^g - D_{vw}) \frac{\partial^2 P_g}{\partial z^2} + D_{vt} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ &= -K_g \left(\rho^g \mathbf{g} + \frac{\partial P_g}{\partial z} \right) \frac{\partial \rho_w^g}{\partial z} + n \frac{\partial P_g}{\partial t} \left[(\rho_w^l - \rho_w^g) \frac{\partial S^l}{\partial \psi} + S^g \frac{\partial \rho_w^g}{\partial \psi} \right] - \\ &n \frac{\partial P_l}{\partial t} \left[(\rho_w^l - \rho_w^g) \frac{\partial S^l}{\partial \psi} + S^g \frac{\partial \rho_w^g}{\partial \psi} \right] + n \frac{\partial T}{\partial t} \left[(\rho_w^l - \rho_w^g) \frac{\partial S^l}{\partial T} + S^g \frac{\partial \rho_w^g}{\partial T} \right] \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} &D_{vw} \frac{\partial^2 P_l}{\partial z^2} - (K_g \rho_a + D_{vw}) \frac{\partial^2 P_g}{\partial z^2} + D_{vt} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ &= K_g \left(\frac{\partial P_g}{\partial z} + \rho^g \mathbf{g} \right) \frac{\partial \rho_a}{\partial z} + \\ &n \frac{\partial P_g}{\partial t} \left[S^g \left(\frac{M_a}{RT} + \frac{M_a}{M_w} \frac{\partial \rho_w^g}{\partial \psi} \right) - \rho_a \frac{\partial S^l}{\partial \psi} \right] - \\ &n \frac{\partial P_l}{\partial t} \left[S^g \frac{M_a}{M_w} \frac{\partial \rho_w^g}{\partial \psi} - \rho_a \frac{\partial S^l}{\partial \psi} \right] + \end{aligned}$$

$$n \frac{\partial T}{\partial t} \left[S^g \frac{M_a}{M_w} \frac{\partial \rho_w^g}{\partial T} - \rho_a \frac{\partial S^l}{\partial T} \right] \quad , \quad (36)$$

$$\begin{aligned} &\rho_w^l \omega K_l \frac{\partial^2 P_l}{\partial z^2} + nS^l \rho_w^l \tau D_p \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = -\frac{\partial \omega}{\partial t} nS^l \rho_w^l + \\ &n \rho_w^l \omega \left[\frac{\partial S^l}{\partial \psi} \left(\frac{\partial P_l}{\partial t} - \frac{\partial P_g}{\partial t} \right) - \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial S^l}{\partial T} \right] \quad , \quad (37) \\ &H_{gw} D_{vw} \frac{\partial^2 P_g}{\partial z^2} + H_{gw} (K_g \rho_w^g - D_{vw}) \frac{\partial^2 P_g}{\partial z^2} + \\ &(H_{gw} D_{vt} + \lambda_{eff}) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -K_g H_{gw} \left(\rho^g \mathbf{g} + \frac{\partial P_g}{\partial z} \right) \frac{\partial \rho_w^g}{\partial z} + \\ &n H_{gw} \left(\frac{\partial P_g}{\partial t} - \frac{\partial P_l}{\partial t} \right) \left(S^g \frac{\partial \rho_w^g}{\partial \psi} - \rho_w^g \frac{\partial S^l}{\partial \psi} \right) + \\ &\left[H_{gw} n \left(S^g \frac{\partial \rho_w^g}{\partial T} - \rho_w^g \frac{\partial S^l}{\partial T} \right) + (\rho c)_{eff} \right] \frac{\partial T}{\partial t} + \\ &\left[-K_g (\rho_a c_a + \rho_w^g c_w^g) \left(\frac{\partial P_g}{\partial z} + \rho^g \mathbf{g} \right) - \right. \\ &\left. K_l \rho_w^l c_w^l \left(\frac{\partial P_l}{\partial z} + \rho_w^l \mathbf{g} \right) - c_p^l nS^l \rho_w^l \tau D_p \frac{\partial \omega}{\partial z} + \right. \\ &\left. (c_w^g - c_a) \left[D_{vw} \left(\frac{\partial P_g}{\partial z} - \frac{\partial P_l}{\partial z} \right) - D_{vt} \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right] \frac{\partial T}{\partial z} \quad . \end{aligned} \quad (38)$$

将以上给出的一维非稳态平衡方程进行 Laplace 变换, 选取 Laplace 变换后的孔隙水压力 \hat{P}_l 、孔隙气压力 \hat{P}_g 、温度 \hat{T} 和含盐量 $\hat{\omega}$ 以及它们的梯度 $d\hat{P}_l/dz$ 、 $d\hat{P}_g/dz$ 、 $d\hat{T}/dz$ 、 $d\hat{\omega}/dz$ 作为状态变量, 经过整理后可以得到一维非稳态问题的状态方程如下:

$$\frac{d}{dz} \hat{V} = M(\hat{V}) \quad , \quad (39)$$

式中, $\hat{V} = \{\hat{P}_l, \hat{P}_g, \hat{T}, \hat{\omega}, d\hat{P}_l/dz, d\hat{P}_g/dz, d\hat{T}/dz, d\hat{\omega}/dz\}^T$ 为状态变量, $M(\hat{V})$ 表示以 \hat{V} 为变量的状态传递矩阵。

状态方程(39)为多变量耦合的变系数微分方程组, 利用打靶法^[15, 22]来求解该非线性常微分方程组, 但此时的解是频域上的解用 $u(x)$ 表示。基于 Hausdorff 矩问题^[16]将 $u(x)$ 转化到时域上用 $q_N(t)$ 表示。根据积分关系式

$$\int_0^1 x^n u(x) dx = \mu_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N) \quad . \quad (40)$$

由有限个矩量 $\{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_N\}$ 来决定未知函数 $u(x)$ 的解。可以得出 $u(x)$ 的正则化近似解为

$$p_N(x) = \sum_{i=0}^N \lambda_i L_i(x) \quad , \quad (41)$$

式中, $\lambda_i = \sum_{j=0}^i C_{ij} \mu_j$, $L_i(x) = \sum_{j=0}^i C_{ij}(x)^j$ 。

Laplace 变换是一类积分变换, 在求解 Laplace 逆变换时将其作变换 $x = e^{-t}$ 转化为 Hausdorff 矩问题

$$\int_0^1 x^n u(x) dx = F(n+1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N), \quad (42)$$

式中, $u(x) = f(-\ln x)$ 或 $f(t) = u(e^{-t})$ 。通过Hausdorff矩问题, 反演出Laplace逆变换的正则化近似解为

$$q_N(t) \equiv p_N(e^{-t}) = \sum_{i=0}^N \lambda_i L_i(e^{-t}) \quad . \quad (43)$$

该算法是一种有较高精度、较好的稳定性的数值Laplace逆变换算法。

3 数值算例

为了验证数学模型以及求解方法的有效性, 本文基于 Nassar 等^[23]的试验结果对稳态模拟结果进行分析。土样长 0.14 m, 直径 0.04 m, KCl 浓度为 0.794 mol/kg。试验的边界条件与土样的物理力学参数详见表 1, 2。

表 1 非饱和土稳态边界条件

Table 1 Steady state boundary conditions of unsaturated soils

位置	孔隙气压力 / kPa	孔隙水压力 / kPa	温度 / °C	盐分 / (mol·kg ⁻¹)
上边界	101	-190	8.9	0.03
下边界	101	-1200	19	1.58

表 2 Ida 粉土的材料物理力学参数

Table 2 Physical and mechanical parameters of Ida silt loam soil

参数	数值	参数	数值
$c_a / (\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	1000	$L_{gw} / (\text{J} \cdot \text{kg}^{-1})$	2413000
$c_w^l / (\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	4180	$k_0 / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	2.65×10^{-6}
$c_w^g / (\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	1900	$g / (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$	9.8
$c_p^l / (\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	3750	n	0.56
$\lambda_g / (\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	0.024	S_{res}^l	0.025
$\lambda_s / (\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	2.93	S_{sat}^l	0.65
$\lambda_t / (\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	0.56	m_{vg}	0.053
$R / (\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	8.3144	n_{vg}	1.45
$M_a / (\text{kg}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1})$	0.0288	v	1
$M_w / (\text{kg}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1})$	0.018016	f_{rv}	1
$\rho_w^g / (\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3})$	1000	τ	0.557

通过对上述试验进行数值模拟, 得到了稳态条件下含水率、温度与盐分的分布, 并与 Nassar 和 Horton 试验结果进行对比分析。

图 2~4 分别绘出了不同位置处含水率、含盐量和温度的试验测试结果与计算结果。从图中可以看出, 两者在数值和变化规律基本一致。

基于 Liakopoulos^[24]的试验结果对非稳态模拟结果进行比较分析。试验使用 Del Monte 砂土填充 1 m 高的有机玻璃筒, 测得其初始含水率为饱和含水率, 孔隙率为 29.75%、密度为 1.724 g/cm³。并使用水银张力计测量相应位置土体的张力。在试验开始之前从土样的顶部连续供水, 当顶部的张力计为零时停止供水,

并开始记录所有张力计的读数。文章给出了试验土柱的边界条件如表 3 所示。

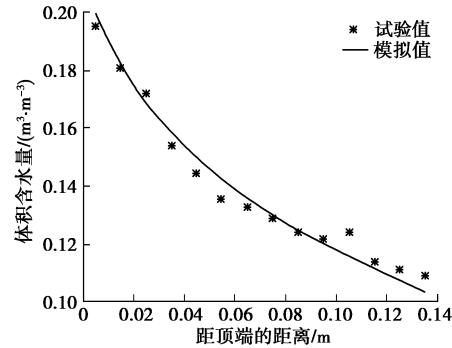


图 2 含水率的试验值与模拟值的比较

Fig. 2 Comparison between experimental and simulated values of water content

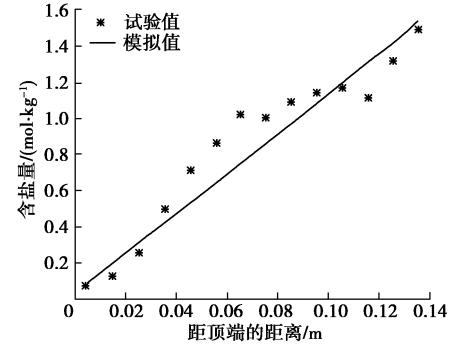


图 3 含盐量的试验值与模拟值的比较

Fig. 3 Comparison between experimental and simulated values of salt content

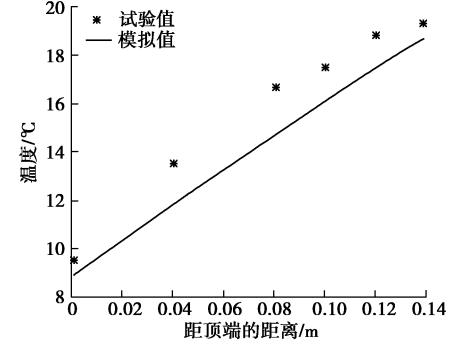


图 4 温度的试验值与模拟值的比较

Fig. 4 Comparison between experimental and simulated values of temperature

表 3 非饱和土非稳态边界条件

Table 3 Unsteady state boundary conditions of unsaturated soils

位置	孔隙气压力/kPa	水压力/ m	温度/ °C
上边界	102		20
下边界	102	0	20

根据 Liakopoulos 等提供的土样参数以及参阅相关文献, 选取如表 4 所示的非饱和土物理力学参数进行数值模拟, 得到了非稳态下饱和度与水压力的分布, 并与 Liakopoulos 的试验结果进行对比分析。

表4 Del Monte 砂土的材料物理力学参数

Table 4 Physical and mechanical parameters of Del Monte sand

soil			
参数	数值	参数	数值
$c_a / (\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	1000	$L_{gw} / (\text{J} \cdot \text{kg}^{-1})$	2413000
$c_w^l / (\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	4180	$k_0 / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	2×10^{-4}
$c_w^s / (\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	1900	$g / (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$	9.8
$c_p^l / (\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	3750	n	0.3
$\lambda_g / (\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	0.024	S_{res}^l	0.01
$\lambda_s / (\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	3.56	S_{sat}^l	0.998
$\lambda_l / (\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	0.56	m_{vg}	0.9629
$R / (\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	8.3144	n_{vg}	1.3882
$M_a / (\text{kg}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1})$	0.0288	ν	1
$M_w / (\text{kg}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1})$	0.018016	f_{tv}	1.2
$\rho_w^s / (\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3})$	1000	τ	0.13

图5绘出了土体中不同位置的水压力试验测试结果与计算结果,从图中可以看出两者数值和变化规律基本一致。参考Gawin等^[25]的模拟值从图5可以看出本模型得出的数值更接近于试验数据。

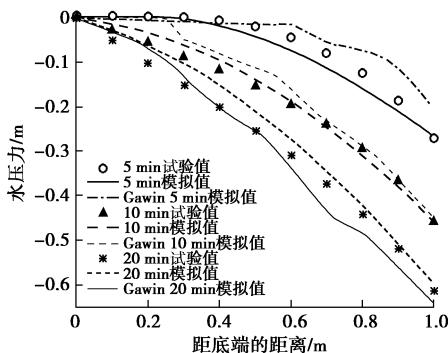


图5 孔隙水压力的试验值与模拟值的比较

Fig. 5 Comparison between experimental and simulated values of pore water pressure

4 参数分析

为了进一步研究非饱和土中热-水-盐的耦合行为,对不同孔隙率、边界温度梯度和孔隙水压力等条件下各物理量分布情况以及变化规律进行参数分析。

当孔隙率 $n=0.3$, 土体上下边界的温度分别为 25°C , 5°C , 上下边界的孔隙气压力均为 102 kPa , 同时土体下边界存在稳定的盐水供给使土体下边界的含盐量始终保持在 0.03 kg/kg , 土体下边界孔隙水压力为 0 kPa 时, 图6~8 分别给出了上边界的孔隙水压力分别为 -750 , -650 , -550 kPa 的条件下, 土体中孔隙气压力、温度和盐分的分布情况。从图7, 8 中可以明显地看出, 热-水力-盐分之间的耦合效应, 随着边界孔隙水压力减小即饱和度的减小, 虽然土体中孔隙气压力、温度和盐分的分布趋势基本没有改变, 但土体

中的孔隙气压力、温度和盐分都随之减小, 最终影响了水分场、温度场和盐分场的分布。

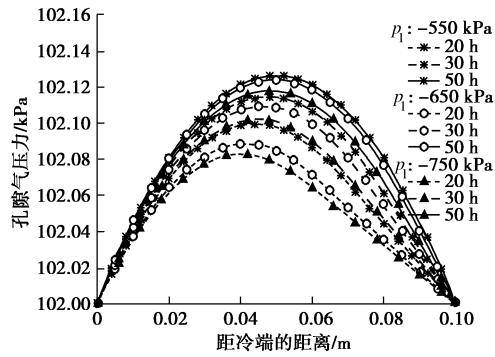


图6 不同孔隙水压力下, 孔隙气压力的变化

Fig. 6 Variation of pore gas pressure under different pore water pressures

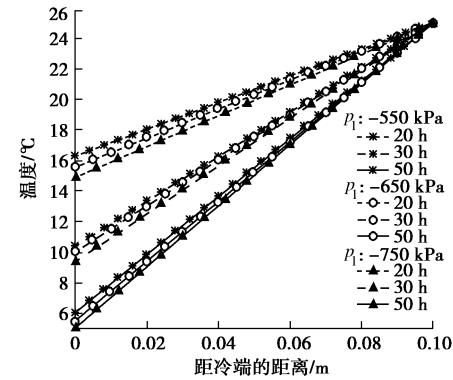


图7 不同孔隙水压力下, 温度的变化

Fig. 7 Variation of temperature under different pore water pressures

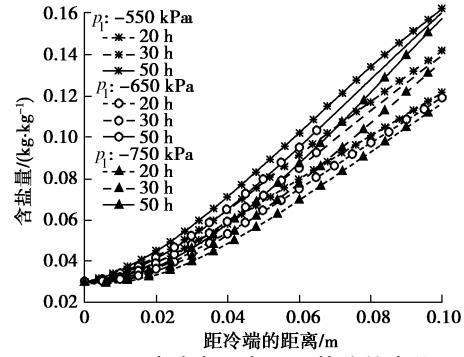


图8 不同孔隙水压力下, 盐分的变化

Fig. 8 Variation of salt under different pore water pressures

当孔隙率 $n=0.3$ 时, 土体上下边界的孔隙气压力均为 102 kPa , 土体上下边界的孔隙水压力分别为 -55 , 0 kPa , 同时下边界存在稳定的盐水供给使土体下边界的含盐量始终保持在 0.03 kg/kg , 图9, 10 绘出了上边界的温度均为 31.5°C , 下边界的温度分别为 5°C , 10°C , 15°C 的情形下, 土中孔隙气压力与盐分的变化。图中明显可以看出, 随着土体温度梯度的减小, 土体中的孔隙气压力和盐分的分布趋势保持不变, 但土体中孔隙气压力逐渐增大, 而盐分的迁移随着温度梯度的减小而减小。

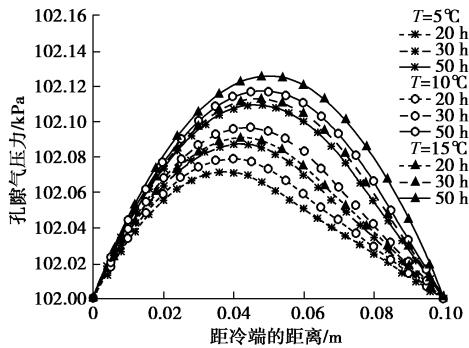


图9 不同温度下, 孔隙气压力的变化

Fig. 9 Variation of pore gas pressure under different temperatures

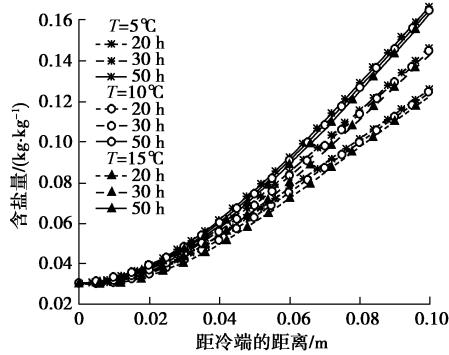


图10 不同温度下, 盐分的变化

Fig. 10 Variation of salt under different temperatures

为了分析土体孔隙率对非饱和土体中水盐热耦合行为的影响, 图 11, 12 分别绘出了在土体上下边界的温度分别为 25°C 、 5°C , 土体上下边界的孔隙气压力均为 102 kPa , 下边界存在稳定的盐水供给使土体下边

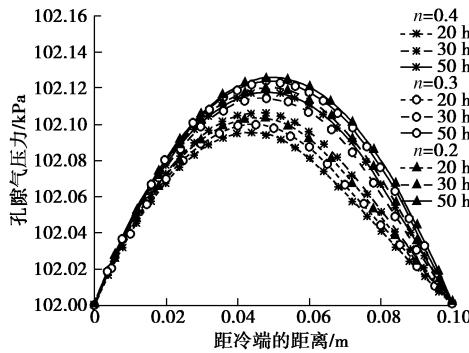


图11 不同孔隙率下, 孔隙气压力的变化

Fig. 11 Variation of pore gas pressure under different porosities

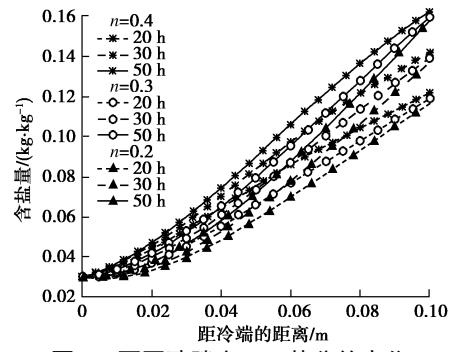


图12 不同孔隙率下, 盐分的变化

Fig. 12 Variation of salt under different porosities

界的含盐量始终保持在 0.03 kg/kg , 土体上下边界孔

隙水压力分别为 $-550, 0 \text{ kPa}$, 土体孔隙率 n 分别为 $0.2, 0.3, 0.4$ 时, 土体中孔隙气压力和盐分的变化情况。从图中可以看出土体中的孔隙气压力和盐分的分布趋势保持不变, 但随着土体中孔隙率的增加, 土体中的孔隙气压力逐渐降低而盐分迁移在逐渐增加。

5 结 论

基于多孔介质理论, 在耦合方程中综合考虑了孔隙中的盐溶液、溶解在水中的气相、气相中的水分、干燥气体等组分的影响因素, 并在现有的能量守恒的基础上增加了盐分、干燥气体以及土体各组分导热系数等分项的能量守恒等基础上, 建立了非饱和多孔介质中水分、干气、盐分和能量等多场耦合的数学模型, 该模型在多孔介质材料中有很强的通用性。在求解该非线性耦合方程时选取拉普拉斯变换后的温度、孔隙气压、孔隙水压和含盐量以及其梯度作为状态变量。采用打靶法进行数值分析, 分析的结果表明:

(1) 在非饱和土中水分场、温度场和盐分场的迁移、分布存在着显著的耦合效应。

(2) 随着基质吸力的增大即土体饱和度的降低, 直接影响了土体中液相和气相的相对渗透系数, 从而导致土体中液相渗透系数减小气相的渗透系数增大, 进而使土体中溶液流速减小气相流速增加, 因此热流和盐分的迁移会减弱, 而气相的迁移会增强。

(3) 温度对土体中气、液相动力黏度、通量和分子扩散影响显著, 液相的渗透系数和通量将会增大而气相的渗透系数和通量将会减小, 溶液流速增大气相流速减小。因此土体中的气体迁移减弱导致孔隙气压力的增大, 而溶液流速的增强使盐分迁移更加明显。

(4) 土体孔隙率的变化对各物理量的变化有着显著的影响。随着孔隙率的增大直接导致土体气相和液相渗透系数和分子扩散系数的增加, 导致土体中的气体和溶液的迁移增强从而使土体中的孔隙气压力降低而盐分迁移将会显著增强。

参考文献:

- [1] DE VRIES DA. The theory of heat and moisture transfer in porous media revisited[J]. International Journal of Heat & Mass Transfer, 1987, 30(7): 1343 - 1350.
- [2] WANG T H, SU L J. Experimental study on moisture migration in unsaturated loess under effect of temperature[J]. Journal of Cold Regions Engineering, 2010, 24(3): 77 - 86.
- [3] 蔡国庆, 赵成刚, 田辉. 高放废物地质处置库中非饱和和缓冲层的热-水-力耦合数值模拟[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(增刊 1): 1 - 8. (CAI Guo-qing, ZHAO Cheng-gang, TIAN Hui. Numerical simulation of coupled thermo-hydro-mechanical behavior for engineered barriers in

- high-level radioactive waste disposal[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(S1): 1 - 8. (in Chinese))
- [4] 滕继东, 贺佐跃, 张升, 等. 非饱和土水气迁移与相变:两类“锅盖效应”的发生机理及数值再现[J]. 岩土工程学报, 2016, **38**(10): 1813 - 1821. (TENG Ji-dong, HE Zuo-yue, ZHANG Sheng, et al. Moisture transfer and phase change in unsaturated soils: physical mechanism and numerical model for two types of “canopy effect”[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, **38**(10): 1813 - 1821. (in Chinese))
- [5] BITTELLI M, VENTURA F, CAMPBELL G S, et al. Coupling of heat, water vapor, and liquid water fluxes to compute evaporation in bare soils[J]. Journal of Hydrology, 2008, **362**(3): 191 - 205.
- [6] YANG D Q, SHEN Z J, RAHARDJO H, et al. Modelling fully coupled moisture, air and heat transfer in unsaturated soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2000, **22**: 357 - 361.
- [7] ZENG Y, SU Z, WAN L, et al. Numerical analysis of air-water-heat flow in unsaturated soil: Is it necessary to consider airflow in land surface models[J]. Journal of Geophysical Research Atmospheres, 2011, **116**: 1 - 18.
- [8] ABED A A, SOLOWSKI W T. A study on how to couple thermo-hydro-mechanical behaviour of unsaturated soils: Physical equations, numerical implementation and examples[J]. Computers & Geotechnics, 2017, **92**: 132 - 155.
- [9] CHEN Y, ZHOU C, JING L. Modeling coupled THM processes of geological porous media with multiphase flow: Theory and validation against laboratory and field scale experiments[J]. Computers & Geotechnics, 2009, **36**(8): 1308 - 1329.
- [10] CLEALL P J, SINGH R M, THOMAS H R. Vapour transfer in unsaturated compacted bentonite[J]. Géotechnique, 2013, **63**(11): 957 - 964.
- [11] ADALA M, BENNACER R, SAMMOUDA H, et al. Heat and mass transport in the unsaturated porous media: application to the soil dry drainage method[J]. Defect and Diffusion Forum, 2009: 589 - 593.
- [12] KONIORCZYK M, GAWIN D. Numerical modelling of coupled heat, moisture and salt transport in porous materials[J]. Computer Assisted Mechanics & Engineering Sciences, 2006, **13**(4): 565 - 574.
- [13] KONIORCZYK M, GAWIN D. Heat and moisture transport in porous building materials containing salt[J]. Journal of Building Physics, 2008, **31**(31): 279 - 300.
- [14] 刘炳成, 李庆领. 土壤中水、热、盐耦合运移的数值模拟[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2006, **34**(1): 14 - 16. (LIU Bing-cheng, LI Qing-ling. Numerical simulation of salt, moisture and heat transport in porous soil[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology(Natural Science Edition), 2006, **34**(1): 14 - 16. (in Chinese))
- [15] ZHOU Feng-xi, LI Shi-rong, LAI Yuan-ming. Three-dimensional analysis for transient coupled thermoelastic response of a functionally graded rectangular plate[J]. Journal of Sound and Vibration, 2011, **330**(16): 3990 - 4001.
- [16] 王泽文, 刘龙章, 徐定华. 数值 Laplace 逆变换的矩方法[J]. 科技通报, 2005, **21**(5): 510 - 513. (WANG Ze-wen, LIU Long-zhang, XU Ding-hua. Numerical inversion of laplace transforms using moment method[J]. Bulletin of Science and Technology, 2005, **21**(5): 510 - 513. (in Chinese))
- [17] RUTQVIST J, BÖRGESSON L, CHIJIMATSU M, et al. Thermohydromechanics of partially saturated geological media: governing equations and formulation of four finite element models[J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, 2001, **38**(1): 105 - 127.
- [18] PHILIP J R, VRIES D A. Moisture movement in porous materials under temperature gradients[J]. Eos Transactions American Geophysical Union, 1957, **38**(2): 222 - 232.
- [19] VAN Esch J M. Adaptive multiscale finite element method for subsurface flow simulation[J]. Civil Engineering & Geosciences, 2010.
- [20] VAUNAT J, JOMMI C, GENS A. A strategy for numerical analysis of the transition between saturated and unsaturated flow conditions[C]// 6th Internatinal Symposium on Numerical Models in Geomechanics. Montreal, 1997: 297 - 302.
- [21] IN Nassar and Robert Horton. Heat, water, and solute transfer in unsaturated porous media: I theory development and transport coefficient evaluation[J]. Transport in Porous Media, 1997, **27**(1): 17 - 38.
- [22] ZHOU Feng-xi, MA Qiang. Exact solution for capillary interactions between two particles with fixed liquid volume[J]. Applied Mathematics & Mechanics, 2016, **7**(12): 1597 - 1606.
- [23] NASSAR I N, HORTON R. Water transport in unsaturated nonisothermal salty soil: I experimental results[J]. Soil Science Society of America Journal, 1989, **53**(5): 1330 - 1337.
- [24] LIAKOPoulos A C. Transient flow through unsaturated porous media[D]. Berkeley: University of California, 1965.
- [25] GAWIN D, SCHREFLER B A, GALINDO M. Thermo-hydro-mechanical analysis of partially saturated porous materials[J]. Engineering Computations, 1996, **13**(7): 113 - 143.