

DOI: 10.11779/CJGE2018S2028

凹型边坡稳定性分析中的侧面力取值方法探讨

黎 莉¹, 刘子儒²

(1. 湖南大学土木工程学院, 湖南 长沙 410082; 2. 湖南师范大学附属中学, 湖南 长沙 410006)

摘要: 尽管凹型边坡的稳定性高于直线边坡是众所周知的, 要准确计算凹型边坡的安全系数却很难, 因为垂直于滑动方向侧面力对稳定性有影响, 但是目前还没有合适方法计算其的大小。出于简化考虑, 现有研究多按主动土压力计算该侧向力。为了检验按主动土压力计算该力的合理性, 将侧面力分别按主动、静止和被动态土压力取值, 基于 Spencer 法概念推导了考虑侧压力的凹型边坡稳定性计算方法, 然后用 Matlab 软件编制了计算程序, 分析了三种土压力取值方法下, 凹型边坡稳定性安全系数的差异。结果表明, 将侧向压力考虑为土压力或静止土压力, 凹型边坡的稳定性甚至低于相同条件直线边坡; 而将侧向压力考虑为被动态土压力, 凹型边坡的安全系数结果又显著大于有限差分软件 Flac^{3D} 分析结果, 因此, 将凹型边坡的侧压力简单按土压力取为主动、静止和被动态土压力都是不合理的, 如何计算凹型边坡的侧面力, 还需要进一步深入研究。

关键词: 凹型边坡; 侧面力; Spencer 法; 土压力

中图分类号: TU432 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2018)S2-0137-05

作者简介: 黎 莉(1969-), 女, 副教授, 从事土木工程研究与教学工作。E-mail: lilicivil@hnu.edu.cn。

Method for lateral forces in stability analysis of concave slopes in plan view

LI Li¹, LIU Zi-ru²

(1. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China; 2. The high school Attached to Hunan Normal University, Changsha 410006, China)

Abstract: Although it is well known that the stability of concave slopes in plan view is better than that of straight slopes, it is difficult to accurately calculate the factor of safety of concave slopes because the lateral forces perpendicular to the sliding direction have an effect on the stability, but there is no suitable method to calculate them. For the sake of simplification, the existing studies calculate the lateral forces by treating that they are active earth pressures. In order to verify the rationality of that treatment, the lateral forces are regarded as the values of active, static and passive earth pressures respectively. Based on the Spencer method, the method for calculating the stability of a concave slope is deduced considering the lateral forces. And then the calculation program is compiled by using the Matlab software to analyze the difference of factor of safety of the concave slope under three different soil pressures. The results show that by considering the lateral pressure as the earth pressure or the static earth pressure, the stability of the concave slope is even lower than that of the straight slope. When the lateral pressure is considered as the passive earth pressure, the factor of safety is significantly larger than that calculated by the finite difference software Flac^{3D}. Therefore, it is unreasonable to simply regard the lateral pressure of the concave slope as the earth pressure as the active, static and passive earth pressures. How to calculate the lateral forces of the concave slope is still a problem to be further studied.

Key words: concave slope; lateral forces; Spencer method; earth pressure

0 引言

在自然界和实际工程应用中, 呈弯曲形态的三维边坡也有很多, 如河流弯道处的河岸边坡、公路路基弯道、人工填筑的围堰等, 长期工程实践发现凹形边坡稳定性优于相同条件的直线边坡^[1-3], Hoek^[3]在总结世界各地的边坡设计经验中得出结论: 当凹形边坡的曲率半径小于边坡的高度时, 边坡角可以比常规的稳

定性分析方法建议的角度加陡 10°。但是由于三维边坡分析比较困难^[4-6], 对于凹型边坡一般仍视为直线型边坡进行分析, 所得结果可靠但是偏于保守。

由于圆弧边坡作用在侧面边界的正应力的分力与弧形边坡的滑动方向相反, 所以对圆弧边坡稳定性

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51578230)

收稿日期: 2018-07-22

是有利的。一般都认为，弧形边坡的稳定性高于同样条件下的直线边坡，但是至于弧形边坡的稳定性与直线边坡的稳定性的定量差异，则需要确定侧面边界的应力，然后通过计算才能确定。对于侧面边界的应力如何确定，Zhang^[7]和Zhang等^[8]都按主动土压力取值。按主动土压力取值，存在两个问题：一方面根据土压力理论，主动土压力出现在土体滑动方向，在弧形边坡分析中，所谓的侧面力垂直于滑动方向，因此采用主动土压力是不合适的；另一方面，弧形边坡在下滑过程中，滑体在垂直滑动方向趋向于相互挤压，其压力更接近被动土压力的状态，但是又未到被动土压力所需的极限状态，因此从概念上说，直接按主动土压力取值值得进一步研究。

土压力根据土体位移方向，存在主动土压力、静止土压力和被动土压力三类，由于按主动土压力计算存在不足，因此，本文根据土坡稳定性分析的Spencer方法^[9]，研究弧形滑坡侧面土压力的取值对弧形滑坡安全系数的影响，结果供有关人员参考。

1 考虑侧向土压力作用的 Spencer 法

1.1 弧形边坡扇形条块受力分析

如图1所示为凹型边坡，设定边坡破坏模式为圆弧滑动，滑体绕一定轴心呈刚体转动，取其一个平面角度 $d\theta$ 的扇形滑体进行受力分析。

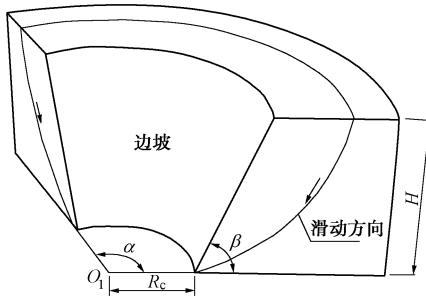


图1 弧形边坡示意图

Fig. 1 Schematic plot of a concave slope in plan view

如图2所示，以凹形边坡所对应的轴线（图2中的z轴）为中心线，以扇形滑体为基本单元，在滑动方向上划分为若干扇形条柱，任取其中一条柱进行分析如图3所示。

图3所示几何参数意义如下： l_i 为竖直条块底部在滑动面上的弧长； h_i 为竖直条块平均高度； b_i 为竖直条块径向厚度； R 为滑动面半径； $d\theta$ 为扇形条柱对应的圆心角； α_i 为竖直条块底部切面与水平面的夹角； r_i 为竖直条块中心到凹形边坡所对应轴线的水平距离； Z_i ， Z_{i+1} 为相邻条块之间的各法向条间力分量； X_i ， X_{i+1} 为相邻条块之间的各切向条间力分量； Q_θ 为

土条受到的环向侧压力； W_i 为土条的重力； T_i 为竖直条块在滑动面上受到的切向力； N_i 为竖直条块在滑动面上受到的法向力； S_i 为竖直条块底部切面力。

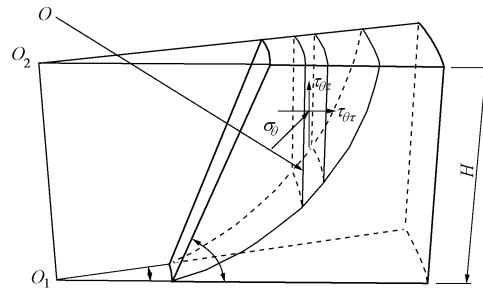


图2 扇形条块示意图

Fig. 2 Schematic plot of a fan-shaped block

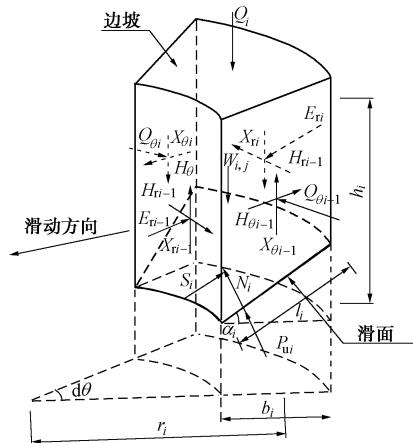


图3 扇形条柱受力示意图

Fig. 3 Forces on a scallop column

每一条土块上作用力：

(1) 重力

$$W_i = \frac{1}{2} \gamma (2h_i - l_i \sin \alpha_i) l_i \cos \alpha_i r_i d\theta \quad . \quad (1)$$

(2) 垂直作用在土条底面上的总压力 N_i

该力由两部分组成，可分为粒间有效法向应力 P'_i 和静止水压力 P_{ui} ，

$$P_{ui} = U l_i r_i d\theta \quad , \quad (2)$$

式中， U 为底滑面上的平均水压强，那么

$$N_i = P'_i + U l_i r_i d\theta \quad . \quad (3)$$

(3) 作用在土条底面上的剪应力 S_i

$$S_i = N_i \frac{\tan \phi'}{F} + \frac{c'_i}{F} l_i r_i d\theta \quad . \quad (4)$$

(4) 侧压力的抗滑分力 Q_p

$$Q_p = 2Q_\theta \sin \frac{d\theta}{2} \approx Q_\theta d\theta \quad . \quad (5)$$

1.2 考虑侧向力作用的条件力计算方法

将条柱所受的力绘制成为多边形，不考虑侧向力时条柱的受力如图4所示。参照 Spencer^[9]的方法，根

据图 4 导得条间力 Q 的解答如式(6)所示, 限于篇幅本文不再推导。

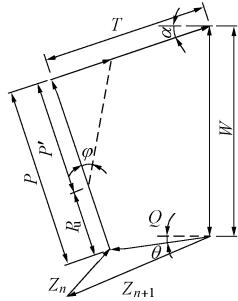


图 4 Spencer 法条块力多边形

Fig. 4 Forces on a slice of Spencer method

$$Q_i = \frac{c'}{F} l_i r_i d\theta + \frac{\tan \varphi'}{F} (W_i \cos \alpha_i - U l_i r_i d\theta) - W_i \sin \alpha_i \cdot \frac{\cos(\alpha_i - \beta) \left[1 + \tan(\alpha_i - \beta) \frac{\tan \varphi'}{F} \right]}{(6)}$$

如果考虑条柱的侧向力, 侧向力的方向与滑动方向相反, 将侧向力补充到力多边形中, 如图 5 所示。

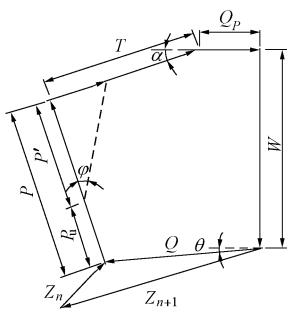


图 5 考虑侧向力的条块力多边形

Fig. 5 Forces including lateral forces on a slice of Spencer method

与图 4 相比, 图 5 增加了侧向力, 因此可根据力的组合原理, 基于式(6)解答, 导得考虑侧向力后的条间力的解答:

$$Q_i = \frac{l_i r_i d\theta}{F} (c' - U \tan \varphi') + Q_p \left(\sin \alpha_i \frac{\tan \varphi'}{F} + \cos \alpha_i \right) + \gamma \left(h_i - \frac{l_i \sin \alpha_i}{2} \right) l_i \cos \alpha_i r_i d\theta \left(\cos \alpha_i \frac{\tan \varphi'}{F} - \sin \alpha_i \right) \cdot \frac{1}{\cos(\alpha_i - \beta) \left[1 + \tan(\alpha_i - \beta) \frac{\tan \varphi'}{F} \right]} \quad (7)$$

2 三种侧向力的计算方法

文献[7]将侧向力简化为土压力, 根据土压力理论, 作用在挡土墙上的土压力分三种, 当挡土墙向背离填土方向移动的适当距离, 使墙后土中的应力状态达到主动极限平衡状态时, 墙背所受到的土压力, 称

为主动土压力。当挡土墙在外力作用下, 向土体方向偏移至墙后土体达到极限平衡状态时, 作用在墙背上的土压力称为被动土压力。挡土墙不运动时, 为静止土压力。

2.1 按主动土压力计算

地表一定深度下的三种土压力计算方法如下:

主动土压力强度 p_a 可表示为

$$p_a = \gamma z \tan^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - 2c \tan^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \\ = \gamma z \sqrt{K_a} - 2c \sqrt{K_a} \quad (8)$$

总主动土压力为

$$P_a = \frac{1}{2} \gamma h^2 K_a - 2ch \sqrt{K_a} + \frac{2c^2}{\gamma} \quad (9)$$

总主动土压力的作用点位于土体底部往上 $(H - z_0)/3$ 处, z_0 为临界深度

$$z_0 = \frac{2c}{\gamma \sqrt{K_a}} \quad (10)$$

式中 K_a 为主动土压力系数, φ 为土体内摩擦角; c 土体黏聚力。

2.2 按静止土压力计算

土条表面上任意深度 z 处的静止土压力强度可表示为

$$\sigma_0 = K_0 \gamma z \quad (11)$$

静止土压力沿土条呈三角形分布, 如取单位土条长, 则作用在土条侧面静止土压力

$$P_\theta = \frac{1}{2} \gamma h^2 K_0 \quad (12)$$

静止土压力强度沿土条高也呈三角形分布, 其合力作用点在距土条底 $h_i/3$ 处。

2.3 按被动土压力计算

$$p_p = \gamma z K_p + 2c \sqrt{K_p} \quad (13)$$

式中被动土压力系数

$$K_p = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (14)$$

若取单位土条长度计算, 则侧面的被动土压力

$$P_p = \frac{1}{2} \gamma h^2 K_p + 2ch \sqrt{K_p} \quad (15)$$

由式(15)可见, 被动土压力分布强度沿土体呈三角形线性分布, 土压力合力的作用点离土条底部 $h_i/3$ 。

3 考虑侧向力的 Spencer 法求解过程

考虑侧向力的 Spencer 法对安全系数的求解步骤与 Spencer 法基本相同, 步骤如下:

(1) 给定确定的滑弧面。

(2) 给待定常数 θ , 分别对先假定一系列值 F , 则安全系数 F 的值可以通过方程 (16) 和 (17) 求得。

$$\sum Q = 0, \quad (16)$$

$$\sum Q \cos(\alpha - \theta) = 0. \quad (17)$$

方程 (16) 为关于力的整体平衡方程, 因此对应求得的安全系数为关于力的安全系数 F_f ; 方程 (17) 为关于力矩的整体平衡方程, 因此对应求得的安全系数为关于力矩的安全系数 F_m 。

(3) 根据不同的 θ 值可对应得到不同的 F_f 值和 F_m 值, 然后将得到的 θ 值和对应 F_f 值连成一条曲线, 同理将 θ 值和对应 F_m 值在同一图 5 连成一条曲线。两条曲线的交点处的 θ 和对应的 F_i 同时满足方程 (16) 和 (17), 即同时满足力的平衡和力矩平衡。

(4) 将求得的 θ 和对应的 F_i 值代入方程 (7), 从上至下逐个条块求解出土条界面上的法向力和剪应力, 以根据合理性条件进行剪力的合理性校检: 条块界面上的剪应力不应超过此界面上发挥的抗剪应力。

(5) 再依次从上至下逐个土条求出条间力的作用点及条底法向力的作用点, 进行法向力的合理性检验: 作用在条块上的有效法向应力的合力作用点不应该落在条块体的外边界。

如此就求得了该假设滑动面的安全系数, 搜索其他可能滑动面, 最小值为该边坡的安全系数。

4 算例与校核

根据以上算法, 采用 Matlab 编制分析程序, 首先用一个算例说明考虑侧面力的 Spencer 法的求解过程的正确性。

Zettler 等^[10]取一个边坡高度 25 m, 坡度 2:1, 弧形边坡的半径为 25 m, 其弧形边坡和对应尺寸的直线边坡几何模型如图 6 所示, 其中弧形坡 $R_0/H=0.48$ 。边坡的材料参数如表 1 所示。

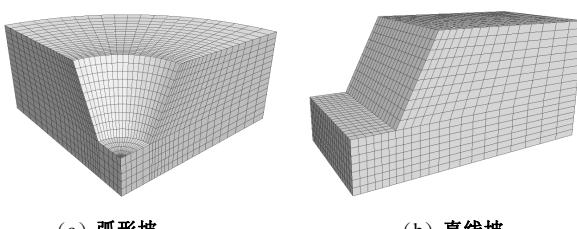


图 6 边坡几何模型

Fig. 6 Geometrical models of slopes

Zettler 采用 Flac^{3D} 进行计算, 计算结果得到直线坡的安全系数为 1.37, 弧形坡的安全系数为 1.83。

首先校核本文 Spencer 方法的正确性, 对于平面边坡, 计算结果如图 7 所示。

表 1 材料参数

Table 1 Material parameters

| E /(kN·m ⁻²) | v | c /kPa | φ /(°) | γ /(kN·m ⁻³) |
|-------------------------------|------|-------------|-------------------|------------------------------------|
| 2.57×10^8 | 0.29 | 38 | 45 | 2500 |

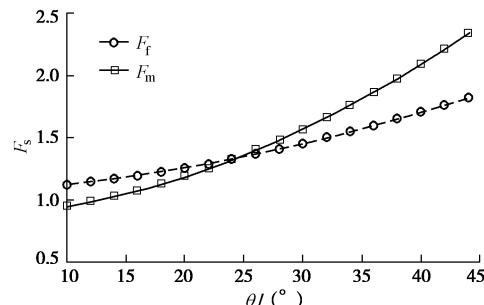


图 7 Spencer 法计算结果

Fig. 7 Calculated results by Spencer method

交点对应的安全系数为 1.32, 说明本文 Spencer 法的编写是正确的。

5 3 种土压力计算结果分析

分别考虑不同的侧面力计算方法, 对 Zettler 等^[10] 算例进行计算, 结果如表 2 所示

表 2 考虑不同侧压力的安全系数计算结果

Table 2 Calculated results of factors of safety considering different types of lateral pressures

| 方法 | Flac ^{3D} | 主动 土压力 | 静止 土压力 | 被动 土压力 |
|----|--------------------|-----------|-----------|-----------|
| 结果 | 1.83 | 1.05 | 1.06 | 2.25 |

从表 2 可知, 按主动土压力和静止土压力计算的结果显著低于 Flac^{3D} 计算结果, 甚至显著低于直线坡的计算结果。计算结果低于直线坡的原因如下: 如果不考虑侧面力, 如图 2 所示, 滑体在倾角大的位置, 滑体体积大, 在倾角缓的位置, 滑体体积小, 因此下滑力比直线坡更大。如果主动土压力、静止土压力取值太小, 弧形坡的安全系数反而低于直线坡。这说明弧形坡按主动土压力和静止土压力取值都是不够的。而按被动土压力取值, 所得安全系数又比 Flac^{3D} 计算结果大很多, 说明坡体下滑时, 侧面的挤压也未达到极限状态, 因此取被动土压力是偏于不安全的。

这样看来, 弧形边坡简单根据土压力理论对侧面力进行取值是不合理的。

6 结 论

本文在边坡极限平衡分析 Spencer 法基础上, 根据现有研究成果, 对弧形边坡的侧面力按土压力取值的方法进行的研究, 在推导了考虑侧面力的 Spencer

法后, 根据土压力理论, 将 3 种土压力纳入弧形边坡稳定性分析, 得到的结论如下:

(1) 与直线边坡相比, 由于弧形边坡在倾角陡的位置滑块体积大, 在倾角缓的地方体积小, 因此如果不考虑侧面力的作用, 其下滑力和抗滑力之比比直线坡更大, 安全系数比直线坡小。

(2) 算例表明, 弧形边坡的侧面力如果按主动土压力、静止土压力取值, 弧形坡的安全系数依然低于直线坡, 说明按主动土压力、静止土压力取值都是不够的。

(3) 弧形边坡滑体下滑时, 滑体侧面趋于相互挤压, 因此侧面作用力大于静止土压力; 由于未达到极限状态, 该作用力又小于被动土压力, 因此按被动土压力取值的话, 分析得到的弧形边坡安全系数高于实际情况, 得到的结果偏不安全。

以上研究说明, 弧形边坡的侧面力取值是一个复杂的问题, 简单按土压力理论进行取值是不合理的, 应该进行更深入的研究和分析。

参考文献:

- [1] JENIKE A W, YEN B C. Slope stability in axial symmetry[C]// Proc 5th Symposium on Rock Mechanics. Minnesota, 1963: 689 - 711.
- [2] PITEAU D R, JENNINGS J E. The effects of plan geometry on the stability of natural slopes in rock in the Kimberley area of South Africa[C]// Proc 2nd Congress of the International Society of Rock Mechanics. Belgrade, 1970.
- [3] HOEK E, BRAY J W. Rock slope engineering[M]. 3rd ed. London: The Institute of Mining and Metallurgy, 1981.
- [4] LAM L, FREDLUND D G. A general limit equilibrium model for three-dimensional slope stability analysis[J]. Can Geotech J, 1993, **30**: 905 - 919.
- [5] TOTONCHI A, ASKARI F. 3D Stability analysis of concave slopes in plan view using linear finite element and lower bound method[J]. IJST, Transactions of Civil Engineering, 2012, **36**(C2): 191 - 194.
- [6] LORIG L. Lessons learned from slope stability studies[C]// Proceedings of the International FLAC Symposium on Numerical Modeling in Geomechanics. Minneapolis, 1999: 17 - 21.
- [7] ZHANG X. Three-dimensional stability analysis of concave slopes in plan view[J]. J Geotech Engng, 1988, **114**(6): 658 - 671.
- [8] ZHANG T W, CAI Q X. 3D stability analysis method of concave slope based on the Bishop method[J]. International Journal of Mining Science and Technology, 2017, **27**: 365 - 370.
- [9] SPENCER E. A method of analysis of embankments assuming parallel inter-slice forces[J]. Géotechnique, 1967, **17**(1): 11 - 26.
- [10] ZETTLER A H, POISEL R, ROTH W, et al. Slope stability analysis based on the shear reduction technique in 3D[C]// Proceedings of the International FLAC Symposium on Numerical Modeling in Geomechanics. Minneapolis, 1999: 11 - 16.

(本文责编 明经平)