

DOI: 10.11779/CJGE201902003

双线隧道不同布置方式下相互作用影响的地层位移解析

张治国^{1,2,3}, 张成平², 奚晓广¹

(1. 上海理工大学环境与建筑学院, 上海 200093; 2. 北京交通大学城市地下工程教育部重点实验室, 北京 100044;

3. 中国矿业大学深部岩土力学与地下工程国家重点实验室, 江苏 徐州 221116)

摘要: 双线隧道开挖引起地层变形的既有理论研究, 一般基于单线隧道计算结果直接采用线性叠加进行分析, 而忽略了双线隧道之间的相互作用影响。为研究近距离地下工程开挖的相互影响, 基于位移控制 Schwarz 交替法和复变函数理论, 结合隧道洞周椭圆化收敛变形边界条件, 提出了任意布置方式下双线盾构隧道开挖引起周围地层变形的计算方法。该方法以位移控制边界条件进行求解, 体现了双线隧道开挖间的相互作用影响。通过离心试验和工程实例, 将基于位移控制 Schwarz 交替法的复变函数理论解与线性叠加法解答以及实测数据进行了对比验证; 针对双线隧道水平和斜交两种不同布置方式进行相关参数分析, 获取了双线隧道间距变化引起的地层变形影响规律。结果表明: 基于位移控制 Schwarz 交替法的复变函数方法求解得到的地表沉降曲线与实测值吻合较好, 而直接线性叠加法解答存在较大误差。在地层等值线图规律分析中, 水平与斜交布置下, 两个隧道周围土体等值线图产生较为明显的相互“吸引”现象, 隧道上方的土体沉降峰值线均向双线隧道中间倾斜, 但随着双线隧道间距增加, “吸引”现象逐渐减弱。研究成果对于近距离双线盾构隧道开挖施工的现场保护措施制定提供一定的理论依据。

关键词: 双线盾构隧道; 土体沉降; 复变函数; 位移控制 Schwarz 交替法; 椭圆化收敛边界

中图分类号: TU457

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2019)02-0262-10

作者简介: 张治国(1978-), 男, 博士, 博士后, 副教授, 主要从事软土地下工程等方面的教学与研究工作。E-mail: zgzhang@usst.edu.cn

Closed solutions to soil displacements induced by twin-tunnel excavation under different layout patterns

ZHANG Zhi-guo^{1,2,3}, ZHANG Cheng-ping², XI Xiao-guang¹

(1. School of Environment and Architecture, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China; 2. Key

Laboratory of Urban Underground Engineering of Ministry of Education, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China; 3. State Key

Laboratory for Geomechanics and Deep Underground Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

Abstract: The existing theoretical researches on deformation of soils caused by twin-tunnel excavation are generally based on the linear superposition of single tunneling results and seldom consider the interaction effects between the two tunnels. Based on the displacement-controlled Schwarz alternating method and the complex variable function theory, and considering the oval deformation contraction boundary condition of tunnel opening, a method is proposed to analyze the deformation of the surrounding soils caused by twin-shield tunnel excavation in arbitrary position in order to reveal the interaction influences for the closed underground excavation. The method is based on the displacement boundary condition, which reflects the interaction between the twin tunnels during excavation. Through experiments and engineering cases, the theoretical solutions to the complex variable function based on the displacement-controlled Schwarz alternating method are obtained and compared with those of the linear superposition method and the measured data. The deformation influence laws of ground, which are caused by the variation of space between twin tunnels under two different layout patterns, horizontal and oblique, are acquired through parameter analyses. The results indicate that the surface settlement curve obtained by the complex variable function method based on the displacement-controlled Schwarz alternating method is in good agreements with the measured one, while the linear superposition method has a comparatively large error.

Analysis of the laws of contour map indicates that in parallel and oblique positions, the contours of the soil around the twins tunnel produce the obvious "attracting"

基金项目: 国家重点研发计划项目(2016YFC0800202); 国家自然科学基金项目(41772331); 城市地下工程教育部重点实验室基金项目(TUE2017-04); 深部岩土力学与地下工程国家重点实验室基金项目(SKLGDUEK1707)

收稿日期: 2018-01-25

phenomenon, and the settlement peak line above the tunnels is inclined to the centre of the twin tunnels, but with the increase of the spacing between the twin tunnels, the phenomenon of "attracting" is gradually weakened. The research results may provide some theoretical basis for the protection measures of twin-shield tunnel excavation.

Key words: twin-shield tunnel; soil displacement; complex variable; displacement-controlled Schwarz alternating method; oval deformation contraction boundary

0 引言

中国城市轨道交通正处于一个迅速发展的时期,在地铁建设工程中,大多采用双线平行盾构隧道施工。盾构隧道施工往往会导致周围地层应力发生重分布,引起地表沉降、相邻地下构筑物变形等问题。因此,针对双线隧道开挖导致的地层变形影响问题进行研究有着十分重要的意义。

目前,针对单线隧道开挖引起地层变形的研究主要采用经验法^[1-2]、数值模拟分析法^[3-6]和解析(半解析)法^[7-15]。在解析(半解析)法分析方面,典型方法主要有:镜像法(叶飞等^[7]、Mo等^[8]),复变函数法(Verruijt^[9]、韩凯航^[10]),极坐标系下的应力函数法(Park^[11]、Bobet^[12]),弹性力学 Mindlin 解法(唐晓武等^[13]、梁荣柱等^[14])和随机介质理论(傅鹤林等^[15])。

针对双线隧道开挖引起地层变形的问题,大部分学者使用离心模型试验法^[16-20],数值分析法^[21-22]进行了研究;还有一部分学者进行了积极的理论探索,主要基于单线隧道计算结果采用线性叠加进行解析分析(Chen等^[23]、王剑晨等^[24]、杨子奇等^[25]),上述研究成果对于后续研究具有重要启示。既有解析方法一般没有考虑双线隧道之间的相互作用影响,然而,在双线隧道实际施工中,隧道之间存在着相互作用影响,尤其是针对距离较近的双线隧道,这种相互影响较为明显。既有现场实测研究表明,双线隧道开挖引起的地层位移实测值往往大于单个隧道开挖所导致位移进行叠加的理论值(Ou等^[26])。

对于双孔洞相互作用问题,经典解法(如张路青等^[27]、Kooi等^[28])基于交替法和应力控制边界条件,获得了无限平面内两任意形状孔洞的应力场与位移场计算公式。然而,在实际隧道开挖问题中,初始应力边界条件不易确定,而初始位移边界条件可以通过仪器监测较容易获得,因此采用位移控制边界条件更为方便。本文基于 Schwarz 交替法(Sokolnikoff^[29])和复变函数理论,结合隧洞椭圆化收敛变形的位移控制边界条件(Park^[11]),提出了双线隧道任意布置方式下开挖引起周围地层变形的理论计算方法,体现了双线隧道开挖间的相互作用影响。本文通过离心试验和工

程实例,将基于位移控制 Schwarz 交替法的复变函数理论解,线性叠加法解答以及实测数据进行对比验证;针对双线隧道水平和斜交两种不同布置方式进行相关参数分析,获取了双线隧道间距变化引起的地层变形影响规律。

1 位移控制边界下单线隧道复变函数理论解

1.1 问题描述

计算模型含有两个半径为 r_0 的圆形隧道,布置方式为任意位置,如图 1 所示,土体假定为各向同性均质弹性体。隧道 1, 2 埋深分别为 h_1, h_2 , 轴心之间的距离为 d 。 β 为两隧道轴心连线与水平面的夹角。 z_1, z_2 分别为坐标系 $x_1O_1y_1, x_2O_2y_2$ 下的坐标。 $x_1O_1y_1, x_2O_2y_2$ 均为实平面内直角坐标系,其坐标原点分别设置于双线隧道轴线正上方地表位置处。 $x_2O_2y_2$ 坐标到 $x_1O_1y_1$ 坐标的转换公式为

$$z_1 = S(z_2) = z_2 + d \cdot \cos \beta \quad (1)$$

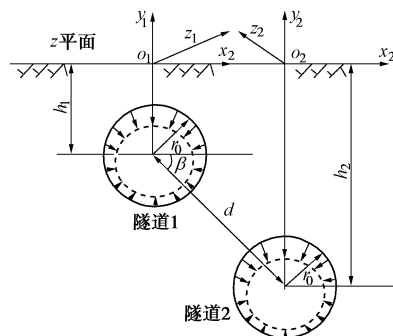


图 1 双线隧道开挖相互作用位移控制模型

Fig. 1 Displacement-controlled model for interaction influences due to twin tunnels

1.2 解析函数和边界条件

图 2(a) 为在直角坐标系 z_1 平面内半无限平面隧洞的构形简图。图中, A 为坐标原点, B 为无穷远处的点, C 为隧道拱顶, F 为隧道拱底, h_1 为隧道轴线埋深, r_0 为隧道半径, R 区域为半无限空间中隧道外部的区域。 γ 为土体的重度, E 为土体的弹性模量, ν 为土体的泊松比。

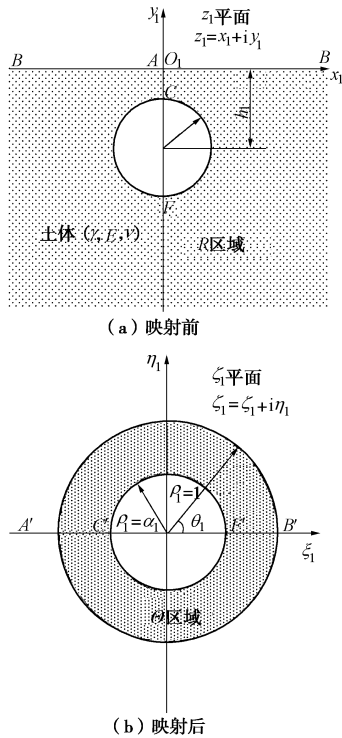


图2 半无限平面单孔隧道共形映射

Fig. 2 Conformal mapping of tunnel in half-plane

根据 Muskhelishvili^[30]平面问题复变函数解法,隧道开挖引起的土体位移分量可通过 R 区域内的解析函数 $\varphi(z_1)$ 和 $\psi(z_2)$ 表达出来:

$$2G(U_x + iU_y) = \kappa \cdot \varphi(z_1) - z_1 \cdot \overline{\varphi'(z_1)} - \overline{\psi(z_1)} \quad (2)$$

式中, U_x , U_y 为土体水平向与竖直向位移, G 为土体剪切模量, 本文计算问题属于平面应变问题, 取 $\kappa = 3 - 4\nu$, ν 为土体泊松比。在 z_1 平面地表 $z_1 = \overline{z_1}$ 处, 土体无应力。在隧道洞周 $|z_1 + ih_1| = r_0$ 处有已知的位移, 则边界条件如下:

$$z_1 = \overline{z_1}: \varphi(z_1) + z_1 \cdot \overline{\varphi'(z_1)} + \overline{\psi(z_1)} = 0 \quad (3)$$

$$|z_1 + ih_1| = r_0: 2G(U_x + iU_y) = \kappa \cdot \varphi(z_1) - z_1 \cdot \overline{\varphi'(z_1)} - \overline{\psi(z_1)} \quad (4)$$

1.3 从 z_1 实平面到 ζ_1 复平面的共形映射

z_1 平面半无限空间, 通过共形映射公式转换为 ζ_1 平面中两个定直径圆环问题, 如图 2 (b) 所示, 共形映射公式为

$$z_1 = \omega_1(\zeta_1) = -ih_1 \frac{1 - \alpha_1^2}{1 + \alpha_1^2} \frac{1 + \zeta_1}{1 - \zeta_1} \quad (5)$$

式中, $\alpha_1 = (h_1 - \sqrt{h_1^2 - r_0^2})/r_0$, $\omega_1(\zeta_1)$ 为解析函数。

图 2 (a) 中 z_1 平面上的点 A , B , C , F 分别映射成图 2 (b) 中 ζ_1 平面上的点 A' , B' , C' , F' , 隧道洞周 $|z_1 + ih_1| = r_0$ 映射成圆环 $|\zeta_1| = \alpha_1$, 地表平面 $z_1 = \overline{z_1}$ 映射为圆环 $|\zeta_1| = 1$, R 区域映射成双圆环域之间 Θ 区域。

1.4 解析函数

$\varphi(z_1)$ 和 $\psi(z_1)$ 在 R 区域内是解析函数, 因此, $\varphi(\zeta_1)$ 和 $\psi(\zeta_1)$ 也是解析函数。 $\varphi(\zeta_1)$ 和 $\psi(\zeta_1)$ 可展开成

Laurent 级数形式:

$$\varphi(z_1) = \varphi(\omega(\zeta_1)) = \varphi(\zeta_1) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta_1^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta_1^{-k} \quad (6)$$

$$\psi(z_1) = \psi(\omega(\zeta_1)) = \psi(\zeta_1) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta_1^k + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \zeta_1^{-k} \quad (7)$$

式中, a_0 , a_k , b_k , c_0 , c_k , d_k 均为待定系数, 通过将边界条件代入计算求得。

由于 $z_1 \cdot \overline{\varphi'(z_1)} = \omega(\zeta_1) \cdot \overline{\varphi'(\zeta_1)} / \overline{\omega'(\zeta_1)}$, 将 ζ_1 用复平面极坐标表示, 即 $\zeta_1 = \rho_1 \sigma_1$ (ρ_1 为 ζ_1 平面半径, $\sigma_1 = \exp(i\theta_1)$), 则

$$\frac{\omega_1(\zeta_1)}{\omega_1'(\zeta_1)} = -\frac{1}{2} \frac{(1 + \rho_1 \sigma_1)(\sigma_1 - \rho_1)^2}{(1 - \rho_1 \sigma_1)\sigma_1^2} \quad (8)$$

ζ_1 平面上, 边界条件 $|\zeta_1| = 1$ 写为

$$\varphi(\zeta_1) + \omega(\zeta_1) \frac{\overline{\varphi'(\zeta_1)}}{\overline{\omega'(\zeta_1)}} + \overline{\psi(\zeta_1)} = 0 \quad (9)$$

将式 (6) ~ (8) 代入式 (9) 解得

$$\begin{cases} c_0 = -\overline{a_0} - \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}b_1, \\ c_k = -\overline{b_k} + \frac{1}{2}(k-1)a_{k-1} - \frac{1}{2}(k+1)a_{k+1} \quad (k=1,2,3,\dots), \\ d_k = -\overline{a_k} + \frac{1}{2}(k-1)b_{k-1} - \frac{1}{2}(k+1)b_{k+1} \quad (k=1,2,3,\dots). \end{cases} \quad (10)$$

将 $|\zeta_1| = \alpha_1$ 边界条件写为

$$\begin{aligned} \kappa \cdot \varphi(\zeta_1) - \omega(\zeta_1) \cdot \frac{\overline{\varphi'(\zeta_1)}}{\overline{\omega'(\zeta_1)}} - \overline{\psi(\zeta_1)} \\ = 2G(U_x + iU_y) = f(\zeta_1) = f(\alpha_1 \sigma_1) \end{aligned} \quad (11)$$

将式 (11) 两边同乘 $(1 - \alpha_1 \sigma_1)$, 得到

$$f(\alpha_1 \sigma_1)(1 - \alpha_1 \sigma_1) = A_0 + A_1 \sigma_1 + \sum_{k=2}^{\infty} A_k \sigma_1^k + \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k} \sigma_1^{-k} \quad (12)$$

将式 (6) ~ (8)、(10) 代入式 (12) 中, 解得

$$\begin{cases} a_1 = [A_0 - (\kappa + 1)a_0]/(1 - \alpha_1^2) + \{[\overline{A_1}\alpha_1 + \alpha_1^2(1 + \kappa)\overline{a_0}]/(1 + \kappa\alpha_1^2) - [A_0 - (1 + \kappa)a_0]/(1 - \alpha_1^2)\} / \{[(1 - \alpha_1^2)^2 / (1 + \kappa\alpha_1^2)(\kappa + \alpha_1^2)] + 1\}, \\ b_1 = \{[\overline{A_1}\alpha_1 + \alpha_1^2(1 + \kappa)\overline{a_0}]/(1 + \kappa\alpha_1^2) - [A_0 - (1 + \kappa)a_0]/(1 - \alpha_1^2)\} / [(1 - \alpha_1^2)/(1 + \kappa\alpha_1^2) + (\kappa + \alpha_1^2)/(1 - \alpha_1^2)], \\ a_{k+1} = \{[(1 - \alpha_1^2)k\overline{a_k} - (1 + \kappa\alpha_1^{-2k})b_k + A_{-k}\alpha_1^{-k}] \cdot (1 - \alpha_1^2)(k+1) + (\kappa \cdot \alpha_1^{-2k} + \alpha_1^2)[\alpha_1^2(1 + \kappa\alpha_1^{2k})\overline{a_k} + (1 - \alpha_1^2)kb_k + \overline{A_{k+1}}\alpha_1^{k+1}]\} / [(1 - \alpha_1^2)^2(k+1)^2 + (\kappa \cdot \alpha_1^{-2k} + \alpha_1^2)(1 + \kappa\alpha_1^{2k+2})], \\ b_{k+1} = \{[(1 - \alpha_1^2)(k+1)[\alpha_1^2(1 + \kappa\alpha_1^{2k})\overline{a_k} + (1 - \alpha_1^2)kb_k + \overline{A_{k+1}}\alpha_1^{k+1}] - [(1 - \alpha_1^2)k\overline{a_k} - (1 + \kappa\alpha_1^{-2k})b_k + A_{-k}\alpha_1^{-k}]\} / [(1 - \alpha_1^2)^2(k+1)^2 + (\kappa \cdot \alpha_1^{-2k} + \alpha_1^2)(1 + \kappa\alpha_1^{2k+2})]. \end{cases} \quad (13)$$

1.5 椭圆化收敛变形边界条件

既有研究表明, 盾构隧道开挖面土体变形由均匀径向收缩、椭圆化变形以及整体下沉组成 (Gonzalez 等^[31]), 如图3所示。在 z_1 平面内, 以隧道圆心为原点的极坐标系下, 隧道径向初始位移边界条件为

$$U_r = -\frac{1}{4}u_0(5 + 3\sin\theta - 3\cos^2\theta) \quad (14)$$

其中, u_0 为盾构与拼装衬砌的半径差, 根据已知地层损失率计算 u_0 的公式为

$$u_0 = \frac{8}{7}r_0(1 - \sqrt{1 - V_L}) \quad (15)$$

式中, V_L 为地层损失率。

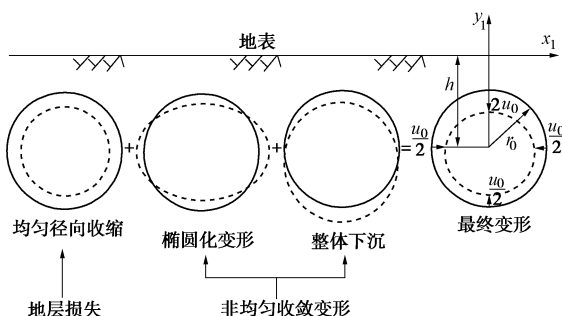


图3 隧道边界椭圆化收敛变形模式

Fig. 3 Oval contraction deformation model for tunnel boundary

将式(14)通过坐标变换转换至到 $x_1o_1y_1$ 直角坐标系下, 再通过共形映射公式(5)转换至 ζ_1 平面下, 可以得 $|\zeta_1| = \alpha_1$ 时的边界条件:

$$U|_{\rho=\alpha_1} = -\frac{1}{4}u_0 \left\{ 5 + 3 \cdot \left[\frac{1+\alpha_1^2}{2\alpha_1} - \frac{(1-\alpha_1^2)^2}{2\alpha_1} \frac{1}{(1-\alpha_1\sigma_1)(1-\alpha_1\sigma_1^{-1})} + \frac{3}{4} \frac{(1-\alpha_1^2)^2(\sigma_1^{-1}-\sigma_1)^2}{(1-\alpha_1\sigma_1)^2(1-\alpha_1\sigma_1^{-1})^2} \right] \right\} \cdot i \cdot \frac{\alpha_1 - \sigma_1}{1 - \alpha_1\sigma_1} \quad (16)$$

因此,

$$\begin{aligned} 2G \cdot U|_{\rho=\alpha_1} (1 - \alpha_1\sigma_1) &= f(\alpha_1\sigma_1)(1 - \alpha_1\sigma_1) \\ &= A_0 + A_1\sigma_1 + \sum_{k=2}^{\infty} A_k\sigma_1^k + \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k}\sigma_1^{-k} \quad (17) \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{cases} A_0 = -\left(\frac{3}{4}\alpha_1^2 + \frac{5}{2}\alpha_1 + \frac{3}{4}\right)u_0Gi, \\ A_1 = \left(\frac{7}{4} + \frac{9}{4}\alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_1^2 - \frac{3}{4}\alpha_1^3 - \frac{3}{4}\alpha_1^4\right)u_0Gi, \\ A_k = -\frac{3}{8}(1-\alpha_1^2)^2\alpha_1^{k-3}[(k+1)\alpha_1^2 + (2-k) + 2\alpha_1]u_0Gi, \\ A_{-k} = \frac{3}{8}(1-\alpha_1^2)^2\alpha_1^{k-1}u_0Gi. \end{cases} \quad (18)$$

至此, 解析函数 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 已经求出, 为了便

于区分, 将其写成 $\varphi(\zeta)_{11}$ 和 $\psi(\zeta)_{11}$ (第一个下标 1 表示这是隧道 1 开挖计算所得解析函数, 第二个下标 1 表示这是在第一次迭代中求得的解析函数)。将解析函数 $\varphi(\zeta)_{11}$ 和 $\psi(\zeta)_{11}$ 代入式(1)即可以算出仅存在隧道 1 的情况下, z_1 平面内土体位移场。建立从 z_2 平面到 ζ_2 平面的映射关系 $z_2 = \omega_2(\zeta_2)$, 采用相同的解法, 即可求得解析函数 $\varphi(\zeta)_{21}$ 和 $\psi(\zeta)_{21}$ (第一个下标 2 表示这是隧道 2 开挖计算所得解析函数, 第二个下标 1 表示这是在第一次迭代中求得的解析函数), 从而得到仅存在隧道 2 情况下 z_2 平面内土体位移场。将两次求解得到的解析函数进行相加求解, 即可得到隧道 1 与隧道 2 叠加影响的解。为了进一步考虑双线隧道相互影响, 引入交替法基本理论^[29]来求解双线隧道开挖引起的地层变形。

2 双线隧道施工影响的位移控制交替法理论解

在第 1 节中, 主要采用基于位移控制边界条件的复变函数方法, 针对单线隧道开挖施工影响进行了理论推导。在本节中, 将采用基于位移控制边界条件的交替法对双线隧道开挖相互作用影响进行理论研究, 这是本文研究方法的核心。

2.1 求解步骤

本文基于交替法基本理论^[29], 进一步结合位移控制边界条件, 建立位移控制交替法, 主要步骤如下:

(1) 在得到只存在隧道 1 开挖时的解析函数 $\varphi(\zeta)_{11}$ 和 $\psi(\zeta)_{11}$ 后, 可以用这两个解析函数来求出隧道 2 位置处洞周附加位移, 并且用级数逼近。

(2) 将计算得到的隧道 2 洞周变形作为隧道 2 的位移初始条件, 求解得到解析函数 $\varphi(\zeta)_{22}$ 和 $\psi(\zeta)_{22}$, 用这两个解析函数求出隧道 1 洞周的附加位移并用级数逼近。将计算得到的隧道 1 洞周变形作为隧道 1 的位移初始条件, 求解得到解析函数 $\varphi(\zeta)_{13}$ 和 $\psi(\zeta)_{13}$, 用这两个解析函数求出隧道 2 洞周的附加位移并用级数逼近。

(3) 不断重复步骤(2), 当迭代达到一定次数后, 洞周变形较初始变形已经非常小, 可以认为达到工程所需的精度要求。本文计算时, 取附加位移的下限值为初始位移的 1×10^{-9} 倍, 即当迭代计算达到某一步时, 如果附加洞周位移的最大值小于初始洞周位移最大值的 1×10^{-9} 倍, 就停止程序运行并且输出结果。此时隧道 1 求解结束。

(4) 对隧道 2 采用步骤(2)、(3)相同方法进行计算。待隧道 2 求解完成后, 将所有步骤求得的解析函数进行相加求解, 即可得到终解。

2.2 第一次迭代求解

在得到只存在隧道 1 开挖时的解析函数 $\varphi(\zeta)_{11}$ 和 $\psi(\zeta)_{11}$ 后, 可以用这两个解析函数来求出隧道 2 位置处洞周附加位移:

$$U_{11}(\zeta_1) = \kappa \cdot \varphi_{11}(\zeta_1) - \omega_1(\zeta_1) \cdot \frac{\overline{\varphi'_{11}(\zeta_1)}}{\omega'_1(\zeta_1)} - \overline{\psi_{11}(\zeta_1)} \quad (19)$$

计算得到的附加位移值为矢量, 因此为了将求得的附加位移再次作为隧道的初始边界条件代入运算, 要将其写为级数形式。

首先, 令 $\rho\sigma_2$ 为 ζ_2 复平面域上的点, $\alpha_2 = (h_2 - \sqrt{h_2^2 - r_0^2})/r_0$, 因此 $\alpha_2\sigma_2$ 为 ζ_2 平面上隧道 2 洞周位置处的点。将其通过共形映射, 坐标转换, 逆映射, 转换为 ζ_1 坐标平面内的点, 记为

$$\lambda_1 = \omega_1^{-1}\{S[\omega_2(\alpha_2\sigma_2)]\} \quad (20)$$

公式 (19) 可以写为

$$\begin{aligned} U'_1(\lambda_1) &= U_{11}(\lambda_1) \cdot (1 - \lambda_1) \\ &= \left[\kappa \cdot \varphi_{11}(\lambda_1) - \omega_1(\lambda_1) \cdot \frac{\overline{\varphi'_{11}(\lambda_1)}}{\omega'_1(\lambda_1)} - \overline{\psi_{11}(\lambda_1)} \right] (1 - \lambda_1) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k \sigma_2^k \quad (21) \end{aligned}$$

因为 σ_2 可以写成以极坐标 θ 表示, 2π 为周期的函数, 因此式 (20) 可以写为

$$U'_1(\lambda_1) = U'_1(\theta) = \delta_1(\theta) + i\delta_2(\theta) \quad (22)$$

其中, $\delta_1(\theta)$ 和 $\delta_2(\theta)$ 分别表示 $F_1(\theta)$ 的实部和虚部, 均为极坐标形式表示的函数。假定函数 $\delta_1(\theta)$ 为在区间 $0 \leq \theta < 2\pi$ 上以 2π 周期的函数, θ_j 的 n 个值可以表示为

$$\theta_j = \frac{2\pi j}{n} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (23)$$

因此, $\delta_1(\theta)$ 个点的值记作

$$\delta_1(\theta_0), \delta_1(\theta_1), \delta_1(\theta_2), \dots, \delta_1(\theta_n)$$

由于此函数具有周期性, $\delta_1(\theta_0) = \delta_1(\theta_n)$, 故可将 m 次多项式逼近 $\delta_1(\theta)$:

$$\delta_1(\theta) = \frac{1}{2}\mu_0 + \sum_{k=1}^m [\mu_k \cos(k\theta) + \chi_k \sin(k\theta)] \quad (24)$$

确定 $2m+1$ 个常数 μ_k 和 χ_k , 来逼近 $\delta_1(\theta)$ 在 n 个点处的值, 可以通过以下公式得出:

$$\begin{cases} \mu_0 = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_1(\theta_j), \\ \mu_k = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_1(\theta_j) \cos(k\theta_j) \quad (k=1, 2, \dots, m), \\ \chi_k = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_1(\theta_j) \sin(k\theta_j) \quad (k=1, 2, \dots, m), \end{cases} \quad (25)$$

$\delta_2(\theta)$ 可以通过相同方法得到系数 μ'_0 , μ'_k 和 χ'_k 。因此, $\delta_1(\theta)$ 和 $\delta_2(\theta)$ 均可展开为级数形式, 写作

$$\begin{cases} \delta_1(\theta) = \frac{1}{2}\mu_0 + \sum_{k=1}^m [\mu_k \cos(k\theta) + \chi_k \sin(k\theta)], \\ \delta_2(\theta) = \frac{1}{2}\mu'_0 + \sum_{k=1}^m [\mu'_k \cos(k\theta) + \chi'_k \sin(k\theta)]. \end{cases} \quad (26)$$

将式 (25) 代入式 (21), 经过整理, 可以得到

$$F_1(\theta) = B_0 + \sum_{k=1}^m (B_k e^{ik\theta} + B_{-k} e^{-ik\theta}) = \sum_{-m}^m B_k \sigma_2^k \quad (27)$$

其中,

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{\mu_0 + i\chi'_0}{2}, \quad B_k = \frac{(\mu_k + \chi'_k) + i(\mu'_k - \chi_k)}{2}, \\ B_{-k} &= \frac{(\mu_k - \chi'_k) + i(\mu'_k + \chi_k)}{2}. \end{aligned} \quad (28)$$

可以用式 (27) 求解得到的级数系数来计算解析函数 $\varphi(\zeta_2)_{22}$ 和 $\psi(\zeta_2)_{22}$, 用这两个解析函数即可求出 z_2 平面内, 以隧道 2 洞周附加变形为初始位移条件的位移场分布情况。

2.3 最终迭代求解

继续迭代求解: 将 ζ_1 平面上隧道 1 洞周位置处的点 $\alpha_1\sigma_1$ 通过共形映射, 坐标转换, 逆映射, 转换为 ζ_2 坐标平面内的点, 记为

$$\lambda_2 = \omega_2^{-1}\{S^{-1}[\omega_1(\alpha_1\sigma_1)]\} \quad (29)$$

用解析函数 $\varphi(\zeta)_{22}$ 和 $\psi(\zeta)_{22}$ 求解隧道 1 位置处的位移, 写为

$$\begin{aligned} U'_2(\lambda_2) &= U_{22}(\lambda_2) \cdot (1 - \lambda_2) \\ &= \left[\kappa \cdot \varphi_{22}(\lambda_2) - \omega_2(\lambda_2) \cdot \frac{\overline{\varphi'_{22}(\lambda_2)}}{\omega'_{22}(\lambda_2)} - \overline{\psi_{22}(\lambda_2)} \right] (1 - \lambda_2) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \sigma_1^k \quad (30) \end{aligned}$$

使用级数逼近隧道 1 位置处洞周附加位移, 将级数系数带入求解即可得到解析函数 $\varphi(\zeta)_{13}$ 和 $\psi(\zeta)_{13}$ 。利用这两个解析函数可以再次计算隧道 2 位置处的洞周附加位移。如此循环往复达到一定次数后, 隧道洞周的附加位移与初始附加位移相比非常小, 虽然无法完全消除附加位移, 但可以认为达到工程所需要的精度。在迭代求解次数达到 t 次后, 得到的一系列解析函数为

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^t \varphi_{1,2k-1}(\zeta_1), \\ \sum_{k=1}^t \varphi_{2,2k}(\zeta_2), \\ \sum_{k=1}^t \psi_{1,2k-1}(\zeta_1), \\ \sum_{k=1}^t \psi_{2,2k}(\zeta_2). \end{cases} \quad (31)$$

此时隧道 1 的求解全部完成, 对隧道 2 采用相同的求解方法, 可以得到一系列解析函数:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^t \varphi_{2-2k-1}(\zeta_1), \\ \sum_{k=1}^t \varphi_{1-2k}(\zeta_2), \\ \sum_{k=1}^t \psi_{2-2k-1}(\zeta_1), \\ \sum_{k=1}^t \psi_{1-2k}(\zeta_2). \end{cases} \quad (32)$$

将所有步骤求得的解析函数进行相加求解, 即可得到基于位移控制边界条件交替法的双线隧道相互作用问题解。

3 算例验证

为了检验基于位移控制边界条件交替法的双线隧道开挖诱发地层沉降解析解的可靠性, 选取2例离心试验和2例现场工程进行对比分析。

3.1 离心试验算例1

Divall 等^[18]对高岭土中双线平行隧道开挖施工影响效应进行了100g离心机试验。换算成原型后, 隧道直径为4 m, 双线隧道轴线之间距离为6 m, 地层损失率为3%, 隧道埋深为10 m, 土体重度为17.4 kN/m³, 土体弹性模量为17.5 MPa, 泊松比为0.25。

图4给出了离心机试验数据和基于位移控制边界条件交替法、叠加法计算得到的双线平行隧道开挖引起的地表沉降值。由图4可知, 基于位移控制边界条件交替法计算所得土体沉降曲线与实测值趋势一致, 呈现“单峰”形态, 双线隧道中间位置处地表土体产生最大沉降值, 距离双线隧道中间位置越远, 地表土体沉降值越小, 逐渐收敛于零。与叠加法相比, 基于位移控制边界条件交替法所得到的曲线与实测值更为接近。当双线隧道开挖时, 其相互之间的影响会导致实际沉降值大于将单个隧道的沉降值进行叠加的结果。说明在分析双线隧道开挖对地表沉降影响问题时, 不能忽略双线隧道相互作用。

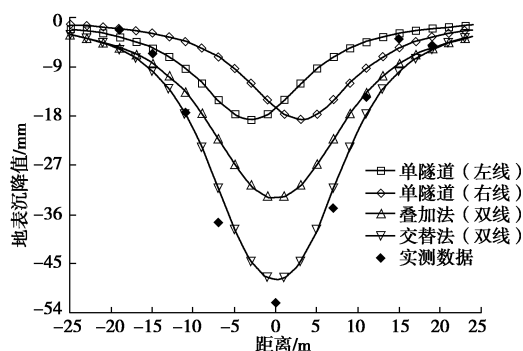


图4 地表沉降试验结果与理论计算值对比

Fig. 4 Comparison between experimental and calculated results of surface displacements

3.2 离心试验算例2

Ma 等^[32]为研究双线平行隧道开挖导致的周边地层变形, 进行了60g离心机试验。换算成原型后, 隧道直径为6 m, 地层损失率为2%, 双线隧道轴线之间距离为12 m, 土体弹性模量为46 MPa, 土体泊松比为0.3, 土体重度为15.49 kN/m³。共进行两组试验, 其中隧道埋深分别为27, 15 m, 其余参数不变。

图5为试验中隧道埋深为15 m (换算成原型) 时获取的离心机试验数据, 同时也给出了本文基于位移控制边界条件交替法和直接线性叠加法计算得到的双线平行隧道开挖诱发的地表沉降值。由图5可知, 本文基于位移控制边界条件交替法计算所得的土体沉降曲线与实测曲线趋势一致; 与叠加法相比, 基于位移控制边界条件交替法所得到的最大沉降值与实测值更为接近, 且曲线反弯点沉降值与最大沉降值的差值更大, 与实测数据的分布规律更为接近。由图5还可发现, 靠近隧道轴线位置处地表产生最大沉降值, 距离隧道轴线越远, 地表土体沉降值越小, 逐渐收敛于零。

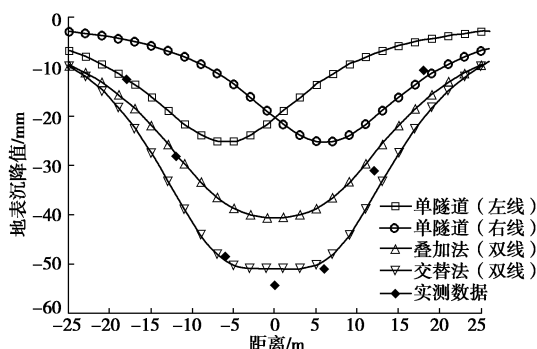


图5 地表沉降试验结果与理论计算值对比

Fig. 5 Comparison between experimental and calculated results of surface displacement

3.3 工程实例1

Koukouts 等^[33]对双线平行盾构隧道开挖引起的地表沉降实测数据进行了研究。本工程隧道埋深为14.2 m, 双线隧道轴线之间距离为12.5 m, 隧道半径为3.1 m, 地层损失率1.3%。土层参数经过加权平均后, 土体重度取20 kN/m³, 土体弹性模量取43 MPa, 泊松比取0.21。

图6给出了工程实测数据以及基于位移控制边界条件交替法、叠加法计算得到的双线平行隧道开挖诱发的地表沉降值。由图可知, 与叠加法相比, 基于位移控制边界条件交替法计算所得到的曲线沉降槽更宽, 呈现“单峰”形态, 在最大沉降值处与实测值更为接近, 且曲线反弯点沉降值与最大沉降值的差更大, 与实测数据点的分布规律更为一致。

3.4 工程实例2

Fargnoli 等^[34]对粗粒土中双线隧道开挖引起的地

表沉降实测数据进行了研究。结合工程资料取隧道轴线埋深为 15 m, 双线隧道轴线之间距离为 15 m, 隧道半径为 3.35 m, 地层损失率为 0.48%。土层参数经过加权平均后, 土体重度取为 20 kN/m^3 , 土体弹性模量取为 48 MPa, 泊松比取为 0.2。

图 7 给出了工程实测数据、基于位移控制边界条件交替法和叠加法计算得到的双线平行隧道开挖诱发的地表沉降值。由图可知, 基于位移控制边界条件交替法计算所得土体沉降分布与实测数据趋势一致, 曲线呈现“双峰”的形态, 最大沉降值位于隧道轴线附近。随着与隧道轴线距离的增大, 沉降值逐渐减小收敛于零。

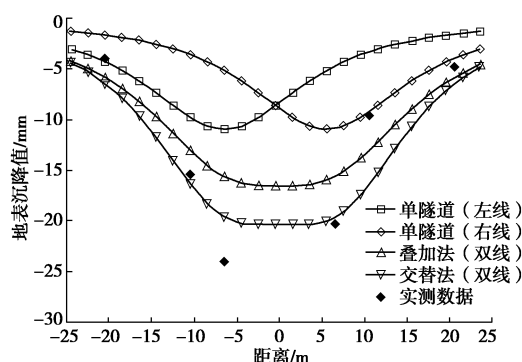


图 6 地表沉降试验结果与理论计算值对比

Fig. 6 Comparison between experimental and calculated results of surface displacements

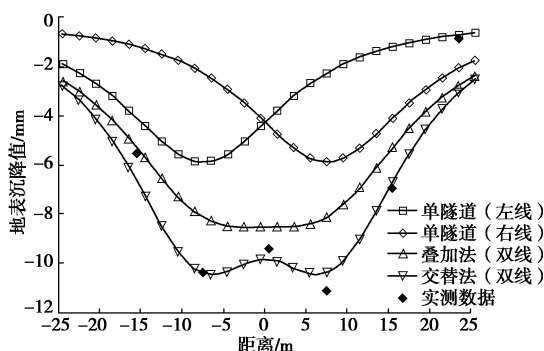


图 7 地表沉降试验结果与理论计算值对比

Fig. 7 Comparison between experimental and calculated results of surface displacements

4 地层变形影响因素分析

为研究不同隧道布置方式对地层变形的影响, 绘制了双线隧道处于水平、斜交与垂直布置时地表与深层土体的沉降曲线以及地层变形等值线图以及沉降曲线图, 等值线上正值代表土体向上隆起, 负值代表土体向下沉降。计算参数取为: 地层损失率为 3%, 土体重度为 17.4 kN/m^3 , 土体弹性模量为 17.5 MPa, 泊

松比为 0.25。

4.1 双线水平布置情况

图 8 (a)~8 (d) 为双线隧道水平布置情况时地层竖向位移等值线图。工况 1 为基本工况, 双线隧道直径 $D=4 \text{ m}$, 隧道埋深均为 10 m, 双线隧道轴线之间距离为 $1.5D$ 。工况 2~工况 4 中双线隧道轴线之间距离分别为 $3D$, $6D$, $10D$, 除间距不同外, 其他参数与工况 1 相同。

由图 8, 双线隧道距离较近时, 周围土体沉降等值线图产生“吸引”现象, 隧道距离越近, 相互“吸引”现象越明显。连接隧道上方附近各等值线顶点可以得到沉降峰值线, 则该线上各点均为其同一水平面内土体沉降峰值点。通过观察沉降峰值线可知: 隧道距离较近时, 两条沉降峰值线上部均向隧道中间倾斜, 呈“八”字形。随着隧道间距离的增加, 沉降峰值线与水平面的夹角逐渐变大, 即土体沉降峰值点逐渐由两隧道中间位置向两隧道各自轴线处移动。当隧道轴心间距达到 $6D$ 时, 两条沉降峰值线与水平面的夹角接近于 90° 。当隧道轴心距达到 $10D$ 时, 两条沉降峰值线已经基本相互平行并且垂直于水平面, 与单隧道开挖形成的地层沉降等值线图基本无区别。说明双线隧道开挖时, 隧道之间存在相互作用, 隧道距离越近, 其周围土体变形越大。双线隧道的相互影响会随着隧道间距的增加而减弱, 到达一定距离后, 这种影响可以忽略。

4.2 双线斜交布置情况

图 9 (a)~9 (c) 为双线隧道斜交情况时地层竖向位移等值线图。工况 1 为基本工况, 双线隧道直径 $D=4 \text{ m}$, 隧道 1 埋深为 10 m, 隧道 2 埋深为 16 m, 双线隧道轴线连线与水平面呈 45° , 双线隧道轴线之间水平距离与垂直距离均为 $1.5D$, 因此直线距离为 $2.1D$ 。工况 2, 工况 3 中双线隧道轴线之间水平距离与垂直距离均为 $2.5D$, $4.5D$, 因此直线距离分别为 $3.5D$, $6.4D$, 除间距不同外, 其他参数均与工况 1 相同。

由图 9 可知, 隧道周围土体等值线图产生“吸引”现象, 隧道间距越近, “吸引”现象越明显。对于隧道上方土体沉降值, 上侧隧道大于下侧隧道, 对于隧道下方土体隆起值, 上侧隧道小于下侧隧道。随着隧道间距增加, 等值线图表现为上侧隧道上方土体沉降值减小, 下方土体隆起值增加, 同时下侧隧道下方土体隆起值增加, 上方土体沉降值减少。通过观察上侧隧道沉降峰值线可以发现, 当间距较近时, 沉降峰值线上部向左侧弯曲, 曲率较大。随着间距的增加, 曲率逐渐减小。

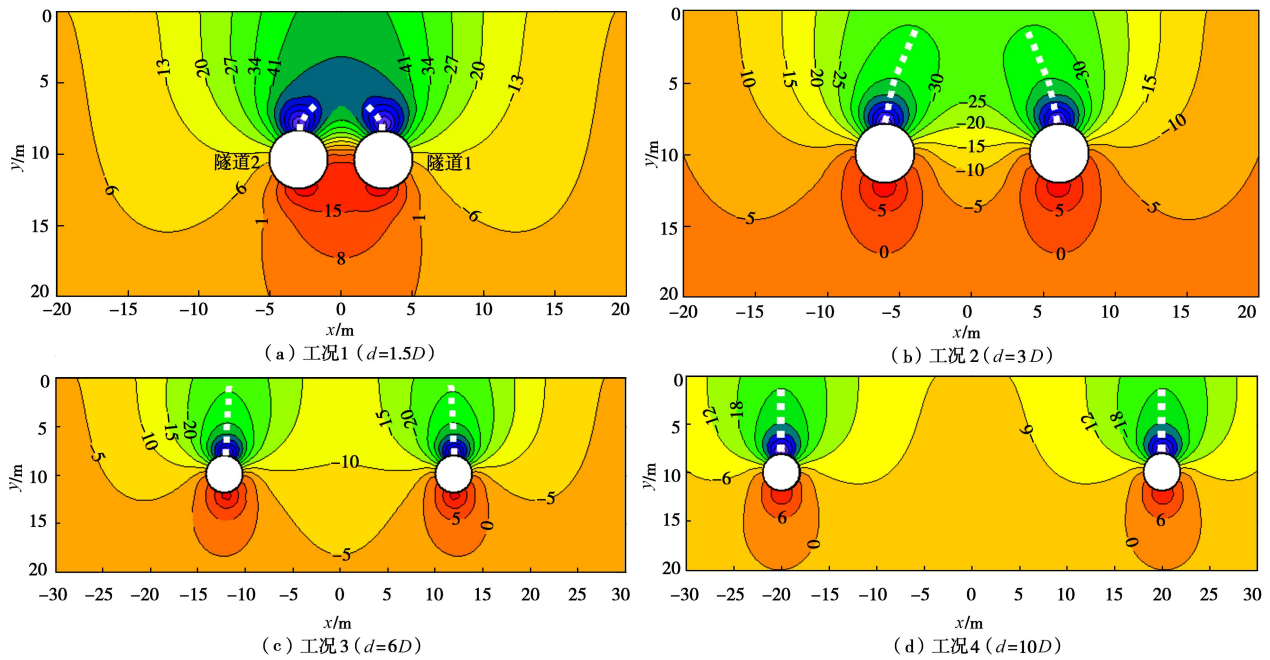


图8 双线平行隧道诱发土体竖向位移等值线图(单位: mm)

Fig. 8 Contour maps of soil subsidence due to twin parallel tunnels (unit: mm)

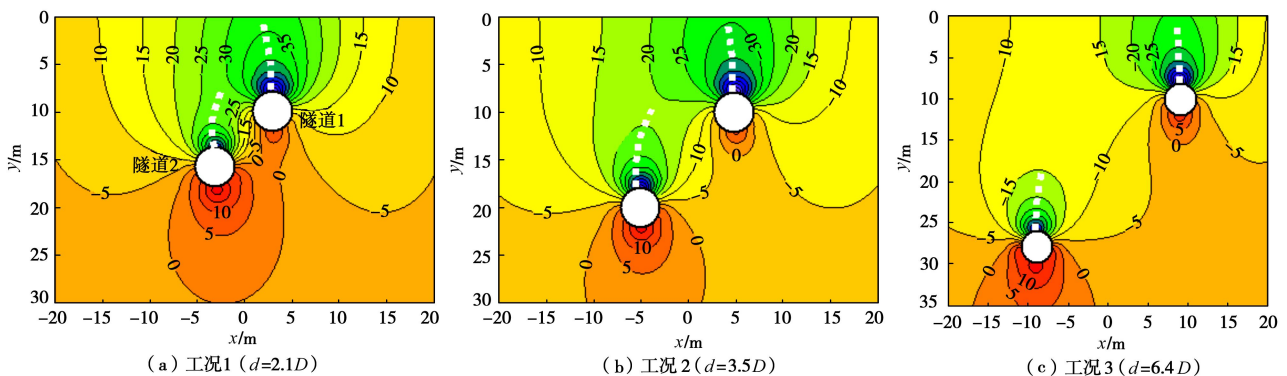


图9 双线斜交隧道诱发土体竖向位移等值线图(单位: mm)

Fig. 9 Contour maps of soil subsidence due to twin oblique tunnels (unit: mm)

5 结 论

本文基于位移控制 Schwarz 交替法和复变函数理论, 结合隧道开挖椭圆化收敛变形边界条件, 提出了任意布置方式下双线盾构隧道开挖引起周围地层变形的计算方法, 主要得到以下两点结论。

(1) 与直接线性叠加法解答相比, 基于位移控制 Schwarz 交替法的复变函数理论解答求解得到的最大沉降值与实测值更为接近, 且曲线反弯点沉降值与最大沉降值的差值更大, 与实测数据的分布规律更为一致, 修正了直接线性叠加法解答不能反映隧道间相互作用影响的缺陷。

(2) 本文所提出的方法为线弹性解, 尚未考虑双隧道开挖先后顺序所带来的时效影响, 也未考虑地下水影响以及开挖地层损失率过大所诱发的地层塑性变

形, 在将来的研究中将进一步考虑。

参考文献:

- [1] ELWOOD D E Y, MARTIN C D. Ground response of closely spaced twin tunnels constructed in heavily overconsolidated soils[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2016, **51**(1): 226 - 237.
- [2] 夏元友, 陈春舒, BAKRI M, 等. 浅埋隧道开挖引起的土体水平位移分析[J]. 岩土力学, 2015, **36**(2): 354 - 360. (XIA Yuan-you, CHEN Chun-su, BAKRI M, et al. Analysis of horizontal displacement of soil induced by shallow tunnel excavation[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, **36**(2): 354 - 360. (in Chinese))
- [3] 楼晓明, 郑俊杰, 章荣军. 隧道施工引起的地表变形数值

- 模拟[J]. 铁道工程学报, 2007, **108**(9): 62 - 66. (LOU Xiao-ming, ZHENG Jun-jie, ZHANG Rong-jun. Simulation of numerical values of surface deformation caused by tunnel construction[J]. Journal of Railway Engineering Society, 2007, **108**(9): 62 - 66. (in Chinese))
- [4] 郑刚, 张扶正, 张天奇, 等. 盾构隧道开挖及补偿注浆对地层扰动影响的室内试验及数值模拟研究[J]. 岩土工程学报, 2016, **38**(10): 1741 - 1753. (ZHENG Gang, ZHANG Fu-zheng, ZHANG Tian-qi, et al. Disturbance of shield tunnel excavation and compensation grouting to surrounding soil: laboratory tests and numerical simulations[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, **38**(10): 1741 - 1753. (in Chinese))
- [5] 陈仁朋, 齐立志, 汤旅军, 等. 砂土地层盾构隧道开挖面被动破坏极限支护力研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, **31**(增刊 1): 2877 - 2882. (CHEN Ren-peng, QI Li-zhi, TANG Lü-jun, et al. Study of limit supporting force of excavation face's passive failure of shield tunnels in sand strata[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2013, **31**(S1): 2877 - 2882. (in Chinese))
- [6] 王俊, 何川, 胡瑞青, 等. 土压平衡盾构掘进对上软下硬地层扰动研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2017, **36**(4): 953 - 963. (WANG Jun, HE Chuan, HU Rui-qing, et al. Soil disturbance induced by EPB shield tunnelling in upper-soft and lower-hard ground[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2017, **36**(4): 953 - 963. (in Chinese))
- [7] 叶飞, 苟长飞, 陈治, 等. 盾构隧道同步注浆引起的地表变形分析[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(4): 618 - 624. (YE Fei, GOU Chang-fei, CHEN Zhi, et al. Ground surface deformation caused by synchronous grouting of shield tunnels[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(4): 618 - 624. (in Chinese))
- [8] MO P Q, YU H S. Undrained cavity-contraction analysis for prediction of soil behavior around tunnels[J]. International Journal of Geomechanics, 2017, **17**(5): 04016121.
- [9] VERRUIJT A. A complex variable solution for a deforming circular tunnel in an elastic half-plane[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1997, **21**(21): 77 - 89.
- [10] 韩凯航, 张成平, 王梦恕. 浅埋隧道围岩应力及位移的显式解析解[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(12): 2253 - 2259. (HAN Kai-hang, ZHANG Cheng-ping, WANG Meng-shu. Explicit analytical solutions for stress and displacement of surrounding rock in shallow tunnels[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(12): 2253 - 2259. (in Chinese))
- [11] PARK K H. Elastic solution for tunneling-induced ground movements in clays[J]. International Journal of Geomechanics, 2004, **4**(4): 310 - 318.
- [12] BOBET A. Drained and undrained response of deep tunnels subjected to far-field shear loading[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2010, **25**(1): 21 - 31.
- [13] 唐晓武, 朱季, 刘维, 等. 盾构施工过程中的土体变形研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, **29**(2): 417 - 422. (TANG Xiao-wu, ZHU Ji, LIU Wei, et al. Research on soil deformation during shield construction process[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, **29**(2): 417 - 422. (in Chinese))
- [14] 梁荣柱, 夏唐代, 林存刚, 等. 盾构推进引起地表变形及深层土体水平位移分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2015, **34**(3): 583 - 593. (LIANG Rong-zhu, XIA Tang-dai, LIN Cun-gang, et al. Analysis of ground surface displacement and horizontal movement of deep soils induced by shield advancing[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2015, **34**(3): 583 - 593. (in Chinese))
- [15] 傅鹤林, 李鲇, 王洪涛, 等. 基于随机介质理论的浅埋偏压隧道沉降预测[J]. 铁道工程学报, 2017, **34**(9): 70 - 76. (FU He-lin, LI Jie, WANG Hong-tao, et al. Research on the ground settlement prediction in shallow tunnel under unsymmetrical pressure based on stochastic medium theory, Journal of Railway Engineering Society, 2017, **34**(9): 70 - 76. (in Chinese))
- [16] NG C W W, LU H, PENG S Y. Three-dimensional centrifuge modelling of the effects of twin tunnelling on an existing pile[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2013, **35**(4): 189 - 199.
- [17] NG C W W, LU H. Effects of the construction sequence of twin tunnels at different dept on an existing pile[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2014, **51**(2): 173 - 183.
- [18] DIVALL. Ground movements associated with twin-tunnel construction in clay[D]. London: City University London, 2013.
- [19] WU B R, LEE C J. Ground movements and collapse mechanism induced by tunnelling in clayey soil[J]. International Journal of Physical Modelling in Geotechnics, 2003, **4**(4): 15 - 29.
- [20] 马少坤, 陈欣, 吕虎, 等. 不同埋置位置隧道对群桩

- 影响的离心模型试验[J]. 中国公路学报, 2015, **28**(8): 67 - 73. (MA Shao-kun, CHEN Xin, LU Hu, et al. Centrifuge modelling test of effects of tunnelling with different depths on pile group[J]. China Journal of Highway and Transport, 2015, **28**(8): 67 - 3. (in Chinese))
- [21] LEE C J, WU B R, CHEN H T, et al. Tunnel stability and arching effects during tunneling in soft clayey soil[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2006, **21**(2): 119 - 132.
- [22] DAS R, SINGH P K, KAINTHOLA A, et al. Numerical analysis of surface subsidence in asymmetric parallel highway tunnels[J]. Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, 2017, **9**(1): 170 - 179.
- [23] CHEN S L, GUI M W, YANG M C. Applicability of the principle of superposition in estimating ground surface settlement of twin- and quadruple-tube tunnels[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2012, **28**(1): 135 - 149.
- [24] 王剑晨, 张顶立, 张成平, 等. 浅埋暗挖隧道近距施工引起的上覆地铁结构变形分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, **33**(1): 90 - 97. (WANG Jian-chen, ZHANG Ding-li, ZHANG Cheng-ping, et al. Analysis of structural deformation of overlying subway station induced by approaching tunnel excavation in shallow depth[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2014, **33**(1): 90 - 97. (in Chinese))
- [25] 杨子奇, 葛克水, 李 皓. 北京地区浅埋隧道开挖引起地表沉降的研究[J]. 地下空间与工程学报, 2016, **12**(增刊 1): 225 - 231. (YANG Zi-qi, GE Ke-shui, LI Hao. Research on the surface subsidence caused by shallow buried tunnel excavation in beijing area[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2016, **12**(S1): 225 - 231. (in Chinese))
- [26] OU C Y, HWANG R N, LAI W J. Surface settlement during shield tunnelling at CH218 in Taipei[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1998, **35**(1): 159 - 168.
- [27] 张路青, 杨志法, 吕爱钟. 任意布置方式下两任意形状孔洞平面弹性问题的解析法研究[J]. 中国科学:地球科学, 2000, **30**(5): 509 - 518. (ZHANG Lu-qing, YANG Zhi-fa, LÜ Ai-zhong. Analytical study on plane elastic problem of two random geometry tunnels[J]. Science in China(Series D), 2000, **30**(5): 509 - 518. (in Chinese))
- [28] KOOI C B, VERRUIJT A. Interaction of circular holes in an infinite elastic medium[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2001, **16**(1): 59 - 62.
- [29] SOKOLNIKOFF I S. Mathematical theory of elasticity[M]. New York: McGraw-Hill, 1956.
- [30] MUSKHELISHVILI N I. Mathematical theory of elasticity[M]. Leyden: International Publishing, 1954.
- [31] GONZALEZ C, SAGASETA C. Patterns of soil deformations around tunnels-application to the extension of Madrid Metro[J]. Computers and Geotechnics, 2001, **28**(6): 445 - 468.
- [32] MA S, SHAO Y, LIU Y, et al. Responses of pipeline to side-by-side twin tunnelling at different depths: 3D centrifuge tests and numerical modelling[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2017, **66**: 157 - 173.
- [33] KOUKOUTAS S P, SOFIANOS A I. Settlements due to single and twin tube urban EPB shield tunnelling[J]. Geotechnical and Geological Engineering, 2015, **33**(3): 487 - 510.
- [34] FARGNOLI V, BOLDINI D, AMOROSI A. Twin tunnel excavation in coarse grained soils: observations and numerical back-predictions under free field conditions and in presence of a surface structure[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2015, **49**(6): 454 - 469.