

DOI: 10.11779/CJGE201903007

# 基于二阶锥规划理论的有限元强度折减法及应用

王冬勇, 陈 曦\*, 吕彦楠, 任晋岚  
(北京交通大学土木与建筑工程学院, 北京 100044)

**摘要:** 针对岩土体稳定性问题, 常用的方法有极限平衡法和有限元强度折减法等。传统的有限元强度折减法通常需设置很大的最大允许非线性迭代次数(如 200 或 500), 计算耗时严重, 此外, 采用的平衡迭代和应力积分算法可能导致岩土体塑性区计算不够准确, 进而影响稳定性分析结果。提出一种二阶锥规划有限元强度折减法, 该方法基于 Hellinger-Reissner 混合变分原理和有限元法, 将岩土体弹塑性问题构造成基于有限元框架的二阶锥规划问题, 结合强度折减技术来分析岩土体稳定性。将该新方法应用于平面应变岩土体稳定性分析, 结果表明: 与传统的有限元强度折减法相比, 新方法结果可靠, 但其计算效率更高, 所获得的塑性区更加平滑。

**关键词:** 岩土体稳定性; 二阶锥规划; 强度折减技术; 剪胀性; 塑性区

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2019)03-0457-09

作者简介: 陈 曦(1977-), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事计算岩土力学和岩土工程风险评价等方面的研究。E-mail: xichen.geo@gmail.com。

## Shear strength reduction finite element method based on second-order cone programming theory and its application

WANG Dong-yong, CHEN Xi, LÜ Yan-nan, REN Jin-lan  
(School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract:** For geotechnical stability problems, the limit equilibrium method (LEM) and shear strength reduction finite element method (SSRFEM) have been commonly used. In the traditional elasto-plastic finite element method, a large maximum allowable number of nonlinear iterations (such as 200 or 500) are often set in the SSRFEM, so that the calculation is generally time-consuming; besides, the equilibrium iteration and stress integration algorithm may probably lead to inaccurate calculation of plastic zone and stability. Based on the Hellinger-Reissner mixed variational principle and finite element method, a new shear strength reduction finite element method is proposed based on the finite element method of second-order cone programming (FEM-SOCP). In the mathematical programming finite element framework, the elasto-plastic finite element problem can be cast into a form of second-order cone programming (SOCP), and when being utilized in conjunction with the strength reduction technique, the resultant approach named SSRFEM-SOCP can be applied to geotechnical stability analysis. When being applied to plane strain problems, it is observed that SSRFEM-SOCP is reliable and efficient, and particularly the plastic zone attained by the SSRFEM-SOCP is generally smoother than that by the conventional SSRFEM method.

**Key words:** geotechnical stability; second-order cone programming; strength reduction technique; shear dilatancy; plastic zone

## 0 引言

数值方法和计算机技术的快速进步促进了岩土体稳定性分析方法的发展。目前的岩土体稳定性分析方法可归纳为 4 大类: 极限平衡法、极限分析法、位移有限元法(包括强度折减法)和滑移线法。由于力学原理明确和简单易用, 极限平衡法已经被作为规范方法, 广泛应用于工程实践, 但极限平衡法将下滑块体(即条分)视为刚体, 忽略了块体本身的变形。各种极限平衡法的主要区别在于: ①是否考虑了条分的水平向、垂直向力的平衡和力矩平衡; ②是否考虑了条

分间的所有受力(即法向力和切向力); ③条分间切向力和法向力间的函数关系<sup>[1]</sup>。有限元强度折减法则基于传统的弹塑性有限元框架, 无需复杂的编程和算法便能轻松实现, 因而得到了广泛的接受和应用<sup>[2-5]</sup>。针对相关联塑性流动 Mohr-Coulomb 模型(即不涉及剪胀角参数  $\varphi$ ), 有限元强度折减法的使用不会产生问题。

基金项目: 国家重点研发计划课题(2017YFC0804602); 中央高校基本科研业务费专项基金项目(2017YJS133, 2016JBM043)

收稿日期: 2018-03-19

\*通讯作者(E-mail: xichen.geo@gmail.com)

然而, 对于非关联塑性问题 ( $\varphi < \phi$ , 即剪胀角小于内摩擦角), 由于 Mohr-Coulomb 模型强度参数仅为黏聚力  $c$  和内摩擦角  $\phi$ , 抗剪强度折减过程中可能出现折减的内摩擦角  $\phi$  小于剪胀角  $\varphi$  (折减过程中保持不变) 的情况, 从而导致结果出现较大偏差<sup>[6]</sup>。针对非关联塑性岩土体的稳定性分析问题, 可采用 Davis 公式<sup>[7]</sup>获得等效的关联塑性材料来进行分析<sup>[8]</sup>。

在传统的弹塑性有限元计算框架内, 有限元强度折减法需设置很大的最大允许非线性迭代次数 (如 200 或 500), 经过反复平衡试算, 直到搜索到体系失稳的临界点。整个试算过程耗时严重, 制约了该方法在实际工程中的应用。尽管可采用加速技术来加速问题的求解, 如采用广义二分法搜索技术<sup>[9]</sup>、双网格技术<sup>[10]</sup>和高性能预处理迭代求解技术<sup>[11]</sup>, 但性能提高幅度有限。近年来, 数学优化技术已经成功应用于各种岩土工程问题<sup>[12-14]</sup>, 其中包括有限元优化方法 (具体又可分为刚性有限元优化<sup>[15]</sup>和非刚性有限元优化<sup>[16]</sup>)。

为了解决传统弹塑性有限元计算框架内强度折减法效率较低的问题, 拟将平面弹塑性问题重新构造成二阶锥规划 (SOCP) 问题, 使其能够采用标准的原始-对偶内点法进行求解。在岩土体稳定性分析算例中, 同时考虑了关联和非关联塑性 Mohr-Coulomb 屈服准则, 并将所提出的新的基于二阶锥规划的有限元强度折减法 (即 SSRFEM-SOCP) 与传统的有限元强度折减法 (SSRFEM) 进行对比, 来验证 SSRFEM-SOCP 的有效性。

## 1 基于二阶锥规划理论的有限元法

### 1.1 二阶锥规划理论

一个标准的二阶锥规划问题可表述为

$$\begin{aligned} & \text{Minimise } \mathbf{c}^T \mathbf{x} + c^f \\ & \text{Subject to } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_i \in C_i, i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{x}$  是未知解矢量,  $C_i$  有两种形式, 即二次标准锥和旋转锥, 分别如式 (2) 和式 (3) 所示:

$$C_Q = \left\{ \mathbf{x} \in \Re^{m+1} \mid x_1 \geq \sqrt{\sum_{j=2}^{m+1} x_j^2} \right\}, \quad (2)$$

$$C_R = \left\{ \mathbf{x} \in \Re^{m+2} \mid 2x_1 x_2 \geq \sqrt{\sum_{j=3}^{m+2} x_j^2}, x_1, x_2 \geq 0 \right\}. \quad (3)$$

### 1.2 Hellinger-Reissner 变分原理

二阶锥规划理论的有限元法 (FEM-SOCP) 基于 Hellinger-Reissner 混合变分原理, 不同于最小势能和最小余能定理, Hellinger-Reissner 变分原理属于二类

变量变分原理, 即位移与应力都是主场变量。在弹塑性边值问题中, Hellinger-Reissner 泛函可表示为

$$\Pi_{HR}(\Delta\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \nabla(\Delta\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \Delta\mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{t}^T \Delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \Delta\boldsymbol{\sigma}^T \mathcal{C} \Delta\boldsymbol{\sigma} d\Omega, \quad (4)$$

式中,  $\mathbf{b}$  为体力,  $\mathbf{t}$  为面力,  $\mathcal{C}$  是弹性柔度矩阵,  $\nabla$  是微分算子,  $\Omega$  和  $\Gamma$  分别为求解域和边界符号。令  $\delta\Pi_{HR}(\Delta\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})=0$ , 该驻值问题属于鞍点问题<sup>[17]</sup>, 可借助最小-最大优化方法来求解<sup>[18]</sup>, 即在目标函数中, 对应力求最小化, 对位移求最大化。考虑到屈服函数, FEM-SOCP 增量形式为

$$\begin{aligned} & \text{Min} \underset{\Delta\mathbf{u}}{\text{Max}} \left( \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{k+1}^T \nabla(\Delta\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \Delta\mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{t}^T \Delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \Delta\boldsymbol{\sigma}^T \mathcal{C} \Delta\boldsymbol{\sigma} d\Omega \right) \\ & \text{Subject to } F(\boldsymbol{\sigma}_{k+1}) \leq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

式中,  $F$  为屈服函数,  $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k$ ,  $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{k+1} - \boldsymbol{\sigma}_k$ ,  $\mathbf{u}_k$  和  $\boldsymbol{\sigma}_k$  是已知变量, 而  $\mathbf{u}_{k+1}$  和  $\boldsymbol{\sigma}_{k+1}$  是未知变量。

### 1.3 有限元离散

基于混合变分原理, 对应力和位移变量分别插值,

$$\boldsymbol{\sigma} \approx N_{\sigma} \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \mathbf{u} \approx N_u \hat{\mathbf{u}}, \quad (6)$$

式中,  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  为积分点应力矢量,  $\hat{\mathbf{u}}$  是节点位移矢量,  $N_{\sigma}$  和  $N_u$  分别为应力和位移的形函数。本文采用的是 8 节点、9 个积分点的四边形单元。将式 (6) 代入到式 (5) 中, 可得

$$\begin{aligned} & \text{Min} \underset{\Delta\mathbf{u}}{\text{Max}} \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{k+1}^T \mathbf{B}_N \Delta\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{f}^T \Delta\hat{\mathbf{u}} - \frac{1}{2} \Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathcal{C} \Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} \right) \\ & \text{Subject to } F(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{k+1}^i) \leq 0 \quad (i=1, \dots, n_{\sigma}) \end{aligned} \quad (7)$$

式中,  $n_{\sigma}$  为整个求解域中应力点的个数, 且满足

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_N &= \int_{\Omega} N_{\sigma}^T \nabla N_u d\Omega, \quad \mathbf{f} = \int_{\Omega} N_u \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} N_u \mathbf{t} d\Gamma, \\ \mathcal{C} &= \int_{\Omega} N_{\sigma}^T \mathcal{C} N_{\sigma} d\Omega, \end{aligned} \quad (8)$$

式 (7) 目标函数中最小化部分为平衡方程, 即

$$\mathbf{B}_N^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{k+1} - \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (9)$$

因此, 目标函数中只需要求解最大化部分

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad -\frac{1}{2} \Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathcal{C} \Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ & \text{Subject to} \quad \mathbf{B}_N^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{k+1} = \mathbf{f} \\ & F(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{k+1}^i) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_{\sigma} \end{aligned} \quad (10)$$

式 (10) 等效为

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad \frac{1}{2} \Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathcal{C} \Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ & \text{Subject to} \quad \mathbf{B}_N^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{k+1} = \mathbf{f} \\ & F(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{k+1}^i) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_{\sigma} \end{aligned} \quad (11)$$

然后引入辅助变量  $\eta_i$ , 将目标函数线性化

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{n_\sigma} \eta_i \\ & \text{Subject to} \quad \mathbf{B}_N^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{k+1} = \mathbf{f} \\ & \quad F(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{k+1}^i) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_\sigma \\ & \quad \frac{1}{2} (\Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}^i)^T \mathbf{C}_i \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}^i \leq \eta_i \quad . \end{aligned} \quad (12)$$

为了将式(12)中第二个不等式转化为旋转锥约束, 需要引入一些辅助变量

$$\mathbf{C}_i = \mathbf{L}_i \mathbf{L}_i^T, \quad \boldsymbol{\zeta}_i = \mathbf{L}_i^T \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}^i, \quad s_i = 1, \quad i = 1, \dots, n_\sigma, \quad (13)$$

得到

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{n_\sigma} \eta_i \\ & \text{Subject to} \quad \mathbf{B}_N^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{k+1} = \mathbf{f} \\ & \quad F(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{k+1}^i) \leq 0 \\ & \quad \boldsymbol{\zeta}_i^T \boldsymbol{\zeta}_i \leq 2\eta_i s_i, \quad i = 1, \dots, n_\sigma \\ & \quad \mathbf{C}_i = \mathbf{L}_i \mathbf{L}_i^T \\ & \quad \boldsymbol{\zeta}_i = \mathbf{L}_i^T \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}^i \\ & \quad s_i = 1 \quad . \end{aligned} \quad (14)$$

显然, 式(12)中的第二个不等式约束已经转化为了旋转锥约束, 而屈服函数不等式也需要转化为锥约束。平面应变条件下, Mohr–Coulomb 强度准则可表示为

$$F(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} + (\sigma_x + \sigma_y)\sin\phi - 2c\cos\phi \leq 0, \quad (15)$$

式中,  $c$  和  $\phi$  分别为黏聚力和内摩擦角。当定义

$$\hat{\mathbf{q}}_i = [q_1, q_2, q_3]^T = \mathbf{A}_i \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i + \mathbf{a}_i, \quad (16)$$

其中

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} -\sin\phi & -\sin\phi & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} 2c\cos\phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

公式(15)可转化为二次锥约束, 且对每个应力点满足

$$\hat{\mathbf{q}}_i \in \mathcal{C}_Q, \quad \mathcal{C}_Q = \left\{ \hat{\mathbf{q}}_i \in \mathbb{R}^3 \mid q_1 \geq \sqrt{q_2^2 + q_3^2} \right\}, \quad (18)$$

最终需求解的 SOCP 问题如式(19)所示, 详细的推导过程可参考文献[18]。

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{n_\sigma} \eta_i \\ & \text{Subject to} \quad \mathbf{B}_N^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{k+1} = \mathbf{f} \\ & \quad \hat{\mathbf{q}}_i = \mathbf{A}_i \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{k+1}^i + \mathbf{a}_i \\ & \quad \boldsymbol{\zeta}_i^T \boldsymbol{\zeta}_i \leq 2\eta_i s_i \\ & \quad \mathbf{C}_i = \mathbf{L}_i \mathbf{L}_i^T, \quad i = 1, \dots, n_\sigma \\ & \quad \boldsymbol{\zeta}_i = \mathbf{L}_i^T \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}^i \\ & \quad s_i = 1 \\ & \quad \hat{\mathbf{q}}_i \in \mathcal{C}_Q \quad , \end{aligned} \quad (19)$$

针对式(19)所示的 SOCP 问题, 可采用高效的锥优化求解器(如 MOSEK<sup>[19]</sup>)进行求解。

## 2 基于二阶锥规划理论的有限元强度折减法

有限元强度折减法和重力加载法是较为常用的两种位移有限元法, 尽管这两种方法都可应用于岩土体稳定性分析中, 但有限元强度折减法计算结果通常更加可靠。公式(19)可直接与强度折减技术相结合来进行相关联塑性材料的岩土体稳定性分析, 然而对于非关联塑性材料的岩土体稳定性问题, Davis<sup>[7]</sup>建议将非关联塑性问题等效为相关联塑性问题进行求解。对于 Mohr–Coulomb 强度准则, 等效的抗剪强度为

$$\tau_f = c^* + \sigma_n \tan\phi^*, \quad (20)$$

式中

$$\begin{cases} c^* = \omega_{OD} c \\ \tan\phi^* = \omega_{OD} \tan\phi \end{cases}, \quad \omega_{OD} = \frac{\cos\phi \cos\varphi}{1 - \sin\phi \sin\varphi}, \quad (21)$$

其中,  $0 \leq \omega_{OD} \leq 1$  可以视作一折减参数, 因此所等效的相关联塑性材料的强度通常要低于非关联塑性材料。根据式(21),  $\omega_{OD}$  值与内摩擦角  $\phi$  和剪胀角  $\varphi$  有关, 如图 1 所示。

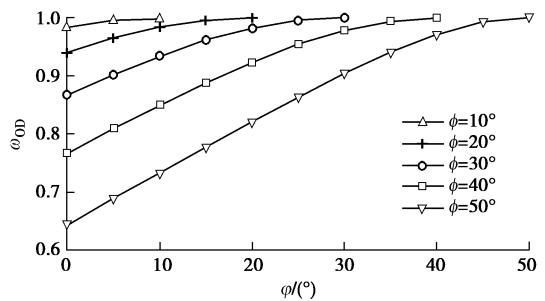


图 1 强度折减参数  $\omega_{OD}$

Fig. 1 Strength reduction factor  $\omega_{OD}$

对式(20)的抗剪强度折减后, 相应的抗剪强度指标为

$$\left. \begin{array}{l} c_r = c^* / \text{SRF}, \\ \tan\phi_r = \tan\phi^* / \text{SRF} \end{array} \right\} \quad (22)$$

式中, SRF 指的是强度折减因子,  $c_r$  和  $\phi_r$  分别为折减后的黏聚力和内摩擦角。式(21)中  $\omega_{OD}$  参数对应原始的 Davis 方法, 然而在强度折减过程中内摩擦角  $\phi$  和剪胀角  $\varphi$  是不断折减的, 因此随着  $\phi$  和  $\varphi$  的更新,  $\omega$  也应该进行相应更新<sup>[8]</sup>, 对  $\omega_{OD}$  进行修正, 得到修正后的 Davis 公式, 即

$$\omega_{MD} = \frac{\cos \left[ \arctan \left( \frac{\tan\phi}{\text{SRF}} \right) \right] \cos \left[ \arctan \left( \frac{\tan\varphi}{\text{SRF}} \right) \right]}{1 - \sin \left[ \arctan \left( \frac{\tan\phi}{\text{SRF}} \right) \right] \sin \left[ \arctan \left( \frac{\tan\varphi}{\text{SRF}} \right) \right]} \quad . \quad (23)$$

将二阶锥规划的有限元法与强度折减技术相结合, 提出 SSRFEM-SOCP 法, 并将其应用于岩土体稳定性分析。本文采用 FORTRAN 语言编制了 SSRFEM-SOCP 程序, 并采用 MOSEK<sup>[19]</sup>进行二阶锥规划问题的求解。在强度折减过程中(即对于一个确定的强度折减因子), 如果能够获得一个静力许可的应力场, 则说明规划求解存在可行解; 如果不能获得静力许可的应力场, 则规划求解不存在可行解。这里采用标准二分法来搜索可行解与不可行解之间的临界状态<sup>[9]</sup>, 对应临界状态的强度折减因子便是安全系数(FOS), 这里所采用二分法搜索算法如表 1 所示。

表 1 二分法搜索安全系数的流程图

Table 1 Bracketing and bisection searching algorithm for FOS

给定初始搜索区间  $[a_0, b_0]$ , 设置允许值  $\varepsilon$  为 0.001 或 0.01

初始化  $a = a_0$ ,  $b = b_0$ , SRF=1

For  $n = 1:500$

利用 MOSEK 判断 FEM-SOCP 问题是否有可行解

If  $(b-a) < \varepsilon$  and (FEM-SOCP 有可行解)

FOS = SRF; Return

End

SRF =  $(a+b)/2$ ;

If FEM-SOCP 无可行解

$b = SRF$ ;

Else

$a = SRF$ ;

End

End

### 3 边坡稳定性分析算例

#### 3.1 多层土边坡

以澳大利亚 ACADS 考题 EX1(c)<sup>[20]</sup>的三层土边坡为例, 其几何尺寸和有限元网格分别如图 2 (a) 和图 2 (b) 所示, 整个求解域划分了 1312 个单元; 土层材料参数如表 2 所示, 其中,  $\gamma$  为土的天然重度,  $E$  和  $\nu$  分别为土的弹性模量和泊松比。

表 2 ACADS 考题 EX1(c) 算例的土层参数

Table 2 Soil parameters in the EX1(c) example of ACADS

土层	$c/kPa$	$\phi(^{\circ})$	$\gamma/(kN\cdot m^{-3})$	$E/MPa$	$\nu$
土层 1	0.0	38	19.5	10	0.25
土层 2	5.3	23	19.5	10	0.25
土层 3	7.2	20	19.5	10	0.25

对于该 EX1(c) 边坡例题, 当  $\varphi=\phi$  时(即相关联塑性问题), 推荐的边坡安全系数值为 1.39。首先采用传统的有限元强度折减法 SSRFEM 进行分析, 基于不平衡力的非线性收敛准则, 设置误差允许值  $tol_{nl}=$

0.001, 最大允许非线性迭代次数  $maxit_{nl}=500$ , 所获得的边坡安全系数为 1.375。利用基于二阶锥规划的有限元强度折减法 SSRFEM-SOCP 计算时, 该边坡的安全系数是 1.402, 略大于 SSRFEM 的计算结果(相差 2% 左右)。

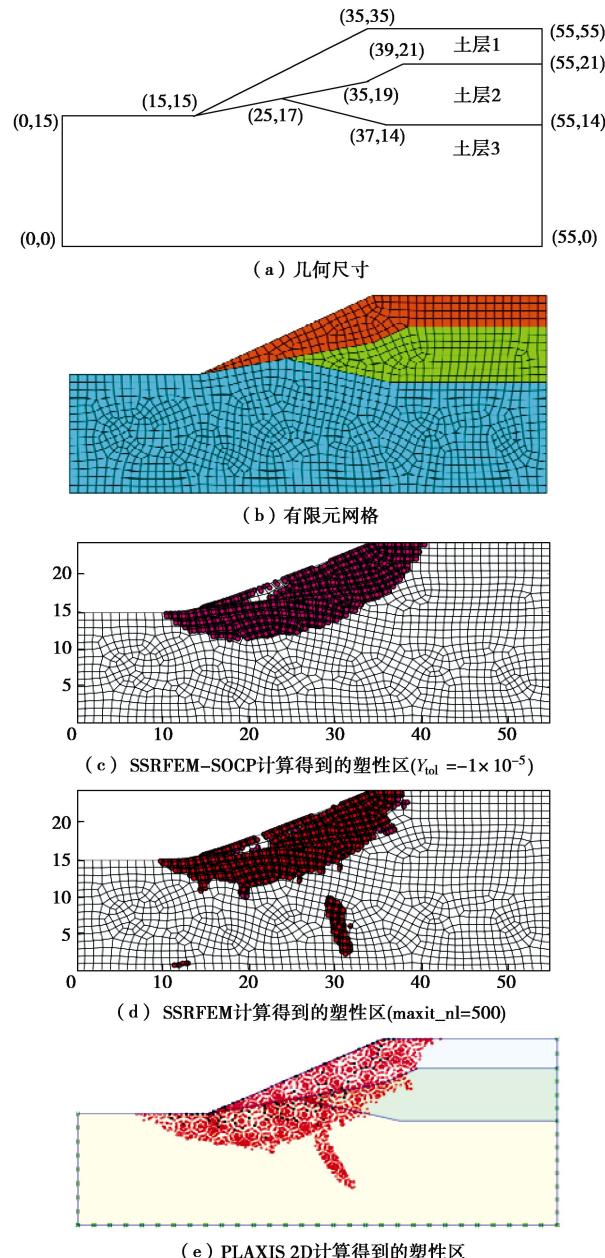


图 2 ACADS 算例 EX1(c) 的几何尺寸、有限元网格及塑性区  
( $\varphi=\phi$ )

Fig. 2 Geometry, finite element mesh and yield zone of EX1(c) example of ACADS ( $\varphi=\phi$ )

与常规弹塑性有限元计算不同, 利用数学优化求解 SOCP 问题时, 屈服函数只是优化问题中的一个不等式约束条件, 从理论上讲 SOCP 计算出来的应力点的屈服函数值应该严格满足 “ $f \leq 0$ ”, 但由于数值计算误差的存在, 塑性点的屈服函数值在  $f=0$  附近, 因此引入了屈服函数允许值  $Y_{tol}$ 。在 FEM-SOCP 中, 若某

应力点满足  $f \geq Y_{tol}$ , 则认为该点发生屈服, 否则为弹性状态。 $Y_{tol}$  的取值大小将会对塑性区有一定影响, 其取值与 MOSEK 求解器内置允许值有关。MOSEK 求解 SOCP 问题的原始-对偶内点法中有 5 个容差控制参数  $\rho_p$ ,  $\rho_d$ ,  $\rho_g$ ,  $\rho_i$  和  $\rho_r$ 。定义容差矢量  $\rho = (\rho_p, \rho_d, \rho_g, \rho_i, \rho_r)$ , 在 MOSEK 中默认的容差矢量为  $\rho_0 = (1 \times 10^{-8}, 1 \times 10^{-8}, 1 \times 10^{-7}, 1 \times 10^{-10}, 1 \times 10^{-8})$ , 定义一个标量参数  $\mu$

$$\rho = \mu \rho_0, \quad (24)$$

当  $\mu=1$  时, 表示在 MOSEK 求解器中采用默认的容差参数, 即  $\rho = \rho_0$ 。根据数值计算的结果分析,  $Y_{tol}$  可用公式 (25) 确定

$$Y_{tol} = -1 \times 10^{-5} / \mu, \quad (25)$$

在本文中采用  $\mu=1$ , 即  $Y_{tol} = -1 \times 10^{-5}$ , 利用 SSRFEM-SOCP 法计算得到的塑性区分别如图 2 (c) 所示, 而图 2 (d) 为采用 SSRFEM 计算获得的塑性区。对比图 2 (c) 和图 2 (d) 的塑性区可知, 两种方法所获得的塑性区基本一致, 但 SSRFEM-SOCP 的塑性区明显更加平滑, 而 SSRFEM 基于传统的弹塑性计算框架, 需借助于 Newton-Raphson 等非线性平衡迭代和应力积分, 可能会导致不平衡力向周围弹性区域的传递, 进而导致塑性区出现不平滑现象。为了验证本文程序的正确性, 同时利用商业有限元软件 PLAXIS 2D 对该算例进行求解, 在 PLAXIS 2D 建模过程中, 采用的是 15 节点三角形单元, 有限元网格疏密设置为最密(very fine), 共 887 个单元, 计算所得塑性区如图 2 (e) 所示。PLAXIS 2D 显示塑性区时, 红色点表示剪切破坏, 黑色点表示受拉破坏, 而自开发程序未对上述两种破坏形式加以区分。PLAXIS 2D 计算得到的塑性区也会出现不平滑现象, 证实了传统弹塑性计算中不平衡力向周围弹性区域传递会导致塑性区出现不平滑的论断。

为了说明考虑材料非关联塑性的重要性, 引入剪胀系数  $\beta = \varphi/\phi$ , 且  $0 \leq \beta \leq 1$ 。从图 3 (a) 中可以看出, 不管采用哪种(原始的或修正的) Davis 公式, 基于 SSRFEM-SOCP 计算所获得的安全系数都会随  $\beta$  的增加而增大, 但基于原始的 Davis 公式会获得更加保守的安全系数, 尤其是剪胀角较小时。原始的 Davis 公式中  $\omega_{OD}$  在强度折减过程中始终保持不变, 而修正的 Davis 公式中  $\omega_{MD}$  在强度折减过程中随着内摩擦角  $\phi$  和剪胀角  $\varphi$  的折减而不断更新, 所获得的安全系数更为准确。当  $\beta=0$  时,  $\omega_{OD}$  和  $\omega_{MD}$  随 SRF 演化过程如图 3 (b) 所示。

以相关联塑性 ( $\varphi=\phi$ ) 为例, 调研 SSRFEM 和 SSRFEM-SOCP 中所采用的二分法的迭代特性, 对比结果如图 4 (a) 和图 4 (b) 所示。对于 SSRFEM,

判断不收敛所需要的迭代数通常要远远大于判断收敛所需要的迭代数, 当设置的最大允许非线性迭代次数 maxit\_nl 从 50 增加到 500, 计算时间会显著增加; SSRFEM 判断体系平衡或不平衡所需计算量差异较大, 而利用 SSRFEM-SOCP 判断求解可行或不可行需要的迭代数或计算量相差不大, 对于本算例, 每次折减强度需要 MOSEK 求解器迭代约 8~20 次来判断解的可行或不可行。对比 SSRFEM 和 SSRFEM-SOCP 的计算时间, 如图 4 (c) 所示, SSRFEM 消耗的计算时间主要与设置的最大允许非线性迭代次数 maxit\_nl 有关, 而 SSRFEM-SOCP 消耗的计算时间一般相当于 maxit\_nl=150 时 SSRFEM 的计算时间。将 SSRFEM 应用于实际工程问题, 设置的最大迭代次数一般取 maxit\_nl=200 或 500, 因此可以预计 SSRFEM-SOCP 的求解效率通常更高。图 4 (d) 给出了 SSRFEM 和 SSRFEM-SOCP 中二分法搜索安全系数的过程, 设置初始区间  $[a_0, b_0] = [0.2, 3.0]$  和收敛允许值  $\varepsilon=0.01$ , 一般只需要搜索 10~13 次试算便可得到安全系数。

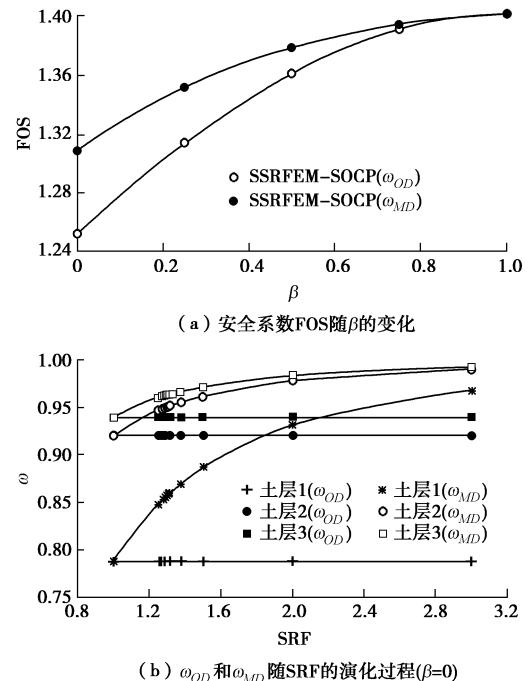
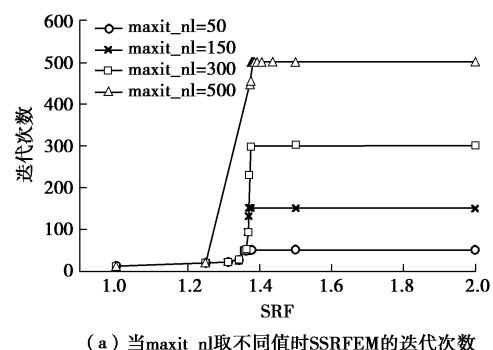


图 3 基于 SSRFEM-SOCP 计算得到的 FOS 及  $\omega$  的演化过程

Fig. 3 FOS calculated by SSRFEM-SOCP and evolution of  $\omega$



(a) 当 maxit\_nl 取不同值时 SSRFEM 的迭代次数

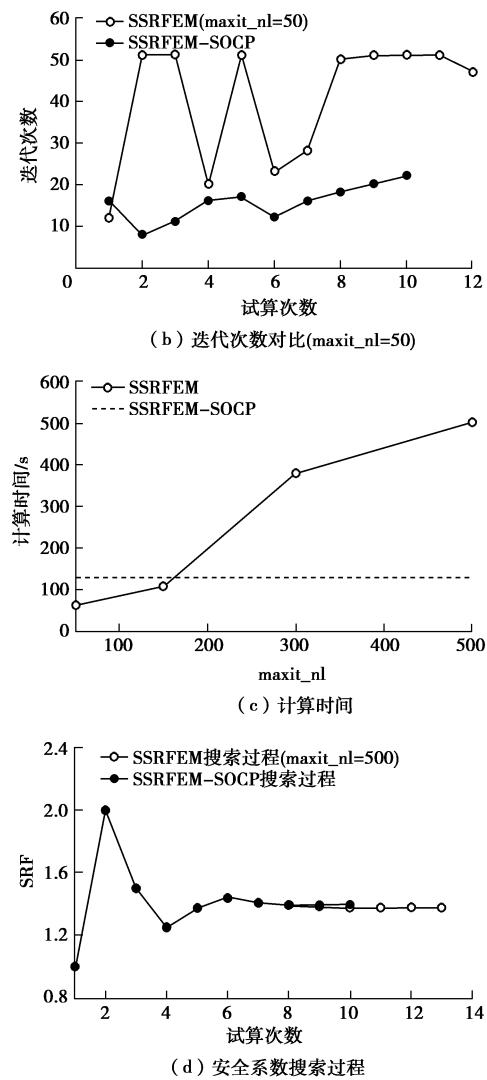


图 4 利用 SSRFEM 和 SSRFEM-SOCP 搜索安全系数 FOS 的过程 ( $\varphi=\phi$ )

Fig. 4 Searching process for FOS using SSRFEM and SSRFEM-SOCP ( $\varphi=\phi$ )

### 3.2 含软弱夹层土边坡

本文以 Donald 等<sup>[21]</sup>中软弱夹层土质边坡为例, 土坡几何和有限元网格如图 5 (a) 所示, 整个求解域划分了 3726 个单元。土层 1 和土层 2 (软弱夹层) 的材料参数如表 3 所示。

表 3 含软弱夹层土质边坡的土层参数

Table 3 Soil parameters of soil slope with a weak layer

土层	c/kPa	$\phi(^{\circ})$	$\gamma(kN \cdot m^{-3})$	E/MPa	$\nu$
土层 1	28.5	20	18.84	100	0.3
土层 2	0	10	18.84	10	0.3

利用有限元强度折减法 SSRFEM 分析该软弱夹层边坡稳定性时, 设置最大允许非线性迭代次数 maxit\_nl=500, 对于  $\varphi=\phi$  和  $\varphi=0$  两种情况, 相应的 FOS 是 1.282 和 1.270, 基本接近 Donald 等<sup>[21]</sup>利用极限平衡法的结果 1.27。利用 SSRFEM-SOCP 计算该边坡的安全系数, 对于  $\varphi=\phi$ , 计算得到的 FOS 是 1.299,

比 SSRFEM 计算得到的安全系数高 1.3%; 对于  $\varphi=0$ , 原始 Davis 公式和修正的 Davis 公式都应用在 SSRFEM-SOCP 中, 计算得到的安全系数分别是 1.238 和 1.260。尽管与 SSRFEM 相比, SSRFEM-SOCP( $\omega_{OD}$ ) 和 SSRFEM-SOCP( $\omega_{MD}$ ) 计算得到的安全系数相对比较保守, 但 SSRFEM-SOCP( $\omega_{MD}$ ) 的计算结果与 SSRFEM 的结果更接近。

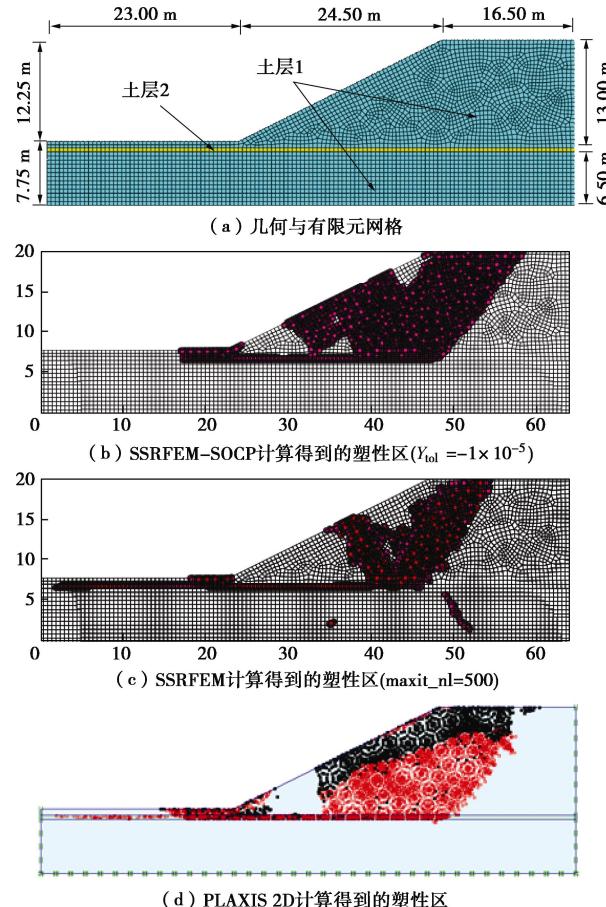


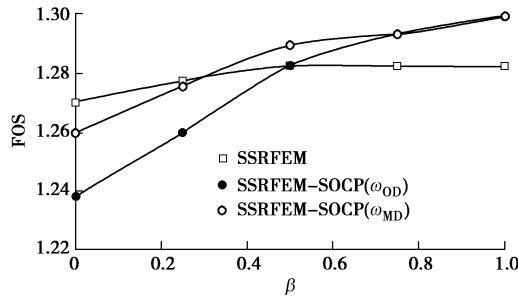
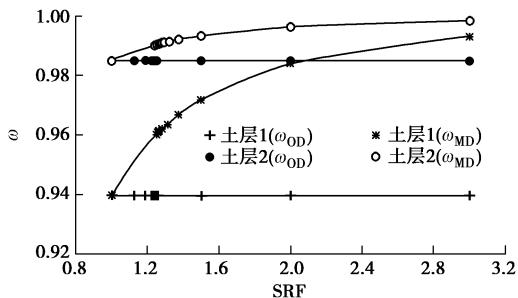
图 5 软弱夹层土质边坡算例的几何尺寸、有限元网格及塑性区 ( $\varphi=\phi$ )

Fig. 5 Geometry, finite element mesh and yield zone of soil slope with a weak layer ( $\varphi=\phi$ )

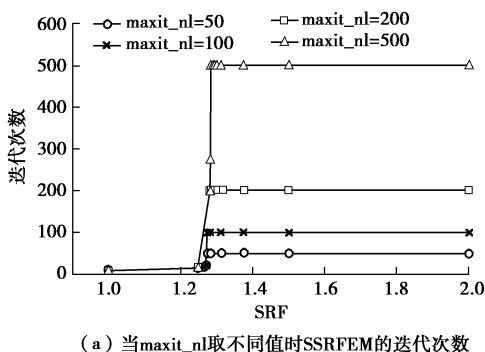
当  $\varphi=\phi$  时, 取  $\gamma_{tol}=-1 \times 10^{-5}$ , 分别利用 SSRFEM-SOCP、SSRFEM 和 PLAXIS 2D 计算该含软弱夹层土边坡的塑性区, 在 PLAXIS 2D 建模过程中, 采用的是 15 节点三角形单元, 有限元网格疏密设置为最密 (very fine), 共 745 个单元, 计算得到的塑性区分别如图 5 (b)、图 5 (c) 和图 5 (d) 所示, 3 种方法计算得到的塑性区塑性区基本一致, 并且 SSRFEM-SOCP 计算得到的塑性区更加平滑、均匀。

从图 6 (a) 中可以看出, SSRFEM 和 SSRFEM-SOCP 计算得到的安全系数都随着  $\beta$  的增加而增大, SSRFEM-SOCP( $\omega_{MD}$ ) 与传统的 SSRFEM 计算结果更接近。图 6 (b) 给出了在强度折减中  $\omega_{OD}$  和  $\omega_{MD}$  的演化过程, 原始 Davis 公式中  $\omega_{OD}$  始终是常数, 修正的

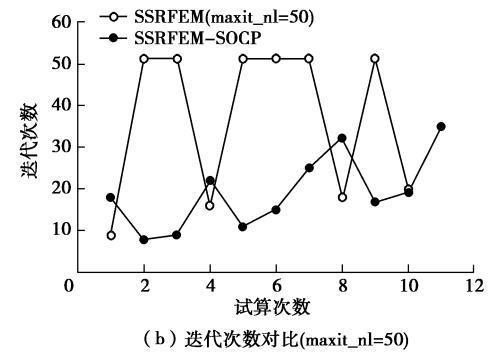
Davis 公式中  $\omega_{MD}$  在强度折减过程中随着内摩擦角  $\phi$  和剪胀角  $\varphi$  的折减而不断更新。

(a) 安全系数FOS随 $\beta$ 的变化(b)  $\omega_{OD}$ 和 $\omega_{MD}$ 随SRF的演化过程( $\beta=0$ )图 6 基于 SSRFEM-SOCP 计算得到的 FOS 及  $\omega$  的演化过程Fig. 6 FOS calculated by SSRFEM-SOCP and evolution of  $\omega$ 

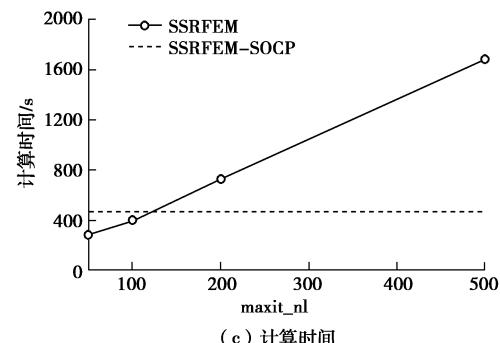
以相关塑性 ( $\varphi=\phi$ ) 为例, 研究该算例 SSRFEM 和 SSRFEM-SOCP 中所采用的二分法的迭代特性。从图 7(a) 和图 7(b) 中可以看出, 对于 SSRFEM, 判断不收敛的时间要远远大于判断收敛的时间, 当 maxit\_nl 从 50 增加到 500, 计算时间显著增加; 由于 SSRFEM-SOCP 的迭代收敛特性不同于 SSRFEM, 采用 SSRFEM-SOCP 求解本算例时, 每次折减强度需要 MOSEK 求解器 8~35 次迭代来判断解的可行或不可行。同时对比了 SSRFEM 和 SSRFEM-SOCP 的计算时间, 如图 7(c) 所示。SSRFEM 消耗的计算时间主要与 maxit\_nl 有关, 而实际上对于 SSRFEM 一般取 maxit\_nl=200 或 500, 对于该算例, SSRFEM-SOCP 消耗的计算时间相当于 maxit\_nl=120 时 SSRFEM 的计算时间。图 7(d) 给出了 SSRFEM 和 SSRFEM-SOCP 利用二分法搜索安全系数的过程, 设置初始区间  $[a_0, b_0] = [0.2, 3.0]$  和允许值  $\varepsilon=0.01$ , 需要搜索 11~12 次即可得到安全系数。



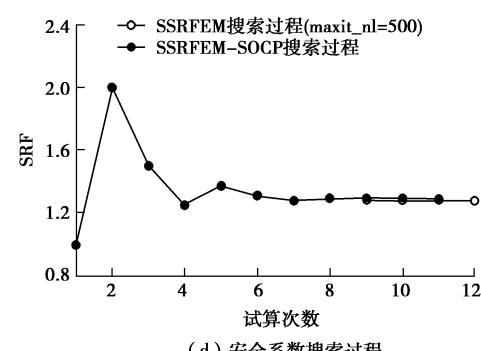
(a) 当maxit\_nl取不同值时SSRFEM的迭代次数



(b) 迭代次数对比(maxit\_nl=50)



(c) 计算时间



(d) 安全系数搜索过程

图 7 利用 SSRFEM 和 SSRFEM-SOCP 搜索安全系数 FOS 的过程 ( $\varphi=\phi$ )Fig. 7 Searching process for FOS using SSRFEM and SSRFEM-SOCP ( $\varphi=\phi$ )

## 4 结论

基于数学规划理论和有限元离散原理, 将 Mohr-Coulomb 材料的平面弹塑性问题构造成二阶锥规划问题, 结合强度折减技术, 提出了一种基于二阶锥规划理论的有限元强度折减法, 即 SSRFEM-SOCP 法, 将其应用于平面应变条件下的岩土体稳定性分析, 得到如下主要结论:

- (1) 基于二阶锥规划有限元法, 弹塑性问题能够被构造成标准的二阶锥规划问题, 进而可以采用标准的规划求解器 (如 MOSEK) 进行高效求解。
- (2) 相比基于传统弹塑性有限元框架的强度折减法 SSRFEM, SSRFEM-SOCP 规避了 Newton-Raphson 等非线性平衡迭代和应力积分, 所获得的塑性区更加

平滑。

(3) 采用 SSRFEM-SOCP 进行非关联塑性问题的求解时, 对比了原始的 Davis 公式和修正 Davis 公式。结果表明: 原始的 Davis 公式中, 等效参数  $\omega_{OD}$  在强度折减过程中始终保持不变, 尤其在剪胀角较小时, 低估了安全系数; 而在修正的 Davis 公式中, 等效参数  $\omega_{MD}$  会在强度折减过程中随内摩擦角和剪胀角的折减而不断更新, 进而所获得安全系数更加精确。

(4) 对比 SSRFEM-SOCP 与 SSRFEM 中二分法搜索形态可知: SSRFEM-SOCP 与 SSRFEM 计算得到的安全系数基本一致; 在计算效率方面, SSRFEM-SOCP 的计算时间相当于 SSRFEM 设置最大非线性迭代次数 maxit\_nl=120~150 时的计算时间, 而通常 SSRFEM 中 maxit\_nl 常需设置一个较大值(如 200 或 500), 因此可以预计 SSRFEM-SOCP 的计算效率通常更高。

## 参考文献:

- [1] KRAHN J. Stability modeling with SLOPE/W: an engineering methodology[M]. Alberta: GEO-SLOPE/W International Ltd., 2004.
- [2] GRIFFITHS D V, LANE P A. Slope stability analysis by finite elements[J]. *Géotechnique*, 1999, **49**(3): 387~403.
- [3] 连镇营, 韩国城, 孔宪京. 强度折减有限元法研究开挖边坡的稳定性[J]. 岩土工程学报, 2001, **23**(4): 406~411. (LIAN Zhen-ying, HAN Guo-cheng, KONG Xian-jing. Stability analysis of excavation by strength reduction FEM[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, **23**(4): 406~411. (in Chinese))
- [4] 赵尚毅, 郑颖人, 时卫民, 等. 用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数[J]. 岩土工程学报, 2002, **24**(3): 343~346. (ZHAO Shang-yi, ZHENG Ying-ren, SHI Wei-min, et al. Analysis on safety factor of slope by strength reduction FEM[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, **24**(3): 343~346. (in Chinese))
- [5] 林鸿州, 于玉贞, 李广信, 等. 强度折减有限元法在滑坡特性预测的应用探讨[J]. 岩土工程学报, 2009, **31**(2): 229~233. (LIN Hong-chou, YU Yu-zhen, LI Guang-xin, et al. Finite element method with consideration shear strength reduction for prediction of landslide[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, **31**(2): 229~233. (in Chinese))
- [6] 陈曦, 张训维, 苗姜龙, 等. 土体剪胀特性对土质边坡体系稳定性的影响[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版), 2017, **36**(1): 52~57. (CHEN Xi, ZHANG Xun-wei, MIAO Jiang-long, et al. Stability analysis and evaluation of soil slope system considering the shear dilatancy effect[J]. Journal of Chongqing Jiaotong University (Natural Science), 2017, **36**(1): 52~57. (in Chinese))
- [7] DAVIS E H. Theories of plasticity and failure of soil masses[M]. London: Butterworths, 1968: 341~380.
- [8] TSCHUCHNIGG F, SCHWEIGER H F, SLOAN S W. Slope stability analysis by means of finite element limit analysis and finite element strength reduction techniques: part I numerical studies considering non-associated plasticity[J]. *Computers and Geotechnics*, 2015, **70**: 169~177.
- [9] 陈曦, 刘春杰. 有限元强度折减法中安全系数的搜索算法[J]. 岩土工程学报, 2010, **28**(9): 1443~1447. (CHEN Xi, LIU Chun-jie. Search algorithms for safety factor in finite element shear strength reduction method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, **28**(9): 1443~1447. (in Chinese))
- [10] CHEN X, WU Y, YU Y, et al. A two-grid search scheme for large-scale 3-D finite element analyses of slope stability[J]. *Computers and Geotechnics*, 2014, **62**: 203~215.
- [11] CHEN X, JIE Y, LIU J. Robust partitioned block preconditioners for large-scale geotechnical applications with soil-structure interactions[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2014, **38**(1): 72~91.
- [12] 杨小礼. 线性与非线性破坏准则下岩土极限分析方法及其应用[D]. 长沙: 中南大学, 2002. (YANG Xiao-li. Limit analysis method and its application to geotechnical engineering with linear and nonlinear failure criteria[D]. Changsha: Central South University, 2002. (in Chinese))
- [13] 殷建华, 陈健, 李焯芬. 岩土边坡稳定性的刚体有限元上限分析法[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, **23**(6): 898~905. (YIN Jian-hua, CHEN Jian, LEE C F. Ultimate limit analysis of stability of rock and soil slopes using rigid finite elements[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, **23**(6): 898~905. (in Chinese))
- [14] WANG D, CHEN X, FAN Q, et al. Comparison of discontinuity layout optimization and finite element optimization for plane plasticity problems[C]// The 15th International Conference of the International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics. Wuhan, 2017.

- [15] TANG C, PHOON K K, TOH K C. Lower-bound limit analysis of seismic passive earth pressure on rigid walls[J]. International Journal of Geomechanics, 2014, 14(5): 04014022.
- [16] 张雪, 盛岱超. 一种模拟土体流动的连续体数值方法[J]. 岩土工程学报, 2016, 38(3): 562–569. (ZHANG Xue, SHENG Dai-chao. Continuum approach for modelling soil flow in geotechnical engineering[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, 38(3): 562–569. (in Chinese))
- [17] ZHOU T. Stabilized hybrid finite element methods based on the combination of saddle point principles of elasticity problems[J]. Mathematics of Computation, 2003, 72(244): 1655–1673.
- [18] KRABBENHØFT K, LYAMIN A V, SLOAN S W. Formulation and solution of some plasticity problems as conic programs[J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, 44(5): 1533–1549.
- [19] MOSEK A S. The MOSEK C optimizer API manual, version 8.0[OL]. <http://docs.mosek.com/8.0/capi/index.html>, 2016-12-25.
- [20] DONALD I B, GIAM P S K. The ACADS Slope Stability Programs Review[C]// 6th International Symposium on Landslides. Christchurch, 1992.
- [21] DONALD I B, GIAM P S K. Soil slope stability programs review[C]// ACADS Publication No. U255. Melbourne, 1989.

### 黄文熙讲座学术报告会 暨《岩土工程学报》创刊四十周年活动通知

第 22 讲黄文熙讲座学术报告会(2019 年)暨《岩土工程学报》创刊四十周年活动将于 2019 年 4 月 21 日在南京水利科学研究院举办。第 22 讲黄文熙讲座主讲人为河海大学高玉峰教授和天津大学/同济大学蒋明镜教授。讲座题目分别为“河谷场地地震波传播解析模型及放大效应”和“现代土力学研究的新视野——宏微观土力学”。讲座文稿已刊登在《岩土工程学报》2019 年第 1 期和第 2 期黄文熙讲座栏目。2019 年正值学报创刊四十周年, 讲座期间将召开《岩土工程学报》编委会会议, 并邀请有关学者专家做学术报告。热烈邀请学报编委参加编委会会议及相关活动, 热忱欢迎全国岩土工程界的专家学者及各有关单位的代表参加黄文熙讲座学术报告会等学术活动。

第 22 讲黄文熙讲座学术报告会将于 2019 年 4 月 21 日上午在南京市广州路 225 号南京水利科学研究院水文水资源大楼

12 楼综合会议厅举行, 会前会议现场报到注册, 具体议程请关注南京水利科学研究院网站 ([www.nhri.cn](http://www.nhri.cn)) 和岩土工程学报网站 ([www.cgejournal.com](http://www.cgejournal.com)) 发布的会议消息。

《岩土工程学报》编委会议于 2019 年 4 月 20 日下午 14:00~19:30 在南京市广州路 223 号南京瑞迪大酒店报到, 编委会议于 4 月 20 日晚 20:00 在瑞迪大酒店 3 楼会议室召开。

请有意参会者填写会议回执, 并于 2019 年 4 月 9 日前通过电子邮件或传真发送至会务组。根据惯例, 会务组为《岩土工程学报》编委预定住宿。其他参会人员请提前自行预定住宿, 南京水利科学研究院附近有瑞迪大酒店、金盾饭店、隽恒酒店、南京古南都饭店等宾馆。联系人: 关云飞: 13770938628, [yfguan@nhri.cn](mailto:yfguan@nhri.cn); 钱亚俊: 13813954155, [yjqian@nhri.cn](mailto:yjqian@nhri.cn); 明经平: 13705182312, [jpming@nhri.cn](mailto:jpming@nhri.cn)。会务联系邮箱: [yjqian@nhri.cn](mailto:yjqian@nhri.cn)。

《岩土工程学报》编辑部