

DOI: 10.11779/CJGE201902015

一种增广拉格朗日优化方案及其非连续变形分析实现

张 洪

(同济大学土木工程学院, 上海 200092)

摘 要: 接触力计算精度是关乎非连续变形分析结果有效性的关键因素之一。经典非连续变形分析法 (DDA) 采用罚法施加块体间的接触约束, 实现简单, 但合理的罚值选取困难。因此, 提出了一种增广拉格朗日优化算法, 改进 DDA 中接触约束的处理。通过结合开闭迭代算法和自适应罚值更新方案等, 提出并实现了多面体 DDA 增广拉格朗日算法及其优化方案。最后, 设计了 2 个经典数值算例, 计算结果表明: 改进后的三维 DDA 提高了计算精度且保证了计算效率, 可用于复杂多面体块体系统的非连续力学行为分析, 如大型节理岩体工程稳定性分析。

关键词: 非连续变形分析; 接触约束; 增广拉格朗日法; 开闭迭代; 自适应罚值更新方案

中图分类号: TU45

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2019)02-0361-07

作者简介: 张 洪(1986-), 男, 博士, 副研究员, 主要从事岩石力学数值计算方面的研究工作。E-mail: hongzhang@tongji.edu.cn。

An optimized augmented Lagrangian method and its implementation in discontinuous deformation analysis (DDA)

ZHANG Hong

(College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: One of the key factors regarding the validity of the results of discontinuous deformation analysis (DDA) is the computational accuracy of the contact force. The classic DDA employs a penalty function to enforce the contact constraints between blocks, which is easy to implement but challenging to choose the penalty value in the actual computation. To overcome the limitation, a three-dimensional (3-D) DDA based on an optimized augmented Lagrangian method (ALM), abbreviated as DDA-3a, is established to modify the treatment of the contact constraints. This study provides necessary knowledge to fully implement and further optimize the ALM in the 3-D DDA by integrating it with the open-close iteration, and an adaptive penalty update scheme. Numerical examples are designed to exhibit the capability of DDA-3a in the computational accuracy, efficiency, and robustness. This study reveals that the DDA-3a can be used to analyze the discontinuous mechanical behavior of polyhedral block systems, such as the stability analysis of jointed rock-masses.

Key words: discontinuous deformation analysis; contact constraint; augmented Lagrangian method; open-close iteration; adaptive penalty update scheme

0 引 言

由 Shi^[1]提出的非连续变形分析法 (DDA) 可广泛应用于块体材料和结构的静动力分析。由于岩体工程空间特性显著, 二维分析精度有限, 因此三维 DDA 的提出^[2]和改进^[3-4]显得尤为重要。

接触是块体非连续力学行为分析, 尤其是滑动、碰撞等问题分析中最基本和核心的问题之一。接触力计算精度直接影响到 DDA 分析结果的有效性。经典 DDA^[1-2]采用罚法施加块体间的接触约束, 物理意义明确、实现简单, 但合理的罚值选取困难^[5-6]。拉格朗日乘子法能精确满足块体间无嵌入的接触条件^[7], 但经常发生接触状态振荡问题^[8], 导致计算难收敛; 引入

的拉格朗日乘子会导致刚度矩阵非正定、主对角不占优甚至病态, 不利于数值计算稳定^[9]。互补法^[10]移除了罚因子、保证了计算精度, 但目前其计算效率并不理想; 三维接触摩擦呈现出强非线性 and 高度非光滑的特点, 使其较难被直接处理成线性互补问题^[11]。

增广拉格朗日法充分利用了罚法和拉格朗日乘子法各自的优点, 通过将罚力迭代累加到前步拉格朗日

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51708420); 上海市浦江人才计划项目 (17PJ1409100); 上海市自然科学基金项目 (17ZR1432300); 中央高校基本科研业务费专项资金项目 (2016KJ024); 上海市高峰高原学科建设计划 (I类) 项目 (土木工程学科)

收稿日期: 2017-11-30

乘子而逐步逼近接触力精确解^[12]。因此,本文通过结合开闭迭代算法和自适应罚值更新方案等,提出并实现了三维 DDA 增广拉格朗日算法及其优化方案 (DDA-3a),提高了计算精度、保证了计算效率。

1 增广拉格朗日接触约束变分原理

本文采用一阶增广拉格朗日法逐步逼近法向接触力精确解,即

$$\lambda^* = \lambda_k \approx \lambda_{k-1} + p_n d_n, \quad (1)$$

式中, p_n 为法向罚值, d_n 为进入点对间的法向距离, λ_{k-1} 和 λ_k 为第 k 次迭代前后的拉格朗日乘子近似解, λ^* 为拉格朗日乘子精确解。

法向引入拉格朗日乘子而切向沿用罚法施加约束,理由如下:①满足法向约束条件是求解接触问题的基础与核心,法向接触力计算准确与否不仅关乎切向接触状态的判定,也关系到接触计算的稳健性(因接触嵌入过深引起的接触判断出错将使计算崩溃);②切向锁定状态下,接触的切向静摩擦抵抗力值取决于块体受力状态,与切向罚值没有必然联系;③切向滑动状态下,接触的切向滑动摩擦力由法向力和接触界面摩擦系数决定,不受切向罚值影响;④一般的三维接触摩擦问题呈现出强非线性、非光滑性,切向接触状态、受力大小和受力方向均较难准确获得,若采用增广拉格朗日法确定块体系统的切向接触状态则迭代计算量均会有较大程度地增大。

1.1 法向接触力子矩阵

第 k 次迭代后法向接触力势能为

$$\Pi_n = \lambda_{k-1} d_n + \frac{1}{2} p_n d_n^2. \quad (2)$$

设块体 Ω_i 的角 P_1 与块体 Ω_j 的面 $P_2 P_3 P_4$ 接触(见图 1(a)),或块体 Ω_i 的边 $P_1 P_2$ 与块体 Ω_j 的边 $P_3 P_4$ 接触(见图 1(b)),则其计算时步后法向距离近似为

$$d_n = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}}{A_0} - \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & u_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & u_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & u_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}}{A_0} + \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & v_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & v_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & v_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & v_4 & z_4 \end{vmatrix}}{A_0} + \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & w_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & w_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & w_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & w_4 \end{vmatrix}}{A_0}, \quad (3)$$

式中, (x_r, y_r, z_r) 为计算时步前点 P_r ($r=1, 2, 3, 4$) 的坐标, (u_r, v_r, w_r) 为计算时步内点 P_r 的位移增量, A_0 的表达式分别为

$$A_0 = \sqrt{\begin{vmatrix} y_3 - y_2 & z_3 - z_2 \\ y_4 - y_2 & z_4 - z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_3 - z_2 & x_3 - x_2 \\ z_4 - z_2 & x_4 - x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \\ x_4 - x_2 & y_4 - y_2 \end{vmatrix}^2} \quad (\text{角对面进入形式}), \quad (4a)$$

$$A_0 = \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_4 - y_3 & z_4 - z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_4 - z_3 & x_4 - x_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_4 - x_3 & y_4 - y_3 \end{vmatrix}^2} \quad (\text{边对边进入形式}). \quad (4b)$$

显然,两种基本进入形式具有相似的计算公式,这种一致性为实现数值计算提供了便利。

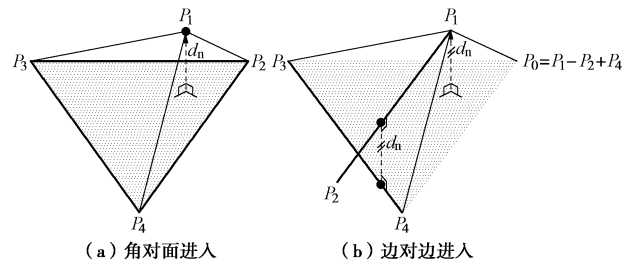


图 1 基本进入形式

Fig. 1 Basic entrance modes

令

$$V_0 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

并记 A_{rc} 为 V_0 中元素 a_{rc} 的代数余子式。

对角对面进入形式,记

$$G_i = -\frac{\begin{bmatrix} (T_i x_r, y_r, z_r)^T \\ A_{r2} \\ A_{r3} \\ A_{r4} \end{bmatrix}}{A_0}, \quad (6a)$$

$$G_j = -\frac{\sum_{r=2}^4 \left\{ \begin{bmatrix} (T_j x_r, y_r, z_r)^T \\ A_{r2} \\ A_{r3} \\ A_{r4} \end{bmatrix} \right\}}{A_0}. \quad (6b)$$

对边对边进入形式,记

$$G_i = -\frac{\sum_{r=1}^2 \left\{ \begin{bmatrix} (T_i x_r, y_r, z_r)^T \\ A_{r2} \\ A_{r3} \\ A_{r4} \end{bmatrix} \right\}}{A_0}, \quad (6c)$$

$$G_j = -\frac{\sum_{r=3}^4 \left\{ \begin{bmatrix} (T_j x_r, y_r, z_r)^T \\ A_{r2} \\ A_{r3} \\ A_{r4} \end{bmatrix} \right\}}{A_0}. \quad (6d)$$

式中, $[T_i(x_r, y_r, z_r)]$ 为块体 Ω_i 中点 (x_r, y_r, z_r) 的线性位形函数^[2]。

令

$$d_0 = -\frac{\sum_{r=1}^4 A_{r1}}{A_0}, \quad (7)$$

则式(3)可简写为

$$d_n = d_0 + G_i D_i + G_j D_j, \quad (8)$$

式中, \mathbf{D}_i 为块体 Ω_i 的线性位形增量^[2]。

将式 (8) 代入式 (2) 中并展开, 得

$$\begin{aligned} \Pi_n = & \lambda_{k-1}(d_0 + \mathbf{G}_i \mathbf{D}_i + \mathbf{G}_j \mathbf{D}_j) + \\ & \frac{1}{2} p_n (d_0^2 + 2d_0 \mathbf{G}_i \mathbf{D}_i + 2d_0 \mathbf{G}_j \mathbf{D}_j + \mathbf{G}_i \mathbf{D}_i \mathbf{D}_i^T \mathbf{G}_i^T + \\ & \mathbf{G}_j \mathbf{D}_j \mathbf{D}_j^T \mathbf{G}_j^T + 2\mathbf{G}_i \mathbf{D}_i \mathbf{D}_j^T \mathbf{G}_j^T) \quad (9) \end{aligned}$$

根据变分原理, $\delta \Pi_n = 0$, 得

$$p_n \mathbf{G}_i \mathbf{G}_i^T \rightarrow \mathbf{K}_{ii} \quad (10a)$$

$$p_n \mathbf{G}_i \mathbf{G}_j^T \rightarrow \mathbf{K}_{ij} \quad (10b)$$

$$p_n \mathbf{G}_j \mathbf{G}_i^T \rightarrow \mathbf{K}_{ji} \quad (10c)$$

$$p_n \mathbf{G}_j \mathbf{G}_j^T \rightarrow \mathbf{K}_{jj} \quad (10d)$$

$$-(\lambda_{k-1} + p_n d_0) \mathbf{G}_i \rightarrow \mathbf{F}_i \quad (10e)$$

$$-(\lambda_{k-1} + p_n d_0) \mathbf{G}_j \rightarrow \mathbf{F}_j \quad (10f)$$

1.2 切向静摩擦力子矩阵

切向静摩擦力势能为

$$\Pi_\tau = \frac{1}{2} p_\tau d_\tau^2 \quad (11)$$

式中, p_τ 为切向罚值, d_τ 为进入点对 $P_a(x_a, y_a, z_a)$ 和 $P_b(x_b, y_b, z_b)$ 间的切向距离。

d_τ^2 计算表达式为

$$\begin{aligned} d_\tau^2 = & \begin{bmatrix} (x_a + u_a) - (x_b + u_b) \\ (y_a + v_a) - (y_b + v_b) \\ (z_a + w_a) - (z_b + w_b) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (x_a + u_a) - (x_b + u_b) \\ (y_a + v_a) - (y_b + v_b) \\ (z_a + w_a) - (z_b + w_b) \end{bmatrix} - \\ & \begin{bmatrix} (x_a + u_a) - (x_b + u_b) \\ (y_a + v_a) - (y_b + v_b) \\ (z_a + w_a) - (z_b + w_b) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \cdot \\ & \begin{bmatrix} (x_a + u_a) - (x_b + u_b) \\ (y_a + v_a) - (y_b + v_b) \\ (z_a + w_a) - (z_b + w_b) \end{bmatrix} \quad (12) \end{aligned}$$

式中, (u_a, v_a, w_a) 和 (u_b, v_b, w_b) 分别为计算时步内 P_a 和 P_b 的位移增量, (n_x, n_y, n_z) 为进入面单位法向量。

令

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \quad (13)$$

将式 (12) 和 (13) 代入式 (11) 中并展开, 得

$$\begin{aligned} \Pi_\tau = & \frac{1}{2} p_\tau \left\{ \begin{bmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \\ z_a - z_b \end{bmatrix}^T \mathbf{N} \begin{bmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \\ z_a - z_b \end{bmatrix} + 2\mathbf{D}_i^T [\mathbf{T}_i(x_a, y_a, z_a)]^T \cdot \right. \\ & \left. \mathbf{N} \begin{bmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \\ z_a - z_b \end{bmatrix} - 2\mathbf{D}_j^T [\mathbf{T}_j(x_b, y_b, z_b)]^T \mathbf{N} \begin{bmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \\ z_a - z_b \end{bmatrix} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{D}_i^T [\mathbf{T}_i(x_a, y_a, z_a)]^T \mathbf{N} [\mathbf{T}_i(x_a, y_a, z_a)] \mathbf{D}_i - \\ & \mathbf{D}_i^T [\mathbf{T}_i(x_a, y_a, z_a)]^T \mathbf{N} [\mathbf{T}_j(x_b, y_b, z_b)] \mathbf{D}_j - \\ & \mathbf{D}_j^T [\mathbf{T}_j(x_b, y_b, z_b)]^T \mathbf{N} [\mathbf{T}_i(x_a, y_a, z_a)] \mathbf{D}_i + \\ & \left. \mathbf{D}_j^T [\mathbf{T}_j(x_b, y_b, z_b)]^T \mathbf{N} [\mathbf{T}_j(x_b, y_b, z_b)] \mathbf{D}_j \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

根据变分原理, $\delta \Pi_\tau = 0$, 得

$$p_\tau [\mathbf{T}_i(x_a, y_a, z_a)]^T \mathbf{N} [\mathbf{T}_i(x_a, y_a, z_a)] \rightarrow \mathbf{K}_{ii} \quad (15a)$$

$$-p_\tau [\mathbf{T}_i(x_a, y_a, z_a)]^T \mathbf{N} [\mathbf{T}_j(x_b, y_b, z_b)] \rightarrow \mathbf{K}_{ij} \quad (15b)$$

$$-p_\tau [\mathbf{T}_j(x_b, y_b, z_b)]^T \mathbf{N} [\mathbf{T}_i(x_a, y_a, z_a)] \rightarrow \mathbf{K}_{ji} \quad (15c)$$

$$p_\tau [\mathbf{T}_j(x_b, y_b, z_b)]^T \mathbf{N} [\mathbf{T}_j(x_b, y_b, z_b)] \rightarrow \mathbf{K}_{jj} \quad (15d)$$

$$-p_\tau [\mathbf{T}_i(x_a, y_a, z_a)]^T \mathbf{N} \begin{bmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \\ z_a - z_b \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{F}_i \quad (15e)$$

$$p_\tau [\mathbf{T}_j(x_b, y_b, z_b)]^T \mathbf{N} \begin{bmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \\ z_a - z_b \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{F}_j \quad (15f)$$

1.3 切向滑动摩擦力子矩阵

切向滑动摩擦力势能为

$$\Pi_f = -\mathbf{f} \cdot \mathbf{d}_f \quad (16)$$

式中, \mathbf{f} 为滑动摩擦力矢量, \mathbf{d}_f 为进入点对 $P_a(x_a, y_a, z_a)$ 和 $P_b(x_b, y_b, z_b)$ 间的相对位移增量。

\mathbf{f} 和 \mathbf{d}_f 的表达式分别为

$$\mathbf{f} = -\lambda_{k-1} \tan \varphi \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix}^T \quad (17)$$

$$\mathbf{d}_f = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u_a - u_b \\ v_a - v_b \\ w_a - w_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \quad (18)$$

式中, (τ_x, τ_y, τ_z) 为向量 $\overline{P_b P_a}$ 投射到进入面的单位向量, φ 为接触界面摩擦角。

将式 (17) 和 (18) 代入式 (16) 中并展开, 得

$$\begin{aligned} \Pi_f = & \lambda_{k-1} \tan \varphi \mathbf{D}_i^T [\mathbf{T}_i(x_a, y_a, z_a)]^T \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} - \\ & \lambda_{k-1} \tan \varphi \mathbf{D}_j^T [\mathbf{T}_j(x_b, y_b, z_b)]^T \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \quad (19) \end{aligned}$$

根据变分原理, $\delta \Pi_f = 0$, 得

$$-\lambda_{k-1} \tan \varphi [\mathbf{T}_i(x_a, y_a, z_a)]^T \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \quad (20a)$$

$$\lambda_{k-1} \tan \varphi \left[T_j(x_b, y_b, z_b) \right]^T \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \quad (20b)$$

2 优化方案

2.1 计算流程

DDA-3a 采用如下计算步骤：①试算接触状态；②根据接触状态调整接触力，即开接触法向接触力为 0(见图 2(a))，闭接触法向接触力大于 0(见图 2(b))且满足收敛条件(见图 2(c))；③校核接触状态，若不一致，重复上述计算。DDA-3a 计算流程见图 3。

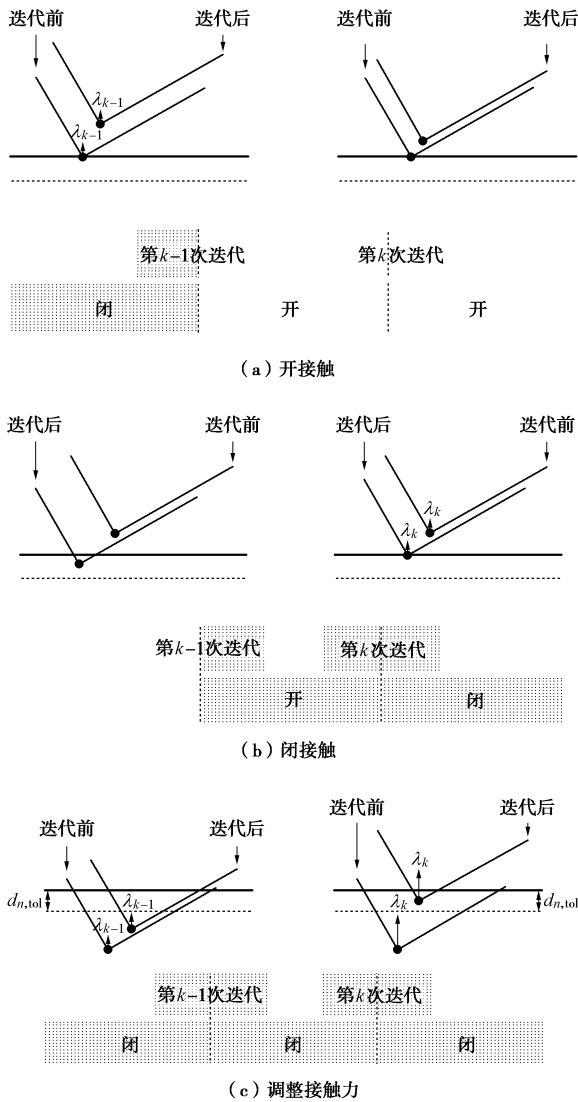


图 2 接触力调整示意图

Fig. 2 Schematic convergence process of iteration of contact force

2.2 自适应罚值更新方案

如图 4 所示，迭代计算的收敛效率取决于罚值。若初始罚值 ($p_{n,1}$) 太小，则计算需更多的迭代步才能收敛。为取得更好的计算效率，除 $p_{n,1}$ 取值不宜太小外，本文提出如下自适应罚值更新方案：

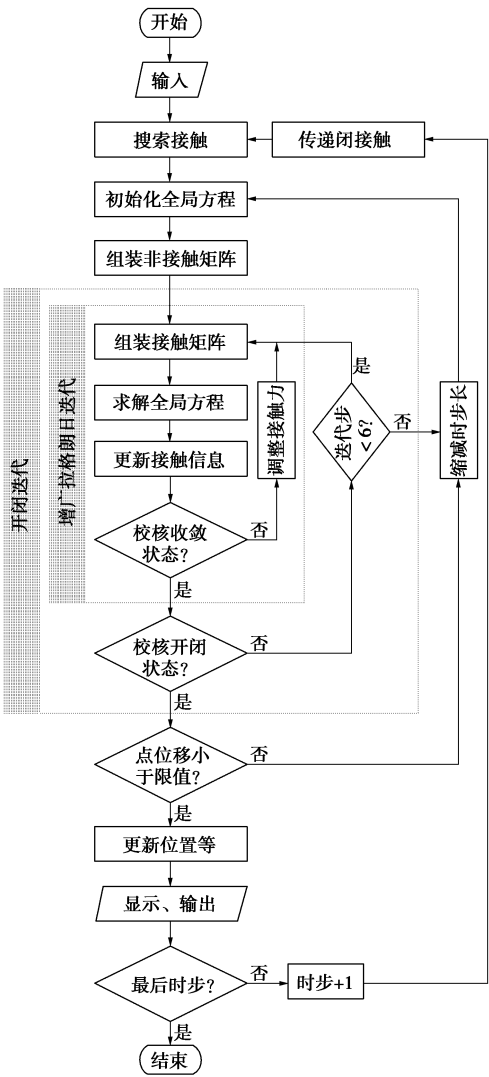


图 3 DDA-3a 流程图

Fig. 3 Flow chart of DDA-3a scheme

$$\tilde{p}_{n,k} = \begin{cases} \alpha p_{n,k-1} & (|d_{n,k}| > \beta |d_{n,k-1}|) \\ p_{n,k-1} & (|d_{n,k}| \leq \beta |d_{n,k-1}|) \end{cases} \quad (21a)$$

$$p_{n,k} = \min(\tilde{p}_{n,k}, \gamma E) \quad (21b)$$

式中 $\tilde{p}_{n,k}$ 和 $p_{n,k}$ 分别为临时罚值和最终罚值；系数 $\alpha > 1$ 而 $0 < \beta < 1$ ，借鉴有限元分析的经验^[13]，本文建议 $\alpha = 10$ ， $\beta = 0.25$ ； E 为材料弹性模量，建议系数 $\gamma \leq 100$ 以防止刚度矩阵病态而使计算收敛困难。

2.3 收敛条件

增广拉格朗日迭代收敛需满足两个收敛条件：进入深度收敛条件和残余力收敛条件。

实际计算时，为近似满足进入深度收敛，可设置 d_n 小于某一进入深度限值 ($d_{n,tol}$)。事实上，DDA 规定计算中的点位移必须小于一位移限值，否则缩减时间步重新计算(见图 3)。在不施加约束力的情况下，计算时步内法向进入深度不会超过两倍该限值，记为 $d_{n,max}$ 。令

$$d_{n,\text{tol}} = \varepsilon_1 d_{n,\text{max}} \quad , \quad (22)$$
式中, $0 < \varepsilon_1 < 1$ 。则进入深度收敛条件可表示为

$$\left| \frac{d_{n,k}}{d_{n,\text{max}}} \right| = \varepsilon_1 \quad , \quad (23)$$

残余力收敛条件可表示为

$$\frac{\|F_{i,k} - F_{i,k-1}\|}{\|F_{i,k-1}\|} < \varepsilon_2 \quad , \quad (24)$$

式中, $\varepsilon_2 > 0$ 。
类似地, 增广拉格朗日迭代收敛于 $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ 及 $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ 时。两者值越小, 越严格满足块体间无嵌入接触约束条件; 但值太小, 则会牺牲计算效率。因此, 本文建议 $0.01 < \varepsilon_1 < 0.1$, $0 < \varepsilon_2 < 0.1$, 从而兼顾计算精度和效率。

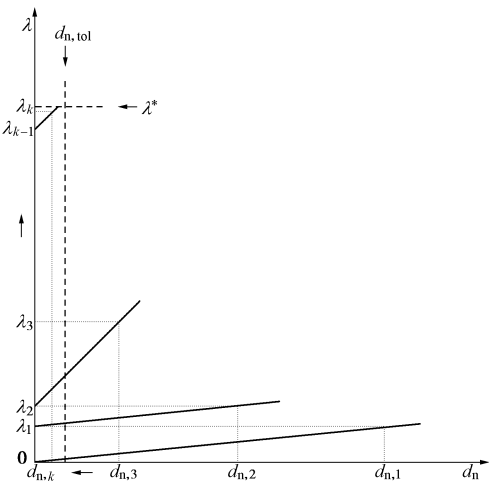


图 4 罚值和拉格朗日乘子更新示意图
Fig. 4 Schematic update process of penalty and Lagrange multiplier

3 算 例

3.1 斜坡模型

如图 5 示, 一个长方体块体置于坡度 θ 为 30° 的固定斜坡上。本例旨在通过此经典滑动问题, 将 DDA-3p、DDA-3a 的计算结果和理论解进行对比, 分析改进后的三维 DDA 在接触计算中的精度。
算例中, 块体和斜坡体采用相同的材料参数: 密度 $\rho = 2.75 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 弹性模量 $E = 2.0 \times 10^{10} \text{ Pa}$, 泊松比 $\nu = 0.25$; 稳定性分析时, 块体和斜坡体间节理摩擦角 $\varphi = 35^\circ$, 不计黏聚力; 块体滑动分析时, 块体和斜坡体间节理摩擦角 $\varphi = 15^\circ$, 不计黏聚力。斜坡体 6 个顶点分别用刚度 $100E$ 的弹簧约束。重力加速度 g 为 9.8 m/s^2 。
其他计算控制参数包括: 最大时步长 Δt 为 0.01

s, 计算时长为 2.00 s ; 最大时步位移率 δ 为 0.01 ; 为保证 DDA-3a 的计算效率, 初始罚值 $p_{n,1}$ 和 DDA-3p 中的罚值一致, 取为 $0.01E$; 增广拉格朗日迭代方案中的参数 $\alpha = 10$, $\beta = 0.25$, $\gamma = 100$, $\varepsilon_1 = 0.01$, $\varepsilon_2 = 0.01$ 。

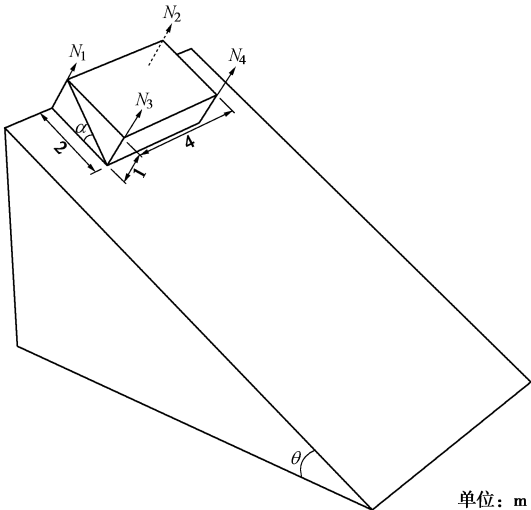


图 5 斜坡模型
Fig. 5 Slope model

当块体和斜坡体间节理摩擦角 $\varphi = 35^\circ$ 时, 块体处于稳定状态, 图 5 中块体的支持力理论值可计算式为

$$N_1 = N_2 = \frac{\cos(\theta + \alpha)}{4 \cos \alpha} mg \quad , \quad (25a)$$

$$N_3 = N_4 = \frac{\cos(\theta - \alpha)}{4 \cos \alpha} mg \quad , \quad (25b)$$

式中, m 为块体质量 (kg)。

DDA-3p 和 DDA-3a 均采用静态模式进行求解。表 1 列出了计算时间 2.00 s 时式 (25b)、DDA-3p 和 DDA-3a 的计算结果。可见, DDA-3p 和 DDA-3a 的接触力解计算精度均较高, 但 DDA-3a 的接触力计算精度较 DDA-3p 有不小的提高, 尤其是 DDA-3a 计算的法向嵌入深度较 DDA-3p 更小。

表 1 接触计算误差分析

Table 1 Analysis of contact calculation errors					
参数	理论解	解析解		相对误差/%	
		DDA-3p	DDA-3a	DDA-3p	DDA-3a
d_n/m	—	0.000164803	0.000010071	—	—
$p_n/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	—	2.0×10^8	2.0×10^8	—	—
λ_{k-1}	—	—	31177.2	—	—
$N_1(N_2)/\text{N}$	33203.8	32960.6	33191.4	0.7	0.04
d_n/m	—	0.000300082	0.00001244	—	—
$p_n/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	—	2.0×10^8	2.0×10^9	—	—
λ_{k-1}	—	—	35259.4	—	—
$N_3(N_4)/\text{N}$	60153.8	60016.4	60139.4	0.2	0.02

块体的滑动位移解析解为

$$s = \frac{1}{2}(\sin \theta - \cos \theta \tan \varphi)gt^2 \quad , \quad (26)$$

式中, s 为块体质心的滑动位移 (m), t 为块体滑动时间 (s)。

DDA-3p 和 DDA-3a 均采用动态模式进行求解。表 2 列出了公式 (26)、DDA-3p 和 DDA-3a 的计算结果。由图 6 可知, 在计算时间 (2.00 s) 内, DDA-3a 的计算精度高于 DDA-3p, 且相对误差一直比较稳定。

表 2 块体位移误差分析

Table 2 Analysis of displacement errors of sliding block					
时间/s	理论解/m	解析解/m		相对误差/%	
		DDA-3p	DDA-3a	DDA-3p	DDA-3a
0.2	0.0525	0.0434	0.0523	17.26	0.34
0.4	0.2101	0.1955	0.2097	6.95	0.20
0.6	0.4727	0.4477	0.4721	5.29	0.13
0.8	0.8403	0.8050	0.8395	4.20	0.09
1.0	1.3130	1.2660	1.3120	3.58	0.07
1.2	1.8906	1.8323	1.8896	3.08	0.06
1.4	2.5734	2.5067	2.5721	2.59	0.05
1.6	3.3612	3.2844	3.3639	2.28	0.08
1.8	4.2540	4.1686	4.2568	2.01	0.07
2.0	5.2518	5.1587	5.2507	1.77	0.02

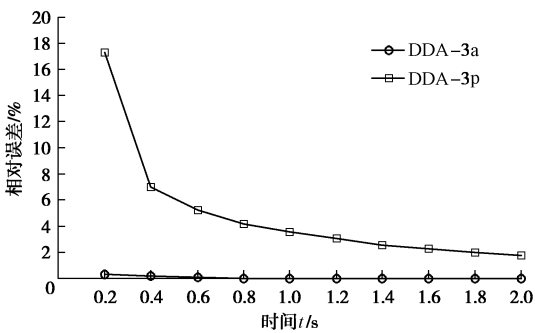


图 6 DDA-3p、DDA-3a 计算位移相对误差对比

Fig. 6 Comparison of relative displacement errors by DDA-3p and DDA-3a

3.2 落石撞击节理岩柱崩塌模拟

如图 7 所示, 节理岩柱由 5 个块体构成, 底部边界施加固定约束, 其他边界自由; 落石为正十二面体, 以初速度 10 m/s 冲向稳定的节理岩柱。本例旨在通过此经典失稳破坏问题, 展示 DDA-3a 分析复杂多面体块体系统非连续力学行为的巨大潜力和优势。

算例中, 落石和节理岩柱采用相同的材料参数: 密度 $\rho = 2.75 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 弹性模量 $E = 2.0 \times 10^{10} \text{ Pa}$, 泊松比 $\nu = 0.25$, 节理摩擦角 $\varphi = 35^\circ$, 不计黏聚力。底部块体 8 个顶点分别用刚度 $100E$ 的弹簧约束。重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 。

其他计算控制参数包括: 最大时步长 $\Delta t = 0.01 \text{ s}$, 计算时长 2.00 s; 最大时步位移率 $\delta = 0.01$; 为保证 DDA-3a 的计算效率, 初始罚值 $p_{n,1}$ 取为 $0.01E$; 增广拉格朗日迭代方案中的参数 $\alpha = 10$, $\beta = 0.25$, $\gamma = 100$, $\varepsilon_1 = 0.01$, $\varepsilon_2 = 0.01$ 。

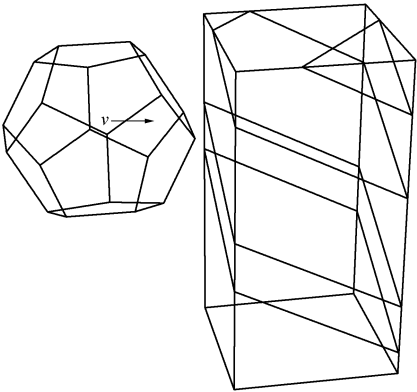
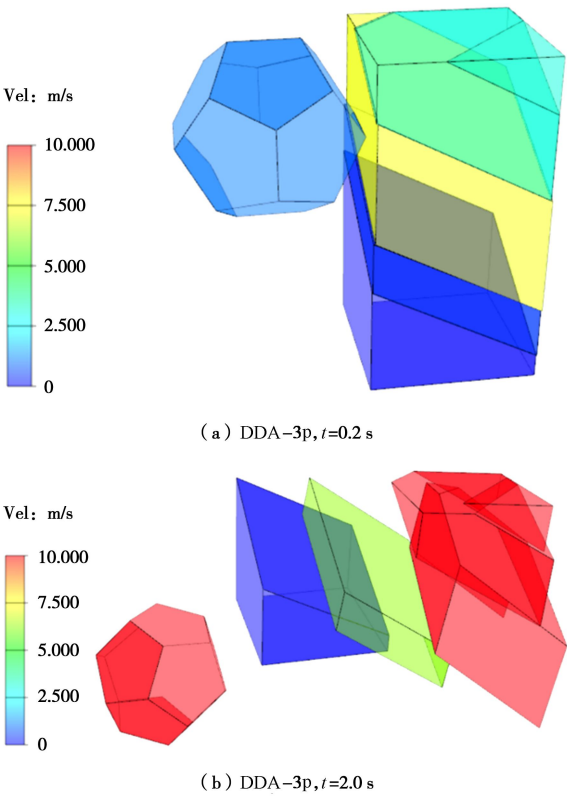


图 7 落石撞击节理岩柱崩塌

Fig. 7 Collapse of jointed rock-column due to rockfall impact

如图 8 所示, 在受到落石撞击后, 处于稳定状态的节理岩柱沿节理面发生开裂、滑移直至破坏。块体运动过程中同时存在角对面和边对边两种基本进入形式。尽管由于缺乏解析解和实验结果, 本算例不能说明 DDA-3p 和 DDA-3a 的计算结果哪个更为准确, 但对比两者的结果表明 DDA-3a 与 DDA-3p 同样具备分析复杂多面体块体系统非连续力学行为的能力。



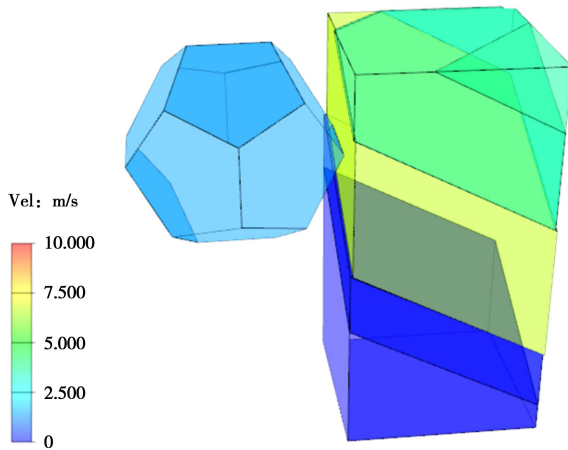
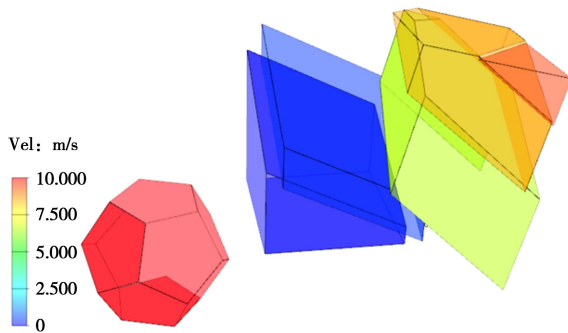
(c) DDA-3a, $t=0.2$ s(d) DDA-3a, $t=2.0$ s

图8 崩塌过程

Fig. 8 Collapse process

计算采用的是 Intel Xeon E5-2670 处理器, 内存 128 GB。在本算例中, DDA-3p 用时约 67 s, DDA-3a 用时约 72 s, 较好地保证了计算效率。

4 结 论

(1) DDA-3a 引入一阶增广拉格朗日法逐步逼近接触力精确解, 提高了计算精度。

(2) DDA-3a 迭代结合开闭状态校核的方案既能最小程度改动 DDA-3p, 又保证了计算结果的有效性。

(3) 自适应罚值更新方案能提高增广拉格朗日迭代计算效率, 适当提高初始罚值、合理设置收敛条件参数能兼顾计算精度和效率。

(4) DDA-3a 具备分析大型复杂节理岩体工程力学行为的巨大潜力和优势。

参考文献:

[1] SHI G H. Discontinuous deformation analysis: a new numerical model for the statics and dynamics of block systems[D]. Berkeley: University of California, 1988.

[2] SHI G H. Three dimensional discontinuous deformation analysis[C]// Proc of the Fourth International Conference on Discontinuous Deformation Analysis (ICADD-4). Scotland,

2001: 1 - 21.

[3] ZHANG H, LIU S G, ZHENG L, et al. Extensions of edge-to-edge contact model in three-dimensional discontinuous deformation analysis for friction analysis[J]. Computers and Geotechnics, 2016, **71**: 261 - 275.

[4] ZHANG H, LIU S G, CHEN G Q, et al. Extension of three-dimensional discontinuous deformation analysis to frictional-cohesive materials[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2016, **86**: 65 - 79.

[5] YAGODA-BIRAN G, HATZOR Y H. Benchmarking the numerical discontinuous deformation analysis method[J]. Computers and Geotechnics, 2016, **71**: 30 - 46.

[6] BAKUN-MAZOR D, HATZOR Y H, GLASER S D. Dynamic sliding of tetrahedral wedge: The role of interface friction[J]. International Journal For Numerical And Analytical Methods In Geomechanics, 2012, **36**: 327 - 343.

[7] 张伯艳, 陈厚群. LDDA 动接触力的迭代算法[J]. 工程力学, 2007, **24**(6): 1 - 6. (ZHANG Bo-yan, CHEN Hou-qun. A new ldda iterative algorithm for dynamic contact forces[J]. Engineering Mechanics, 2006, **24**(6): 1 - 6. (in Chinese))

[8] ANANDAVEL K, PRAKASH R V. Effect of three-dimensional loading on macroscopic fretting aspects of an aero-engine blade-disc dovetail interface[J]. Tribology International, 2011, **44**: 1544 - 1555.

[9] HU Z X, WANG Z M, ZHANG S, et al. A combined reordering procedure for preconditioned GMRES applied to solving equations using Lagrange multiplier method[J]. Engineering Computations, 2014, **31**(7): 1283 - 1304.

[10] 李小凯, 郑宏. 基于线性互补的非连续变形分析[J]. 岩土力学, 2014, **35**(6): 1787 - 1794. (LI Xiao-kai, ZHENG Hong. Discontinuous deformation analysis based on linear complementarity theory[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, **35**(6): 1787 - 1794. (in Chinese))

[11] ZHANG H W, LI J Y, PAN S H. New second-order cone linear complementarity formulation and semi-smooth Newton algorithm for finite element analysis of 3D frictional contact problem[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, **200**: 77 - 88.

[12] LIN C T, AMADEI B, JUNG J, et al. Extensions of discontinuous deformation analysis for jointed rock masses[J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, 1996, **33**: 671 - 694.

[13] WRIGGERS P. Finite element methods for contact problems with friction[J]. Tribology International, 1996, **29**(8): 651 - 658.