

DOI: 10.11779/CJGE201903022

特征应力空间中土的分数阶临界状态模型

梁靖宇, 杜修力*, 路德春, 韩佳月

(北京工业大学城市与工程安全减灾教育部重点实验室, 北京 100124)

摘要: 分数阶微分具有连续描述零阶微分到一阶微分的特性, 曲线的分数阶梯度方向不再与曲线切线垂直。分数阶微分的梯度非正交性质, 可用于描述土的塑性流动方向与屈服面非正交的特性。基于特征应力与临界状态理论, 在特征应力空间中利用非正交流动法则描述土的塑性应变增量方向, 从而建立土的分数阶临界状态本构模型。所建立的模型首次将分数阶微分与特征应力统一于临界状态理论框架内, 一方面模型可以同时描述三轴压缩和三轴伸长试验条件下土的变形和强度特性, 另一方面也给出了利用三轴试验确定分数阶阶次的方法。所建立的本构模型只有 5 个材料参数, 参数物理意义清晰, 可通过常规室内土工试验确定, 且模型可退化为修正剑桥模型。通过对典型应力路径条件下的试验结果进行预测表明, 所建的模型能够合理地描述土的变形与强度特性。

关键词: 土; 本构模型; 分数阶微积分; 特征应力; 临界状态理论

中图分类号: TU431 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2019)03-0581-07

作者简介: 梁靖宇(1988-), 男, 博士研究生, 主要从事强度理论, 土的本构模型方面的研究工作。E-mail: liangjingyu@emails.bjut.edu.cn。

Fractional-order critical state model for soils in characteristic stress space

LIANG Jing-yu, DU Xiu-li, LU De-chun, HAN Jia-yue

(Key Lab of Urban Security and Disaster Engineering, Ministry of Education, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: The fractional derivative possesses the properties of describing the zero-order differential to the first-order one consecutively, and the fractional gradient direction of the curve is no longer perpendicular to its tangent. The non-orthogonal gradient law of fractional differential can be used to describe the non-associated flow rules between the plastic flow direction and the yield surface of soils. Based on the concept of characteristic stress and the critical state theory, the fractional-order flow law is used to describe the direction of plastic strain increment of soils in the characteristic stress space, and the fractional-order critical state model is then established. The fractional-order differential and the characteristic stress are unified by using the established constitutive model in the framework of the critical state theory. On the one hand, the deformation and strength properties of soils under triaxial compression and extension can be directly described by the established constitutive model. On the other hand, the method for determining the fractional order by triaxial tests is also given. There are only 5 material parameters with clear physical meanings in the established constitutive model, and they can be easily determined by the conventional triaxial tests. Moreover, the proposed constitutive model can also be simplified into the modified Cam-clay model. Finally, the new model is validated by means of the test results from the conventional triaxial tests.

Key words: soil; constitutive model; fractional calculus; characteristic stress; critical state theory

0 引言

早在 17 世纪末, 微积分创立的同时, 分数阶微积分就已经被提出, 但一直没得到有效应用与发展。直到 20 世纪 70 年代, 分形概念与自然界中分维现象提出后, 人们开始关注分数阶微积分。分数阶微积分作为整数阶微积分的扩展, 也为研究土的力学特性提供了有力工具。

目前, 分数阶微积分在土力学研究中, 主要集中于利用分数阶微积分能够连续描述零阶微分到一阶微

分的特性来描述理想固体到理想流体之间的材料黏性。Zhou 等^[1]利用分数阶微积分方法提出了变黏性系数 Abel 黏壶, 并构建了基于分数阶导数的盐岩流变本构模型, 实现了对盐岩流变过程三阶段的模拟。殷德顺等^[2]利用分数阶微积分理论验证了岩土应变硬化指

基金项目: 国家自然科学基金项目(51522802, 51421005, 51538001);
北京市自然科学基金重点项目(8161001)

收稿日期: 2018-01-10

*通讯作者 (E-mail: duxiuli@bjut.edu.cn)

数理论，并更进一步在 Smit 等提出的软物质模型^[3]基础上得出了考虑蠕变与应力松弛的模型^[4]。Sumelka 等^[5-6]利用分数阶微积分对黏塑性进行研究，利用分数阶微积分建立了具有非正交特性的流动法则。非正交流动法则基于屈服函数就可以得出塑性流动的方向，所得塑性流动方向可以不与屈服曲线正交。非正交流动法则的提出为建立土的弹塑性本构模型提供了新的探索方式。Sun 等^[7-8]将这种具有非正交特性的流动法则应用于模拟砂土等散粒材料的力学特性，通过引入 Li 等^[9]提出的塑性硬化参数，建立了考虑砂土、碎石等剪胀特性与循环特性的本构模型。

利用分数阶微积分对土的塑性变形的研究尚处于初步尝试阶段。现有土的分数阶本构模型建立过程中，由于难以求解复合函数分数阶偏导数，仅能用于描述土在三轴压缩条件下的变形与强度特性，且没有明确的临界状态概念。如何利用分数阶塑性理论描述土的临界状态以及三轴拉压不同的变形与强度特性就成为了分数阶塑性力学研究的难点与热点。特征应力概念^[10]的提出为解决这一问题提供了新的思路和方法。利用特征应力空间中的各向同性能够直接反映普通应力空间中的应力诱导各向异性。因此，在特征应力空间中的建立的本构模型^[11]可以直接描述土在三轴拉压条件下不同变形与强度特性。

本文结合分数阶塑性理论与特征应力概念，针对现有土的分数阶本构模型尚不能描述土的临界状态与三轴拉压的不同变形与强度特性，提出特征应力空间中的分数阶临界状态模型，并给出分数阶次的明确确定方法。两种理论的结合与互补能够从更为新颖的角度对土的变形与强度特性进行描述与分析，对土的变形规律研究理论具有推进意义。

1 分数阶微积分与特征应力

分数阶微积分作为经典整数阶微积分的扩展，为土的力学特性的研究分析提供了新的描述手段。而特征应力为描述土的三轴压缩与伸长条件下不同变形与强度特性提供了新视角。二者定义与特性的相互独立与相互补充是二者能够成功结合的基础。

1.1 分数阶微分

Caputo 型分数阶微分的定义因其弱奇异性且对常数微分为 0 而被广泛应用于自然科学与工程科学。Caputo 型分数阶微分定义的具体表达式为

$$_a^C D_x^\mu f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(w)}{(x-w)^{\mu+1-n}} dw \quad (x > a), \quad (1)$$

式中， ${}_a^C D_x^\mu$ 表示 Caputo 型 μ 阶微分， $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数，定义为 $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^{x-1} d\tau$ ， x 为自变量，在本

构模型建立过程中对应于当前应力状态， a 为积分下限， n 是大于 μ 的最小整数， $n=[\mu]+1$ 。当 $n=1$ 时， $0 < \mu \leq 1$ 。为方便应用，给出幂函数分数阶微分的具体表达式：

$$_0^C D_x^\mu (x^m) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\mu)} x^{m-\mu}, \quad (2)$$

其中，常数 $m > -1$ 。积分下限 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 对 x 的 Caputo 型 μ 阶微分还可以用微分符号 $\partial^\mu f / \partial x^\mu$ 来表示。

分数阶微积分仅对一些简单的函数有解析解，这使得当前利用分数阶微积分建立土的本构模型仅描述了三轴压缩条件下土的变形与强度特性，尚不能考虑土在三轴伸长试验条件下的变形与强度特性。

1.2 特征应力

特征应力概念已经被提出^[10]，并已用于建立非线性统一强度准则。与应力 σ_i ($i=1, 2, 3$) 反映受力状态相对应，特征应力 c_i ($i=1, 2, 3$) 被定义用于反映受力状态与岩土材料三轴拉压强度特性，其表达式为

$$c_i = p_r \left(\frac{\sigma_i}{p_r} \right)^\beta \quad (i=1,2,3), \quad (3)$$

式中， p_r 为参考应力，使特征应力与普通应力量纲一致，本文中 p_r 取为 1 kPa； β 为反映岩土材料三轴拉压强度比的参数，具体确定方法见 3.1 节。特征应力空间中的平均正应力 c_n 和广义剪应力 c_s 在本文表示为

$$\left. \begin{aligned} c_n &= 1/3(c_1 + c_2 + c_3), \\ c_s &= \sqrt{2}/2 \sqrt{(c_1 - c_2)^2 + (c_2 - c_3)^2 + (c_3 - c_1)^2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

类比普通应力空间中的破坏应力比 $q/p=M$ 可通过三轴压缩条件下内摩擦角 φ_c 通过 $M=6\sin\varphi_c/(3-\sin\varphi_c)$ 求出。特征应力空间中，特征应力比 $c_s/c_n=\chi$ 在临界状态下达到特征应力空间中的破坏应力比 F ，可通过 φ_c 与 β 求得，具体表达式如下

$$F = 3 \frac{(1 + \sin \varphi_c)^\beta - (1 - \sin \varphi_c)^\beta}{(1 + \sin \varphi_c)^\beta + 2(1 - \sin \varphi_c)^\beta}. \quad (5)$$

2 特征应力空间中的分数阶模型

在特征应力空间中建立分数阶临界状态模型可以利用非正交流动法则描述非关联特性，并利用特征应力解决现有分数阶微积分方法建立土的本构模型不能描述土体在伸长试验条件下的变形与强度特性问题。二者相互补充，相互结合，是对利用分数阶塑性力学描述土变形特性理论的推进。

2.1 屈服函数

土体在荷载作用下变形至破坏，是土体压缩屈服至剪切破坏的过程。特征应力空间中建立的模型以非线性统一强度准则作为剪切破坏条件，而压缩屈服可

通过MCC模型类似的椭圆形屈服面来反映表达如下:

$$f = \frac{c_s^2}{B^2} + c_n^2 - c_{nx} c_n = 0 \quad , \quad (6)$$

其中, B 为与 β 相关的待定模型参数, 描述椭圆屈服函数的扁平程度, 确定方法见 3.1 节。 c_{nx} 为屈服线与横坐标的右交点的固结压力值, 描述屈服面在加载过程中的变化规律, 反映了与塑性体应变相关的硬化规律, 具体表达式见 2.2 节。当 $\beta=1$ 时, $B=M$, 式 (6) 可以退化为普通应力空间中的修正剑桥模型屈服函数。

2.2 非正交流动法则

分数阶微分得到曲线的分数阶梯度方向不再与曲线的切线相垂直, 利用分数阶微分的这一特性建立的非正交流动法则^[5-7, 12]可以用于描述非关联特性, 因此, 塑性应变增量可以表示为

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial^\mu f}{\partial \sigma_{ij}^\mu} \quad , \quad (7)$$

式中, $d\lambda$ 是塑性因子。 $\partial^\mu f / \partial \sigma_{ij}^\mu$ 为通过分数阶微分确定的塑性流动方向。当 $\mu=1$ 时, 式 (7) 退化为传统正交流动法则, 塑性流动方向与屈服曲线垂直; 当 $0 < \mu < 1$ 时, 其塑性流动方向不再垂直于屈服曲线而有一定的偏转。特征应力空间中的非正交流动法则可以表示为

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial^\mu f}{\partial c_{ij}^\mu} \quad . \quad (8)$$

将特征应力空间中屈服函数 f 的分数阶微分式代入式 (8) 即可得到塑性流动方向。根据分数阶微分式 (2), 屈服函数式 (6) 分别对 c_n 与 c_s 求 μ 阶微分得

$$\frac{\partial^\mu f}{\partial c_n^\mu} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\mu)} c_n^{2-\mu} - c_{nx} \cdot \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\mu)} c_n^{1-\mu} \quad , \quad (9)$$

$$\frac{\partial^\mu f}{\partial c_s^\mu} = \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\mu)} c_s^{2-\mu} \quad , \quad (10)$$

根据 Gamma 函数的性质 $\Gamma(z+1)=z\cdot\Gamma(z)$ 以及 $\Gamma(n)=(n-1)!$, 对式 (9) 和式 (10) 进行整理可以得出

$$\frac{\partial^\mu f}{\partial c_n^\mu} = \frac{2}{\Gamma(3-\mu)} \frac{c_n^2 - (1-\mu/2)c_{nx}c_n}{c_n^\mu} \quad , \quad (11)$$

$$\frac{\partial^\mu f}{\partial c_s^\mu} = \frac{2c_s^{2-\mu}}{B^2 \Gamma(3-\mu)} \quad . \quad (12)$$

当 $\beta=1$ 时, $c_n=p$, $c_s=q$, 屈服函数退化为修正剑桥模型屈服函数。以 $p_0=200$ kPa 时的屈服曲线为例, 取 $\mu=1$, $\mu=0.6$ 和 $\mu=0.2$ 条件下的塑性流动方向如图 1 所示。可以看出, 不同分数阶次可以反映不同的塑性流动方向。而在等向固结方向上, 塑性流动方向始终沿水平方向, 不受分数阶次 μ 的影响, 这也正符合土在等向固结压缩条件下的变形规律。

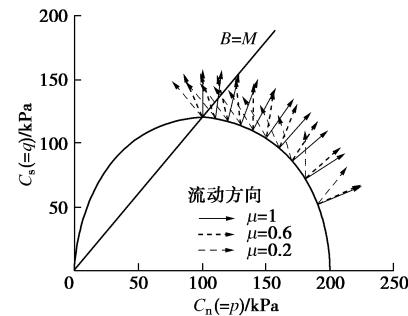


图 1 $\beta=1$ 时的屈服线及塑性流动方向

Fig. 1 Yield curves and directions of plastic flow when $\beta=1$

根据屈服函数式 (6) 可以整理得出当前应力状态对应的固结压力 c_{nx} , 表达式为

$$c_{nx} = (c_s^2 + B^2 c_n^2) / B^2 c_n \quad , \quad (13)$$

将固结压力式 (13) 代入对 c_n 的分数阶微分式 (11) 可以整理得出利用应力表示的 f 对 c_n 的分数阶微分表达式

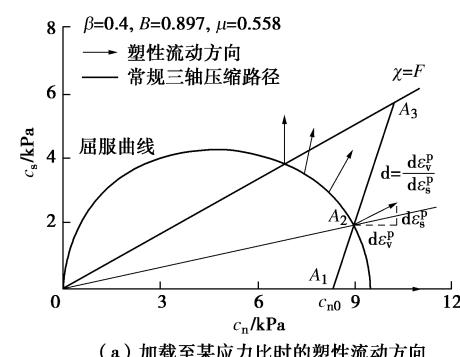
$$\frac{\partial^\mu f}{\partial c_n^\mu} = \frac{1}{\Gamma(3-\mu)c_n^\mu} \left[\mu c_n^{2-\mu} - (2-\mu) \frac{c_s^2}{B^2} \right] \quad . \quad (14)$$

根据非正交流动法则, 结合屈服函数对 c_n 的分数阶微分式 (14) 与对 c_s 的分数阶微分式 (12) 可以得出特征应力空间中塑性体应变增量与塑性剪应变增量之比 $d\varepsilon_v^p / d\varepsilon_s^p = d$ 与特征应力比 χ 之间的关系

$$d = \frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_s^p} = \frac{\partial^\mu f / \partial c_n^\mu}{\partial^\mu f / \partial c_s^\mu} = \frac{\mu B^2 - (2-\mu)\chi^2}{2\chi^{2-\mu}} \quad , \quad (15)$$

式 (15) 所描述的是加载过程中, 随着特征应力比 χ 的增加, 塑性应变增量比 d 的变化, 反映着塑性应变增量方向的变化规律。

以 $\varphi=35^\circ$, $\beta=0.4$ 为例, B 和 μ 的值可以根据 3.1 节模型参数的确定方法得出。 $p_0=200$ kPa 的常规三轴压缩试验对应的 A_1A_3 路径如图 2 所示。当加载至 A_2 点时, 屈服面位置以及利用非正交流动法则确定的塑性应变增量方向如图 2 (a) 所示。对应整个加载过程中屈服面、塑性应变增量方向的变化如图 2 (b) 所示。在初始加载的 A_1 点, 仅有塑性体应变, 没有塑性剪应变。随着应力比逐渐增加到 χ_1 , χ_2 , χ_3 直至 $\chi=F$ 过程中, 同一应力比的塑性流动方向相同, 不同应力比塑性流动方向逐渐由水平变为竖直方向, 此时土体达到应力与体应变不再变化, 剪应变持续发展的临界状态。



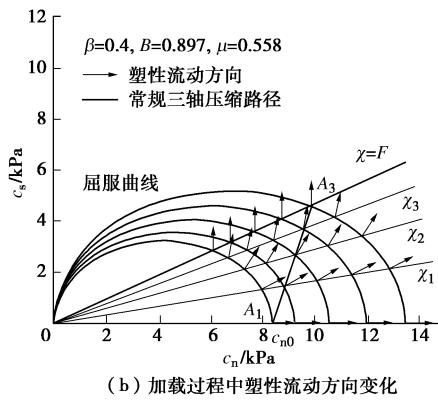
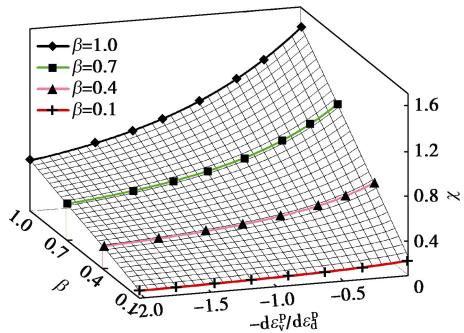
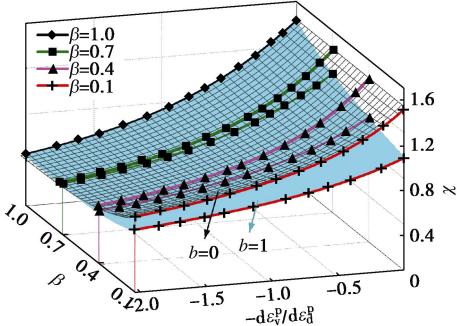


图 2 特征应力空间中的塑性流动方向

Fig. 2 Plastic flow direction in characteristic stress space

图 3 特征应力空间中的 $d - \chi$ 关系曲线Fig. 3 $d - \chi$ curves in characteristic stress space图 4 普通应力空间中的 $d - \eta$ 关系曲线Fig. 4 $d - \eta$ curves in normal stress space

根据式(5)还可以得出 $\beta=1, 0.7, 0.4$ 与 0.1 时的 $d - \chi$ 关系曲线如图 3, 不同 β 值表示不同特征应力空间。对应普通应力空间中的 $d - \eta$ 关系曲线如图 4 所示。根据 3.1 节模型参数确定方法确定的 B 和 μ 列于表 1。

从图 3, 4 和表 1 可以看出: 当 $\beta=1$ 时, 特征应力空间与普通应力空间重合, 计算得到的 B 和 μ 退化为普通应力空间中的 M 和一阶微分, 方程(15)与修正剑桥模型的 $d - \chi$ 关系相同, 对应 $d - \chi$ 或 $d - \eta$ 关系曲线如图 3, 4 中黑色曲线所示; 当 β 从 1 到 0 变化时, 计算得到的 B 和 μ 逐渐减小, 对应的 $d - \chi$ 关系曲线整体下降。随着 β 的减小, 对应普通应力空间中的 $d - \eta$ 关系曲线的三轴压缩与三轴伸长试验条件下

不同的变形与强度特性逐步凸显, 如图 4 所示。

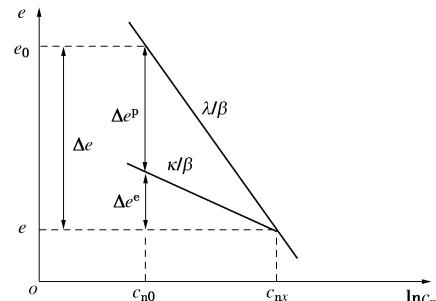
表 1 不同特征应力空间中的参数

Table 1 Parameters in characteristic stress space

$\phi/(\circ)$	β	B	μ
35	1.0	1.418	1
35	0.7	1.194	0.822
35	0.4	0.897	0.558
35	0.1	0.440	0.168

2.3 硬化规律与硬化参量

本文采用特征应力空间中的等向硬化规律, 加载过程中屈服面形状不变, 为塑性体应变的等值面。根据等向固结试验结果, 在特征应力空间中可以整理得到加载和卸载的应力-孔隙比关系曲线, 如图 5 所示。

图 5 特征应力空间中 $e - \ln c_n$ 关系Fig. 5 Relationship of $e - \ln c_n$ in characteristic stress space

利用 $e - \ln p$ 坐标下的加载和卸载曲线可以计算得出塑性体应变 ε_v^p 与固结压力 p_x 之间的关系, p_0 为初始固结压力。在特征空间中的 $e - \ln c_n$ 坐标系中, 加载曲线和卸载曲线的斜率分别为 λ/β 和 κ/β , 采用与修正剑桥模型类似的方式可以得出特征应力空间中由塑性体应变 ε_v^p 表示的固结压力 c_{nx} 。普通应力空间与特征应力空间中对应的计算过程如表 2 所示。

表 2 普通应力空间与特征应力空间中的应变硬化规律

Table 2 Rules of strain hardening in normal stress space and characteristic stress space

参数	普通应力空间	特征应力空间
孔隙比	$\Delta e = -\lambda \ln \left(\frac{p_x}{p_0} \right)$	$\Delta e = -\frac{\lambda}{\beta} \ln \frac{c_{nx}}{c_{n0}}$
总应变	$\varepsilon_v = \frac{-\Delta e}{1 + e_0}$	$\varepsilon_v = \frac{\lambda}{\beta(1 + e_0)} \ln \frac{c_{nx}}{c_{n0}}$
弹性体应变	$\varepsilon_v^e = \frac{\kappa}{1 + e_0} \ln \frac{p_x}{p_0}$	$\varepsilon_v^e = \frac{\kappa}{\beta(1 + e_0)} \ln \frac{c_{nx}}{c_{n0}}$
塑性体应变	$\varepsilon_v^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \ln \frac{p_x}{p_0}$	$\varepsilon_v^p = \frac{\lambda - \kappa}{\beta(1 + e_0)} \ln \frac{c_{nx}}{c_{n0}}$
固结压力	$p_x = p_0 e^{\frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \varepsilon_v^p}$	$c_{nx} = c_{n0} e^{\frac{\beta(1+e_0)}{\lambda-\kappa} \varepsilon_v^p}$

2.4 应力应变关系

将总应变增量 de 分解为弹性应变增量 $d\varepsilon^e$ 与塑性应变增量 $d\varepsilon^p$, 即

$$de = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (16)$$

弹性应变部分采用特征应力空间中的广义 Hook 定律来计算, 塑性变形部分则利用特征应力空间中的分数阶临界状态模型来计算。

(1) 弹性应变增量

将广义 Hook 定律用特征应力表示, 即可得出弹性应变增量表达式:

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_1^e &= \frac{1}{\beta E} c_1^{\frac{1}{\beta}-1} dc_1 - \frac{\nu}{\beta E} \left(c_2^{\frac{1}{\beta}-1} dc_2 + c_3^{\frac{1}{\beta}-1} dc_3 \right), \\ d\epsilon_2^e &= \frac{1}{\beta E} c_2^{\frac{1}{\beta}-1} dc_2 - \frac{\nu}{\beta E} \left(c_3^{\frac{1}{\beta}-1} dc_3 + c_1^{\frac{1}{\beta}-1} dc_1 \right), \\ d\epsilon_3^e &= \frac{1}{\beta E} c_3^{\frac{1}{\beta}-1} dc_3 - \frac{\nu}{\beta E} \left(c_1^{\frac{1}{\beta}-1} dc_1 + c_2^{\frac{1}{\beta}-1} dc_2 \right), \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中, ν 为泊松比, 一般取为 0.3, E 为弹性模量, 可以根据 $e - \ln c_n$ 坐标中的等向固结试验规律来确定, 具体表达式为

$$E = 3(1-2\nu) \frac{1+e_0}{\kappa} c_n^{\frac{1}{\beta}}. \quad (18)$$

(2) 塑性应变增量

屈服函数 f 的一致性条件 $df=0$, 可以得出

$$df = \frac{\partial f}{\partial c_n} dc_n + \frac{\partial f}{\partial c_s} dc_s + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_v^p} d\epsilon_v^p = 0, \quad (19)$$

根据屈服函数式(6)以及由塑性体应变表示的等效固结压力(见表 2 中 c_{nx}), 可以求得一致性条件式(19)中所需对 c_n 和 c_s 的偏微分表达式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial c_n} &= \frac{B^2 c_n^2 - c_s^2}{B^2 c_n}, \\ \frac{\partial f}{\partial c_s} &= \frac{2c_s}{B^2}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

而屈服函数对塑性体应变的微分表达式为

$$\frac{\partial f}{\partial \epsilon_v^p} = -c_n c'_{nx} = -c_n \frac{\beta(1+e_0)}{\lambda-\kappa} c_{nx}, \quad (21)$$

式中, c_{nx} 可以通过当前应力状态来表示(式(13))。因此, 对塑性体应变的偏微分表达式可以整理为

$$\frac{\partial f}{\partial \epsilon_v^p} = -\frac{\beta(1+e_0)}{\lambda-\kappa} \frac{c_s^2 + B^2 c_n^2}{B^2}, \quad (22)$$

根据特征应力空间中的非正交流动法则式(8)可以得到塑性体应变增量 $d\epsilon_v^p = d\lambda \cdot \partial^\mu f / \partial c_n^\mu$, 并代入一致性条件式(19)即可得出塑性因子表达式:

$$d\lambda = \frac{(\lambda-\kappa)\Gamma(3-\mu)}{\beta(1+e_0)c_n^{1-\mu}} \frac{(B^2 c_n^2 - c_s^2)dc_n + 2c_n c_s dc_s}{(c_s^2 + B^2 c_n^2) \left[\mu c_n^2 - (2-\mu) c_s^2 / B^2 \right]}, \quad (23)$$

进一步根据非正交流动法则可以得到塑性体应变增量与塑性剪应变增量:

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_v^p &= \frac{(\lambda-\kappa)}{\beta(1+e_0)c_n} \frac{(B^2 c_n^2 - c_s^2)dc_n + 2c_n c_s dc_s}{(c_s^2 + B^2 c_n^2)}, \\ d\epsilon_s^p &= \frac{(\lambda-\kappa)}{\beta(1+e_0)} \frac{2c_s^{2-\mu}}{c_n^{1-\mu}} \frac{(B^2 c_n^2 - c_s^2)dc_n + 2c_n c_s dc_s}{(c_s^2 + B^2 c_n^2) \left[\mu B^2 c_n^2 - (2-\mu) c_s^2 \right]}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

对应于三轴压缩应力路径条件, 塑性体应变 $\epsilon_v^p = \epsilon_1^p + 2\epsilon_3^p$, 塑性剪应变 $\epsilon_d^p = 2(\epsilon_1^p - \epsilon_3^p)/3$; 而对于三轴伸长试验应力路径, 塑性体应变 $\epsilon_v^p = 2\epsilon_1^p + \epsilon_3^p$, 塑性剪应变 $\epsilon_d^p = 2(\epsilon_1^p - \epsilon_3^p)/3$, 其中, ϵ_1^p 和 ϵ_3^p 为第一和第三塑性主应变。

3 参数确定方法与试验验证

3.1 参数确定方法

基于特征应力的正常固结土分数阶模型共需 5 个土性参数 λ , κ , ν , φ_c , β , 其中 4 个土性参数与修正剑桥模型参数相同, 仅增加一个反映土在三轴拉压条件下强度不等特性的材料参数 β ; 模型参数 B , μ 通过已有材料参数进行确定, 不需要额外增加试验。

(1) 土性参数确定方法

土性参数中, λ , κ 为 $e - \ln p$ 坐标系下正常固结加载线与卸载线的斜率; ν 为泊松比; φ_c 为通过三轴压缩试验得到的内摩擦角; β 反映了岩土材料三轴拉压强度的比例关系, 确定方法如下:

$$\frac{(1+\sin\varphi_c)^\beta - (1-\sin\varphi_c)^\beta}{(1+\sin\varphi_c)^\beta + 2(1-\sin\varphi_c)^\beta} = \frac{(1+\sin\varphi_e)^\beta - (1-\sin\varphi_e)^\beta}{2(1+\sin\varphi_e)^\beta + (1-\sin\varphi_e)^\beta}, \quad (25)$$

式中, φ_e 为三轴伸长试验得到的内摩擦角。根据式(25)可知 3 个参数(φ_c , φ_e 和 β)中仅有两个参数相互独立。

(2) 模型参数确定方法

正常固结黏土在加载至临界状态时的孔隙比变化量可以计算得出 NCL 和 CSL 之间的距离, 将其假定为等向固结线与回弹线的斜率差值的 ζ 倍, 根据修正剑桥模型的插值函数法^[13-14]可知 $\zeta = \ln 2$ 时孔隙比差值与修正剑桥模型相同, 即 $N - \Gamma = \ln 2(\lambda - \kappa)$ 。

已知等 p 加载条件下的弹性体应变为 0, 即 $\epsilon_v^e = 0$, 因此等 p 加载路径的孔隙比变化量即为 NCL 和 CSL 之间的距离, 因此可得

$$\epsilon_v^p = \epsilon_v = \frac{N - \Gamma}{1 + e_0} = \frac{\ln 2(\lambda - \kappa)}{1 + e_0}, \quad (26)$$

将塑性体应变表达式(26)代入由塑性体应变表示的固结压力式(见表 2 中 c_{nx}), 可得出

$$c_{nx} = 2^\beta c_{n0}. \quad (27)$$

等 p 加载达到临界状态时, σ_1 , σ_3 的值表示为 $\sigma_{1z} = p_0(1+2M/3)$, $\sigma_{3z} = p_0(1-M/3)$ 。将临界应力

状态(c_{nz} , c_{sz}) = (c_{nz} , Fc_{nz})代入到式(6)中, 通过整理可以得出临界状态时的固结压力表达式

$$c_{nz} = c_{nz}(F^2 / B^2 + 1) \quad , \quad (28)$$

利用式(28)与式(27)相等可以得出

$$B = \sqrt{F^2 c_{nz} / (2^\beta c_{n0} - c_{nz})} \quad . \quad (29)$$

分数阶次 μ 不再作为独立的待确定参数, 而是与特征应力空间相对应, 可以通过临界状态条件下的剪胀比为 0 (即 $d=0$) 求解得出。因此, 根据式(15)得出

$$\mu = 2F^2 / (B^2 + F^2) \quad . \quad (30)$$

3.2 试验验证

结合特征应力与临界状态概念提出的分数阶临界状态模型可以用于预测正常固结黏土在典型应力路径加载条件下的应力应变关系。本文利用名古屋大学对 Fujinomori 黏土进行的典型应力路径条件下三轴试验结果^[15]对模型预测结果进行验证, 并与 MCC 模型预测结果进行对比。4 种典型的应力条件包括 σ_3 为常数的三轴压缩和三轴伸长条件, p 为常数的三轴压缩和三轴伸长条件。材料参数与所求得的模型参数值列于表 3 中。3 个参数 φ_c , φ_e 和 β 中仅有两个参数相互独立。模型预测与试验结果对比如图 6 所示。

模型还利用所提分数阶模型与 MCC 模型分别对 New Fujinomori 黏土的三轴压缩与三轴伸长试验 (试验数据取自文献[16]) 进行了预测, 对应土性参数与求得模型参数见表 4。试验结果与预测结果对比如图 7 所示。

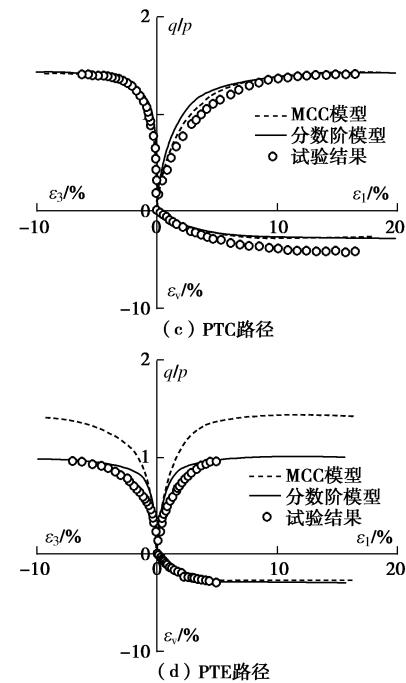
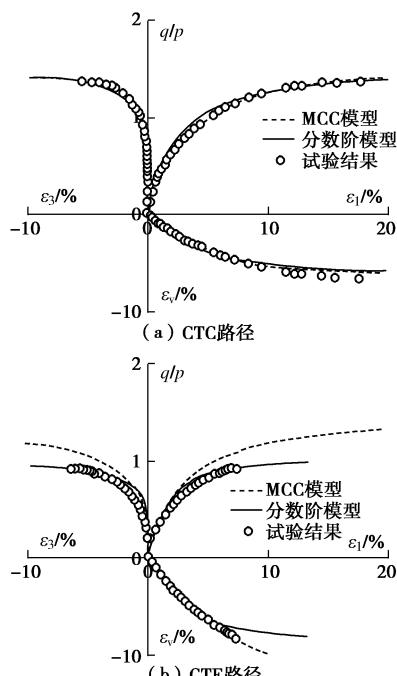


图 6 典型应力路径条件下模型预测结果与试验结果对比^[14]

Fig. 6 Comparison between predictions and test results^[14]

表 3 材料参数与模型参数

Table 3 Material parameters and model parameters

$\lambda/(1+e_0)$	$\kappa/(1+e_0)$	v_β	$\varphi_c/(^\circ)$	$\varphi_e/(^\circ)$	β	B	μ
0.0508	0.0112	0.3	35°	36.4	0.1	0.440	0.168

表 4 材料参数与模型参数

Table 4 Material parameters and model parameters

$\lambda/(1+e_0)$	$\kappa/(1+e_0)$	v	$\varphi_c/(^\circ)$	$\varphi_e/(^\circ)$	β	B	μ
0.0444	0.0047	0.3	33.7	35	0.1	0.434	0.167

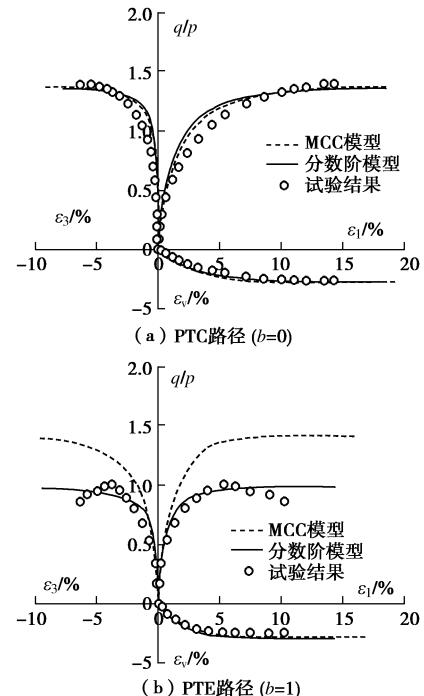


图 7 典型应力路径条件下模型预测结果与试验结果对比

Fig. 7 Comparison between predictions and test results

以上利用分数阶模型与 MCC 模型对试验结果的预测对比表明, 基于特征应力概念的分数阶临界状态模型能够对典型应力路径下土的变形与强度特性进行有效预测。在特征应力空间中利用非正流动法则建立的模型可以描述土体的临界状态特性, 并很好地反映了正常固结土在三轴伸长与压缩条件下不同的变形与强度特性。但所建立分数阶临界状态模型没有对土体软化等特性进行考虑, 尚不能描述土体的软化行为。

4 结 论

本文基于分数阶微积分方法, 得到特征应力空间中的非正流动法则, 通过特征应力空间中等向硬化规律得到硬化参数, 并引入临界状态概念建立了适用于正常固结土的分数阶临界状态模型。经典弹塑性模型的三要素: 屈服函数、流动法则与硬化规律均建立在特征应力空间中。所建立模型是对现有土的弹塑性理论的推进与扩展, 具有如下特点:

(1) 基于分数阶微分的方法, 得到了特征应力空间中的非正流动法则, 从而确定了与屈服曲线非正交的塑性应变增量方向。

(2) 模型以基于特征应力提出的非线性统一强度理论为剪切破坏条件, 仅增加材料参数 β 就可以合理描述土体在三轴拉压条件下不同的变形与强度特性, 且增加参数可以通过常规土工试验确定。

(3) 分数阶阶次 μ 是与特征应力空间参数 β 相对应, 通过特征应力参数与临界状态条件给出了分数阶阶次 μ 的明确确定方法。

参考文献:

- [1] ZHOU H W, WANG C P, HAN B B, et al. A creep constitutive model for salt rock based on fractional derivatives[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2011, **48**(1): 116 – 121.
- [2] 殷德顺, 和成亮, 陈文. 岩土应变硬化指数理论及其分数阶微积分理论基础[J]. 岩土工程学报, 2010, **32**(5): 762 – 766. (YIN De-shun, HE Cheng-liang, CHEN Wen. Theory of geotechnical strain hardening index and its rationale from fractional order calculus[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, **32**(5): 762 – 766. (in Chinese))
- [3] SMIT W, DE VRIES H. Rheological models containing fractional derivatives[J]. Rheologica Acta, 1970, **9**(4): 525 – 534.
- [4] YIN D S, WU H, CHENG C, et al. Fractional order constitutive model of geomaterials under the condition of triaxial test[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2013, **37**(8): 961 – 972.
- [5] SUMELKA W. Fractional viscoplasticity[J]. Mechanics Research Communications, 2014, **56**: 31-36.
- [6] SUMELKA W, NOWAK M. Non-normality and induced plastic anisotropy under fractional plastic flow rule: a numerical study[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2016, **40**(5): 651 – 675.
- [7] SUN Y F, XIAO Y. Fractional order plasticity model for granular soils subjected to monotonic triaxial compression[J]. International Journal of Solids and Structures, 2017, **118/119**: 224 – 234.
- [8] SUN Y F, INDRARATNA B, CARTER J P, et al. Application of fractional calculus in modelling ballast deformation under cyclic loading[J]. Computers and Geotechnics, 2017, **82**: 16 – 30.
- [9] LI X S, DAFALIAS Y F. Dilatancy for cohesionless soils[J]. Géotechnique, 2000, **50**(4): 449 – 460.
- [10] LU D C, MA C, DU X L, et al. Development of a new nonlinear unified strength theory for geomaterials based on the characteristic stress concept[J]. International Journal of Geomechanics, ASCE, 2017, **17**(2): 4016058.
- [11] MA C, LU D C, DU X L, et al. Developing a 3D elastoplastic constitutive model for soils: a new approach based on characteristic stress[J]. Computers and Geotechnics, 2017, **86**: 129 – 140.
- [12] LU D C, LIANG J Y, DU X L, et al. Fractional elastoplastic constitutive model for soils based on a novel 3D fractional plastic flow rule[J]. Comput Geotech, 2019, **105**: 277 – 290.
- [13] 路德春, 曹胜涛, 程星磊, 等. 欠固结土的弹塑性本构模型[J]. 土木工程学报, 2010, **43**(增刊): 320 – 326. (LU De-chun, CAO Sheng-tao, CHENG Xing-lei, et al. An elastoplastic constitutive model for underconsolidated clay[J]. China Civil Engineering Journal, 2010, **43**(S0): 320 – 326. (in Chinese))
- [14] YU H S. CASM: A unified state parameter model for clay and sand[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1998, **22**(8): 621 – 653.
- [15] NAKAI T, MATSUOKA H. A generalized elastoplastic constitutive model for clay in three-dimensional stresses[J]. Soils and Foundations, 1986, **26**(3): 81 – 98.
- [16] CHOWDHURY E Q, NAKAI T. Consequences of the t_{ij} -concept and a new modeling approach[J]. Computers and Geotechnics, 1998, **23**(3): 131 – 164.