

DOI: 10.11779/CJGE201812022

# 移动荷载作用下层状正交各向异性地基平面应变问题动力响应

张春丽<sup>1, 2, 3</sup>, 王 博<sup>1</sup>, 祝彦知<sup>3</sup>

(1. 郑州大学水利与环境工程学院, 河南 郑州 450001; 2. 中原工学院信息商务学院, 河南 郑州 450007;  
3. 中原工学院建筑工程学院, 河南 郑州 450007)

**摘 要:** 基于移动谐波荷载作用下单层正交各向异性地基的平面应变问题的动力方程, 通过 Fourier 变换, 引入状态向量, 推导了直角坐标系下单层正交各向异性地基的传递矩阵, 建立层状正交各向异性地基平面应变问题计算模型, 利用传递矩阵方法, 结合层间接触条件和连续条件, 求得了直角坐标系下正交各向异性层状地基任意深度处的平面应变问题的位移和应力解析表达式。基于推导的理论方法, 编制了相应的计算程序, 验证了单层正交各向异性土体的计算结果, 算例分析土体的分层特性和正交各向异性性质对土体变形的影响规律。研究结果表明: 忽略土体的分层特性和上层土体的正交各向异性, 不能准确描述地基的动力特性。

**关键词:** 移动荷载; 层状正交各向异性地基; 传递矩阵; 动力响应

中图分类号: TU443

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 4548(2018)12 - 2325 - 07

**作者简介:** 张春丽(1979 - ), 女, 博士研究生, 副教授, 主要从事岩土和地下结构等方面的教学与科研工作。E-mail: chunli168@163.com。

## Dynamic response to plane strain problem of multilayered orthotropic foundation under moving loads

ZHANG Chun-li<sup>1, 2, 3</sup>, WANG Bo<sup>1</sup>, ZHU Yan-zhi<sup>3</sup>

(1. College of Water Conservancy & Environmental Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China; 2. College of Information & Business, Zhongyuan University of Technology, Zhengzhou 450007, China; 3. School of Civil Engineering and Architecture, Zhongyuan University of Technology, Zhengzhou 450007, China)

**Abstract:** Based on the dynamic equation for plane strain problem of single-layer orthotropic foundation under moving harmonic loads, the transfer matrix of single-layer orthotropic foundation in the Cartesian coordinates is deduced through the Fourier transform and the introduction of state vector. Then the computational model for the layered orthotropic foundation is established. Considering the contact condition and the continuous condition between layers, the analytic expressions for the displacements and stresses at arbitrary depth in the plane strain problem of multilayered orthotropic foundation are derived by means of the transfer matrix method. Based on the theoretical solutions, the corresponding calculation programs are compiled to verify the calculated results of the single-layer orthotropic foundation and to study the influences of layered characteristics and orthotropic properties of soils on the amplitudes of vertical displacement of soil surface. The results indicate that neglecting the layered characteristics of soils and orthogonal anisotropy of the upper soils cannot accurately describe the dynamic characteristics of foundation.

**Key words:** moving load; multilayered orthotropic foundation; transfer matrix; dynamic response

## 0 引 言

在路基等工程中, 计算常简化为平面应变问题。地基土往往成层沉积, 沿深度存在分层, 不仅水平和垂直方向的力学性质存在差异, 即使在水平方向也会存在各向异性。为了使路基的力学计算模型更精确, 建立层状正交各向异性弹性半空间模型, 研究移动荷

载作用下层状正交各向异性地基的平面应变问题的动力响应无疑具有重要的理论和应用价值。Grundmann

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(51579226); 河南省高等学校青年骨干教师资助计划项目(2015GGJS-277); 河南省高等学校重点科研项目计划资助项目(17B560016); 中原工学院信息商务学院校级科研项目(ky1803)

收稿日期: 2017 - 09 - 18

等<sup>[1]</sup>研究了线性弹性层状半空间在简谐移动荷载作用和（简单的移动周期荷载模拟）简化列车荷载作用下的动力响应问题。钟阳等<sup>[2]</sup>利用传递矩阵和 Laplace-Hankel 积分变换相结合的方法推导出了轴对称半空间层状弹性体系动态反应的理论解。王有凯等<sup>[3]</sup>首次在直角坐标系下用矩阵传递法研究了层状横观各向同性弹性地基的非轴对称静力问题。艾智勇等<sup>[4]</sup>用解析层元法求解了直角坐标系下横观各向同性层状地基平面应变的静力问题。Ai 等<sup>[5-6]</sup>用解析层单元法研究了横观各向同性多层半平面的动力响应。邓学钧等<sup>[7]</sup>提出了有限单元和无限单元耦合的方法计算了弹性层状体系动态响应。Runesson 等<sup>[8]</sup>用有限元方法求解了层状地基，用离散的傅立叶级数将二维问题简化为若干一维问题。Lu 等<sup>[9]</sup>建立了路面结构层的物理模型，试验研究了各向同性层状路面-路基系统的动力特性。王新宽<sup>[10]</sup>把路面结构分为 4 层，通过有限元软件对路基土体动力响应进行分析。Jin 等<sup>[11]</sup>利用薄层法，研究了在移动简谐线荷载作用下，平面应变条件下各向同性层状半空间的动力响应。

已有的研究工作主要集中在对各向同性或横观各向同性层状地基的静动力问题研究，针对正交各向异性半空间层状地基动力问题的研究仍属于空白，需要进一步研究。本文利用传递矩阵方法，结合边界条件、层间接触条件和连续条件，求得直角坐标系下层状地基平面应变问题动力响应解，研究土体的分层特性和正交各向异性性质对土体变形的影响规律。

## 1 单层正交各向异性地基传递矩阵

### 1.1 动力方程

假设单层正交各向异性地基表面受横向谐振荷载

$$q(x_1, t) = \begin{cases} q_0 e^{i\omega t} & (|x_1 - ct| \leq b) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad \text{以速度 } c \text{ 沿 } x_1 \text{ 轴正向移动, 如图 1。}$$

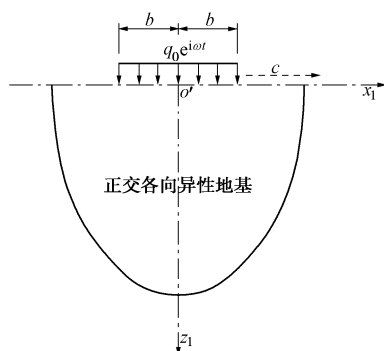


图 1 单层正交各向异性地基模型

Fig. 1 Computational model for single-layer orthotropic soils

在直角坐标系下，不考虑体力作用的平面应变问

题的动力平衡微分方程为

$$\frac{\partial \sigma_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{z_1 x_1}}{\partial z_1} = \rho \frac{\partial^2 u_{x_1}}{\partial t^2}, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \tau_{x_1 z_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{z_1}}{\partial z_1} = \rho \frac{\partial^2 u_{z_1}}{\partial t^2}. \quad (1b)$$

正交各向异性介质的本构方程为

$$\sigma_{x_1} = c_{11} \varepsilon_{x_1} + c_{13} \varepsilon_{z_1}, \quad (2a)$$

$$\sigma_{z_1} = c_{13} \varepsilon_{x_1} + c_{33} \varepsilon_{z_1}, \quad (2b)$$

$$\tau_{z_1 x_1} = c_{55} \gamma_{z_1 x_1}. \quad (2c)$$

几何方程为

$$\varepsilon_{x_1} = \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_1}, \quad (3a)$$

$$\varepsilon_{z_1} = \frac{\partial u_{z_1}}{\partial z_1}, \quad (3b)$$

$$\gamma_{z_1 x_1} = \frac{\partial u_{x_1}}{\partial z_1} + \frac{\partial u_{z_1}}{\partial x_1}. \quad (3c)$$

引入移动坐标系  $x = x_1 - ct, z = z_1$ ，各变量在移动坐标系下可以表述为

$$\Psi(x_1 - ct, z_1, t) = \Psi(x, z) e^{i\omega t}, \quad (4a)$$

$$\dot{\Psi}(x_1 - ct, z_1, t) = (i\omega \Psi - c \Psi_x) e^{i\omega t}, \quad (4b)$$

$$\ddot{\Psi}(x_1 - ct, z_1, t) = (c^2 \Psi_{xx} - 2i\omega c \Psi_x - \omega^2 \Psi) e^{i\omega t}. \quad (4c)$$

则式 (1) ~ (3) 变为

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left( c^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - 2i\omega c \frac{\partial u_x}{\partial x} - \omega^2 u_x \right), \quad (5a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \left( c^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - 2i\omega c \frac{\partial u_z}{\partial x} - \omega^2 u_z \right). \quad (5b)$$

$$\sigma_x = c_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (6a)$$

$$\sigma_z = c_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (6b)$$

$$\tau_{zx} = c_{55} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \quad (6c)$$

联合式 (5)、(6) 可推导出

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\tau_{zx}}{c_{55}}, \quad (7a)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{c_{13}}{c_{33}} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\sigma_z}{c_{33}}, \quad (7b)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \left( c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2i\omega c \frac{\partial}{\partial x} - \omega^2 \right) u_z - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}, \quad (7c)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \left[ \left( \rho c^2 - c_{11} + \frac{c_{13}^2}{c_{33}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\rho i\omega c \frac{\partial}{\partial x} - \rho \omega^2 \right] u_x - \frac{c_{13}}{c_{33}} \frac{\partial \sigma_z}{\partial x}. \quad (7d)$$

### 1.2 状态方程及求解

对式 (7a) ~ (7d) 的变量  $x$  做 Fourier 变换得状

态方程:

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{\mathbf{R}}(\xi, z) = \mathbf{A}(\xi) \bar{\mathbf{R}}(\xi, z), \quad (8)$$

其中,  $\bar{\mathbf{R}}(\xi, z) = [\bar{u}_x(\xi, z) \quad \bar{u}_z(\xi, z) \quad \bar{\sigma}_z(\xi, z) \quad \bar{\tau}_{xz}(\xi, z)]^T$ ,

$$\mathbf{A}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & A_3 & 0 & A_6 \\ A_1 & 0 & A_5 & 0 \\ 0 & A_4 & 0 & A_3 \\ A_2 & 0 & A_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = -\frac{c_{13}}{c_{33}} \cdot i\xi, \quad A_3 = -i\xi,$$

$$A_4 = \rho(-c^2 \xi^2 + 2\omega \xi c - \omega^2), \quad A_5 = \frac{1}{c_{33}}, \quad A_6 = \frac{1}{c_{55}},$$

$$A_2 = (-\rho c^2 + c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}) \xi^2 + 2\rho \omega \xi c - \rho \omega^2.$$

常微分方程 (8) 的解<sup>[12-13]</sup>为

$$\bar{\mathbf{R}}(\xi, z) = e^{z\mathbf{A}(\xi)} \bar{\mathbf{R}}(\xi, 0), \quad (9)$$

$$\text{其中, } \mathbf{T}(z) = e^{z\mathbf{A}(\xi)} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \text{ 为传递矩阵,}$$

它建立了初始状态向量与任意深度处的状态向量之间的关系式。

$\mathbf{A}(\xi)$  的特征方程为

$$\lambda^4 + a_1 \lambda^2 + a_2 = 0, \quad (10)$$

式中,  $a_1 = -2A_1A_3 - A_2A_6 - A_4A_5$ ,  $a_2 = A_1^2A_3^2 - A_4A_6A_1^2 - A_2A_5A_3^2 + A_2A_4A_5A_6$ 。

式 (10) 的 4 个根分别为  $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2$  ( $\text{Re}[\lambda_j] \geq 0, j=1, 2$ ),  $\lambda_j$  可表示为

$$\lambda^2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}. \quad (11)$$

根据 Cayley-Hamilton 定理, 矩阵  $\mathbf{A}$  要满足特征方程, 则有

$$\mathbf{A}^4 + a_1 \mathbf{A}^2 + a_2 \mathbf{I} = 0, \quad (12)$$

式中,  $\mathbf{I}$  为 4 阶单位矩阵。

$e^{z\mathbf{A}(\xi)}$  关于  $\mathbf{A}(\xi)$  的级数展开式的最高次幂不能超过三次, 即

$$e^{z\mathbf{A}(\xi)} = b_0 \mathbf{I} + b_1 \mathbf{A} + b_2 \mathbf{A}^2 + b_3 \mathbf{A}^3, \quad (13)$$

式中,  $b_0, b_1, b_2, b_3$  均为待定系数, 且均为关于变量  $z$  的函数。把特征值代入 (13) 也成立, 即可求得系数  $b_0, b_1, b_2, b_3$ 。

当  $\mathbf{A}(\xi)$  的特征值无重根, 即  $\pm\lambda_1 \neq \pm\lambda_2$  时

$$b_0 = \frac{\lambda_1^3 e^{\lambda_2 z} - \lambda_2^3 e^{\lambda_1 z} + \lambda_1^2 e^{-\lambda_2 z} - \lambda_2^2 e^{-\lambda_1 z}}{2\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2}, \quad (14a)$$

$$b_1 = -\frac{\lambda_1^3 e^{\lambda_2 z} - \lambda_2^3 e^{\lambda_1 z} - \lambda_1^3 e^{-\lambda_2 z} + \lambda_2^3 e^{-\lambda_1 z}}{2\lambda_1\lambda_2^3 - 2\lambda_1^3\lambda_2}, \quad (14b)$$

$$b_2 = \frac{e^{\lambda_1 z} + e^{-\lambda_1 z} - e^{\lambda_2 z} - e^{-\lambda_2 z}}{2\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2}, \quad (14c)$$

$$b_3 = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 z} - \lambda_2 e^{\lambda_1 z} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 z} + \lambda_2 e^{-\lambda_1 z}}{2\lambda_1\lambda_2^3 - 2\lambda_1^3\lambda_2}. \quad (14d)$$

当  $\mathbf{A}(\xi)$  的特征值有重根, 即  $\pm\lambda_1 = \pm\lambda_2$  时,

$$b_0 = \frac{e^{\lambda_1 z} + e^{-\lambda_1 z}}{2} - \lambda_1 z \frac{e^{\lambda_1 z} - e^{-\lambda_1 z}}{4}, \quad (15a)$$

$$b_1 = \frac{3(e^{\lambda_1 z} - e^{-\lambda_1 z}) - \lambda_1 z(e^{\lambda_1 z} + e^{-\lambda_1 z})}{4\lambda_1}, \quad (15b)$$

$$b_2 = \frac{z(e^{\lambda_1 z} - e^{-\lambda_1 z})}{4\lambda_1}, \quad (15c)$$

$$b_3 = \frac{-(e^{\lambda_1 z} - e^{-\lambda_1 z}) + \lambda_1 z(e^{\lambda_1 z} + e^{-\lambda_1 z})}{4\lambda_1^3}. \quad (15d)$$

联合式 (13) ~ (15) 可求得传递矩阵  $e^{z\mathbf{A}(\xi)}$  各元素表达式:

$$T_{11} = b_0 + b_2(A_1A_3 + A_2A_6), \quad (16a)$$

$$T_{12} = A_3b_1 + b_3(A_3^2A_1 + A_3A_4A_5 + A_6A_1A_4 + A_6A_2A_3), \quad (16b)$$

$$T_{13} = b_2(A_1A_6 + A_3A_5), \quad (16c)$$

$$T_{14} = A_6b_1 + b_3(A_3A_1A_6 + A_3^2A_5 + A_6A_1A_3 + A_2A_6^2), \quad (16d)$$

$$T_{21} = A_1b_1 + b_3(A_1^2A_3 + A_1A_2A_6 + A_5A_1A_4 + A_5A_2A_3), \quad (16e)$$

$$T_{22} = b_0 + b_2(A_1A_3 + A_4A_5), \quad (16f)$$

$$T_{23} = A_5b_1 + b_3(A_1^2A_6 + 2A_1A_3A_5 + A_4A_5^2), \quad (16g)$$

$$T_{24} = T_{13}, \quad (16h)$$

$$T_{31} = b_2(A_1A_4 + A_2A_3), \quad (16i)$$

$$T_{32} = A_4b_1 + b_3(A_3A_1A_4 + A_2A_3^2 + A_4A_1A_3 + A_4^2A_5), \quad (16j)$$

$$T_{33} = T_{22}, \quad (16k)$$

$$T_{34} = T_{12}, \quad (16l)$$

$$T_{41} = A_2b_1 + b_3(A_1^2A_4 + 2A_1A_2A_3 + A_2^2A_6), \quad (16m)$$

$$T_{42} = T_{31}, \quad (16n)$$

$$T_{43} = T_{21}, \quad (16o)$$

$$T_{44} = T_{11}. \quad (16p)$$

## 2 传递矩阵在层状土体的应用

为简化计算, 仅研究层状正交各向异性地基的平面应变问题, 地基表面作用的荷载为恒定速度移动的谐振荷载, 如图 2 所示, 有  $N$  层土体,  $h_n$  分别为第  $n$  层土层的厚度, 层间接触面上位移和应力完全连续。该问题的边界条件如下所示

(1) 地基表面  $z=0$  处

$$\bar{\sigma}_z(\xi, 0) = -\frac{2q_0}{\xi} \sin(\xi b), \quad (17a)$$

$$\bar{\tau}_{xz}(\xi, 0) = 0. \quad (17b)$$

(2) 底面  $z_N = h_N$  (第  $N$  层土体的下表面), 只要把  $\sum h_n$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ) 取得足够大, 可认为  $z \rightarrow \infty$ , 根据 Saint-Venant 原理, 有

$$\left. \begin{aligned} \overline{u_{xN}}(\xi, h_N) &= 0, \\ \overline{u_{zN}}(\xi, h_N) &= 0, \\ \overline{\sigma_{zN}}(\xi, h_N) &= 0, \\ \overline{\tau_{zxN}}(\xi, h_N) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

(3) 层间完全接触条件为

$$\left\{ \begin{aligned} u_x(x, 0) \\ u_z(x, 0) \\ \sigma_z(x, 0) \\ \tau_{zx}(x, 0) \end{aligned} \right\}_n = \left\{ \begin{aligned} u_x(x, h_{n-1}) \\ u_z(x, h_{n-1}) \\ \sigma_z(x, h_{n-1}) \\ \tau_{zx}(x, h_{n-1}) \end{aligned} \right\}_{n-1} \quad (19)$$

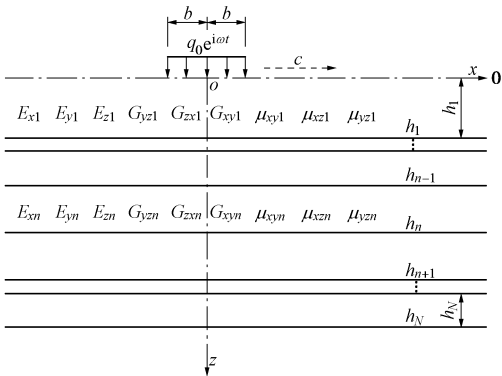


图 2 层状正交各向异性地基计算模型

Fig. 2 Computational model for multilayered orthotropic soils

对式 (19) 做 Fourier 变换得

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{u_x}(\xi, 0) \\ \overline{u_z}(\xi, 0) \\ \overline{\sigma_z}(\xi, 0) \\ \overline{\tau_{zx}}(\xi, 0) \end{aligned} \right\}_n = \left\{ \begin{aligned} \overline{u_x}(\xi, h_{n-1}) \\ \overline{u_z}(\xi, h_{n-1}) \\ \overline{\sigma_z}(\xi, h_{n-1}) \\ \overline{\tau_{zx}}(\xi, h_{n-1}) \end{aligned} \right\}_{n-1} \quad (20)$$

写成向量的形式为

$$\overline{\mathbf{R}}_n(\xi, 0) = \overline{\mathbf{R}}_{n-1}(\xi, h_{n-1}) \quad (21)$$

根据式 (9)、(21)，逐层传递即得底面和顶面之间的传递表达式：

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{R}}_1(\xi, h_1) &= \mathbf{T}_1(h_1) \overline{\mathbf{R}}_1(\xi, 0), \\ &\vdots \\ \overline{\mathbf{R}}_N(\xi, h_N) &= \mathbf{T}_N(h_N) \cdots \mathbf{T}_2(h_2) \mathbf{T}_1(h_1) \overline{\mathbf{R}}_1(\xi, 0). \end{aligned}$$

则有最终结果

$$\overline{\mathbf{R}}_N(\xi, h_N) = \mathbf{\Pi} \overline{\mathbf{R}}_1(\xi, 0) \quad (22)$$

其中， $\mathbf{\Pi} = \prod_{n=1}^N \mathbf{T}_n(h_n)$ ，为层状地基的传递矩阵。

把式 (18) 代入式 (22) 的第一第二式得

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{u_{x1}}(\xi, 0) \\ \overline{u_{z1}}(\xi, 0) \end{aligned} \right\} = - \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Pi_{13} & \Pi_{14} \\ \Pi_{23} & \Pi_{24} \end{bmatrix} \left\{ \begin{aligned} \overline{\sigma_{z1}}(\xi, 0) \\ \overline{\tau_{zx1}}(\xi, 0) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

把式 (17) 代入式 (23) 得到状态方程通解式 (9) 中的初始状态向量  $\overline{\mathbf{R}}_1(\xi, 0)$  中位移分量。

$$\overline{u_{x1}}(\xi, 0) = \frac{2q_0}{\xi} \sin(\xi b) \cdot \frac{\Pi_{13}\Pi_{22} - \Pi_{12}\Pi_{23}}{\Pi_{11}\Pi_{22} - \Pi_{12}\Pi_{21}} \quad (24a)$$

$$\overline{u_{z1}}(\xi, 0) = \frac{2q_0}{\xi} \sin(\xi b) \cdot \frac{\Pi_{11}\Pi_{23} - \Pi_{13}\Pi_{21}}{\Pi_{11}\Pi_{22} - \Pi_{12}\Pi_{21}} \quad (24b)$$

对式 (24) 进行 Fourier 逆变换，即可得到地基表面位移解析表达式：

$$u_{x1}(x, 0) = \frac{q_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi b)}{\xi} \cdot \frac{\Pi_{13}\Pi_{22} - \Pi_{12}\Pi_{23}}{\Pi_{11}\Pi_{22} - \Pi_{12}\Pi_{21}} e^{i\xi x} d\xi \quad (25a)$$

$$u_{z1}(x, 0) = \frac{q_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi b)}{\xi} \cdot \frac{\Pi_{11}\Pi_{23} - \Pi_{13}\Pi_{21}}{\Pi_{11}\Pi_{22} - \Pi_{12}\Pi_{21}} e^{i\xi x} d\xi \quad (25b)$$

按式 (22) 的推导过程，可得出任意深度的应力应变的状态向量：

$$\overline{\mathbf{R}}_n(\xi, z) = \mathbf{\Pi}_n(z) \overline{\mathbf{R}}_1(\xi, 0) \quad (26)$$

式中， $\mathbf{\Pi}_n(z) = \mathbf{T}_n(z) \prod_{j=1}^{n-1} \mathbf{T}_j(h_j)$ 。

把初值  $\overline{\mathbf{R}}_1(\xi, 0)$  代入式 (26)，再进行 Fourier 逆变换，即可得到任意深度处位移和应力解析表达式。

### 3 算例分析

#### 3.1 结果验证

为验证方法及数值结果的正确性，把地基简化为单层地基，根据本文原理和 Fourier 变换理论<sup>[14]</sup>进行数值计算，采用文献[15]的材料参数，并与文献[15]计算结果进行比较，如图 3 所示。

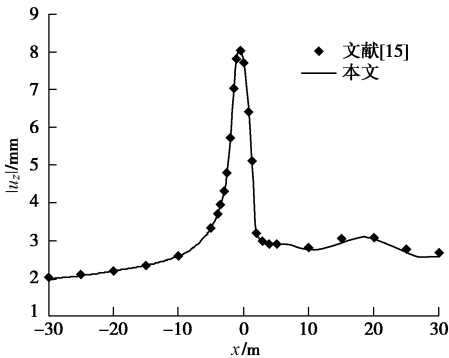


图 3 单层正交各向异性地基计算结果比较

Fig. 3 Comparison of calculated results of single-layer orthotropic soils

从图 3 可以看出，单层土体表面竖向位移计算结果与文献[15]基本一致，验证了计算方法的正确性。

#### 3.2 土的成层特性对竖向位移的影响

以三层地基为例，考虑正交各向异性地基的分层特性对表面竖向位移的影响，建立如图 2 所示的计算模型。取每层的参数之间的关系为  $E_{xn} : E_{yn} : E_{zn} = 1 : 1.2 : 0.8$ ， $G_{yzn} : G_{zxn} : G_{xyn} = 1 : 1.2 : 0.8$ ， $\mu_{xyn} : \mu_{xzn} : \mu_{yzn} = 1 : 1.2 : 1.6$ ， $\mu_{xy1} = \mu_{xy2} = \mu_{xy3} = 0.25$ ，

$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1800 \text{ kg/m}^3$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0.025$ 。1 层厚 1 m, 2 层厚 5 m, 3 层厚度无限大。其他参数见表 1 和表 2。地基的弹性常数  $c_{11} \sim c_{55}$  和工程常数  $E_i, \mu_{ij}, G_{ij}$  之间的关系见文献[16]。

表 1 土体参数

Table 1 Soil parameters (MPa)

工况	1层		2层		3层	
	$E_{x1}$	$G_{yz1}$	$E_{x2}$	$G_{yz2}$	$E_{x3}$	$G_{yz3}$
工况1	50	20	50	20	50	20
工况2	50	20	100	40	25	10
工况3	50	20	25	10	100	40
工况4	100	40	50	20	25	10
工况5	25	10	50	20	100	40
工况6	100	40	25	10	50	20
工况7	25	10	100	40	50	20

表 2 荷载参数

Table 2 Loading parameters

参数	$b/\text{m}$	$q_0/\text{kPa}$	$c/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$f/\text{Hz}$
数值	2	100	35	8

表 3 表面竖向位移模值

Table 3 Amplitudes of vertical displacement of soil surface (mm)

$x/\text{m}$	工况1	工况2	工况3	工况4	工况5	工况6	工况7
-30	1.7688	1.7463	1.7832	1.0721	2.9333	1.0731	2.9299
-10	2.4992	2.4731	2.5239	1.4967	4.0679	1.4983	4.0718
-2	5.7027	5.6452	5.7597	3.4463	9.1942	3.4490	9.1911
-0.5	7.9714	7.8905	8.0514	4.6824	12.2940	4.6883	12.2910
0	7.6633	7.5860	7.7410	4.6639	10.3840	4.6694	10.3880
2	3.1102	3.0812	3.1407	2.8824	1.8528	2.8845	1.8429
10	2.3679	2.3456	2.3870	1.6196	1.5396	1.6123	1.5371
30	1.6797	1.6678	1.6934	1.4188	0.2558	1.3402	0.2532

图 4~6 分别给出了改变下层和上层土体参数时土体表面竖向位移曲线, 数值的变化详见表 3。从图 4 可以看出, 下层土体的弹性模量和剪切模量的变化, 对表面竖向位移幅值影响很小; 尽管第 3 层土体模量有变化, 但数值随第 2 层土体模量的增大而减小。从图 5, 6 可以看出, 尽管第 2 层或第 3 层的土体参数有变化, 但随第 1 层土体的弹性模量和剪切模量的增大, 表面竖向位移幅值曲线关于荷载中心点的不对称性明显减弱, 位移幅值最大值减小且出现的位置离荷载中心点越近; 和工况 1 相比, 工况 4 的表面竖向位移幅最大值减小 41.3%, 工况 5 的表面竖向位移幅最大值增大 65.9%。

从图 4~6 和表 3 可以看出, 土体参数改变时, 正交各向异性土体表面竖向位移发生变化, 并且第 1 层

土体的影响明显大于其他下层土的。计算时忽略土体的分层特性, 特别是第 1 层土的分层特性是不精确的, 而应当考虑正交各向异性土体的分层特性。

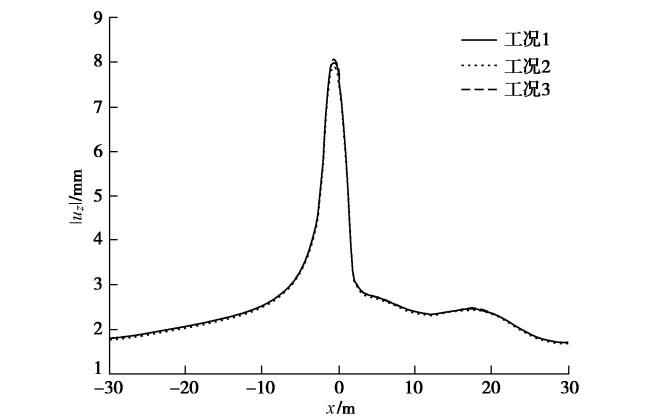


图 4 改变第 2 和 3 层土体参数时地基的表面竖向位移幅值曲线  
Fig. 4 Amplitude curves of vertical displacement of soil surface for different parameters of second- and third-layer of soils

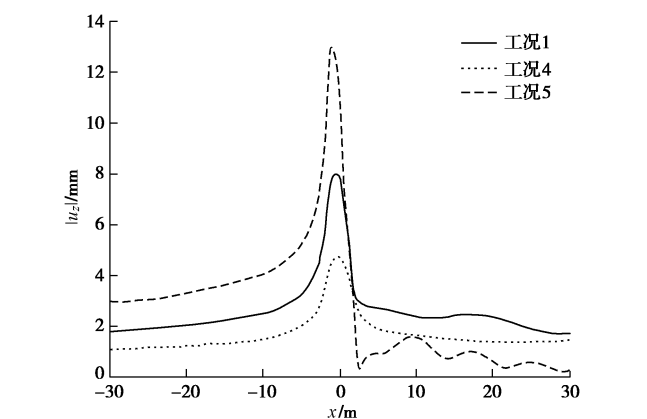


图 5 改变第 1 和 3 层土体参数时地基的表面竖向位移幅值曲线  
Fig. 5 Amplitude curves of vertical displacement of soil surface for different parameters of first- and third-layer of soils

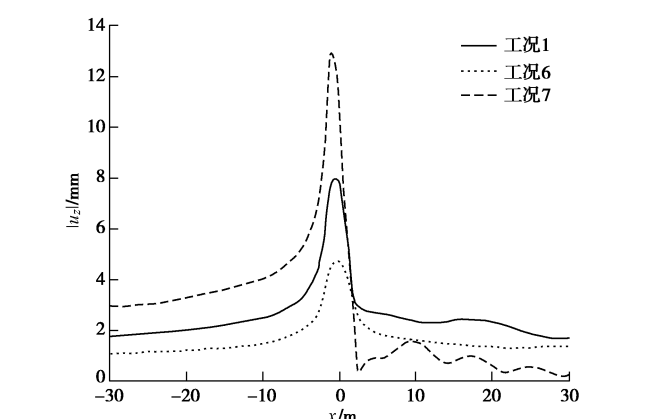


图 6 改变第 1 和 2 层土体参数时地基的表面竖向位移幅值曲线  
Fig. 6 Amplitude curves of vertical displacement of soil surface for different parameters of first- and second-layer of soils

图 7 给出了不同荷载振动频率时土体表面竖向位移幅值曲线。从图 7 可以看出, 土体表面竖向位移幅

值随频率的增大而减小,且幅值递减曲线出现明显波动;除 $f=8\text{ Hz}$ 外的荷载作用范围右侧的数值均小于左侧的数值;特别当 $f=32, 48\text{ Hz}$ 时,在荷载作用范围内出现多个极值,作用荷载范围以外的土体表面竖向位移响应很小。

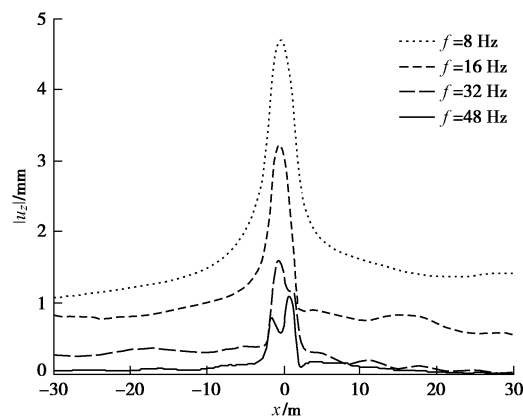


图7 不同荷载振动频率时地基的表面竖向位移幅值曲线

Fig. 7 Amplitude curves of vertical displacement of soil surface for different loading frequencies

### 3.3 土的正交各向异性性质对竖向位移的影响

以三层地基为例进行分析,考虑上层土体的正交各向异性性质对表面竖向位移的影响。最上层土体的参数为 $E_{x1}=100\text{ MPa}$ ,  $G_{yz1}=40\text{ MPa}$ ,  $\rho_1=1800\text{ kg/m}^3$ ,  $\eta_1=0.025$ ,  $\mu_{xy1}=0.25$ ,  $G_{yz1}:G_{zx1}:G_{xy1}=1:1.2:0.8$ ,  $\mu_{xy1}:\mu_{xz1}:\mu_{yz1}=1:1.2:1.6$ , 令 $E_{y1}=k_1E_{x1}$ 和 $E_{z1}=k_2E_{x1}$ , 调节 $k_1$ 和 $k_2$ 即改变上层土体的 $E_{y1}$ 和 $E_{z1}$ ; 2层和3层参数及土层厚度同工况4。

工况8中的第1层土体为各向同性土体,取 $E_1=100\text{ MPa}$ ,  $\mu_1=0.25$ ,  $\rho_1=1800\text{ kg/m}^3$ ,  $\eta_1=0.025$ , 2层和3层参数及土层厚度同工况4。

图8为 $k_2=0.8$ 时仅改变 $k_1$ 的地基表面竖向位移幅值的变化曲线,图9为 $k_1=1.2$ 时仅改变 $k_2$ 的地基表面竖向位移幅值图,图8,9中的 $2\text{ m}\leq|x|\leq 10\text{ m}$ 范围内,工况8的曲线有微弱锯齿形震荡。从图8可以看出随着 $k_1$ 即 $E_{y1}$ 的增加,表面竖向位移幅值反而增大;第1层土为各向同性时的幅值最大值仅大于 $k_1=0.5$ 的; $E_{y1}$ 从 $120\text{ MPa}$ 减小到 $50\text{ MPa}$ 时竖向位移最大值减小 $10.83\%$ ,从 $120\text{ MPa}$ 增加到 $200\text{ MPa}$ 时竖向位移最大值增加 $2.56\%$ 。图9可以看出随着 $k_2$ 即 $E_{z1}$ 的增加,地基表面竖向位移明显减小;第1层土为各向同性时的竖向位移幅值最大值仅小于 $k_2=0.8$ 的; $E_{z1}$ 从 $150\text{ MPa}$ 减小到 $80\text{ MPa}$ 时竖向位移最大值增加 $73.12\%$ ,从 $150\text{ MPa}$ 增加到 $200\text{ MPa}$ 时竖向位移最大值减小 $28.92\%$ 。图8,9均表明,上层土体的正交各向异性参数对竖向位移幅值影响很大,影响规律和单层地基基本相同<sup>[15]</sup>。显然,对于正交各向异性的上层

土体,采用各向同性介质的动力学模型,不能准确描述地基的动力特性。

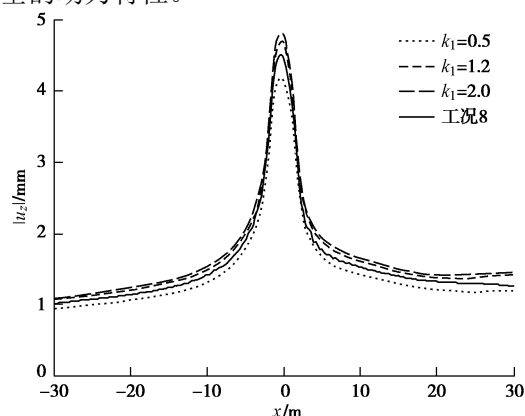


图8 上层土体不同 $E_y$ 时表面竖向位移幅值

Fig. 8 Amplitude curves of vertical displacement of soil surface for different  $E_y$  of first-layer of soils

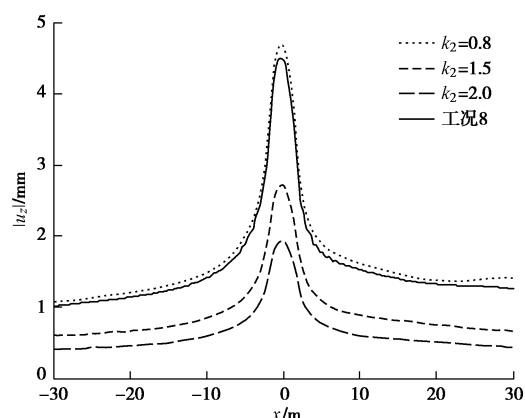


图9 上层土体不同 $E_z$ 时表面竖向位移幅值

Fig. 9 Amplitude curves of vertical displacement of soil surface for different  $E_z$  of first-layer of soils

## 4 结 语

本文利用传递矩阵方法,结合层间接触条件和连续条件,推导直角坐标系下正交各向异性层状地基平面应变问题动力响应解,并进行了方法验证和算例分析。数值分析结果表明:①上层土体参数对土体表面竖向位移幅值影响明显大于下层土,计算时忽略土体的分层特性,特别是上层土的分层特性是不精确的;②作用荷载振动频率越大,土体表面竖向位移幅值越小;③上层土体的正交各向异性参数对竖向位移幅值影响很大,忽略上层土体的各向异性,不能准确描述地基的动力特性。因此在工程中考考虑土体的分层及正交各向异性具有一定的实际意义。

## 参考文献:

- [1] GRUNDMANN H, LIEB M, TROMMER E. The response of a layered half-space to traffic loads moving along its surface[J].

- Archive of Applied Mechanics, 1999, **69**(1): 55 - 67.
- [2] 钟 阳, 孙 林, 黄永根. 轴对称半空间层状弹性体系动态反应的理论解[J]. 中国公路学报, 1998, **11**(2): 24 - 29. (ZHONG Yang, SUN Lin, HUANG Yong-gen. The explicit solution of axisymmetric elastodynamic problem for multilayered halfspace[J]. China Journal of Highway and Transport, 1998, **11**(2): 24 - 29. (in Chinese))
- [3] 王有凯, 龚耀清. 任意荷载作用下层状横观各向同性弹性地基的直角坐标解[J]. 工程力学, 2006, **23**(5): 9 - 13. (WANG You-kai, GONG Yao-qing. Analytical solution of transversely isotropic elastic multilayered subgrade under arbitrary loading in rectangular coordinates[J]. Engineering Mechanics, 2006, **23**(5): 9 - 13. (in Chinese))
- [4] 艾智勇, 李 博. 横观各向同性层状地基平面应变问题的解析层元解[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(10): 1787 - 1791. (AI Zhi-yong, LI Bo. Analytical layer element solutions to plane strain problem of transversely isotropic multilayered soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(10): 1787 - 1791. (in Chinese))
- [5] AI Z Y, ZHANG Y F. Plane strain dynamic response of a transversely isotropic multilayered half-plane[J]. Soil Dynamics & Earthquake Engineering, 2015, **75**: 211 - 219.
- [6] AI Z Y, REN G P. Dynamic analysis of a transversely isotropic multilayered half-plane subjected to a moving load[J]. Soil Dynamics & Earthquake Engineering, 2016, **83**: 162 - 166.
- [7] 邓学钧, 黄晓明, 沈伟新. 弹性层状体系的动力响应分析[J]. 土木工程学报, 1995, **28**(3): 9 - 16. (DENG Xue-jun, HUANG Xiao-ming, SHEN Wei-xin. Dynamic response analysis of elastic multi-layered system[J]. China Civil Engineering Journal, 1995, **28**(3): 9 - 16. (in Chinese))
- [8] RUNESSON K, BOOKER J R. Finite element analysis of elastic-plastic layered soil using discrete Fourier series expansion[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1983, **19**(4): 473 - 478.
- [9] LU Z, YAO H L, WU W P, CHENG P. Dynamic stress and deformation of a layered road structure under vehicle traffic loads: experimental measurements and numerical calculations[J]. Soil Dynamics & Earthquake Engineering, 2012, **39**: 100 - 112.
- [10] 王新宽. 路基土体力学响应影响因素研究[J]. 内蒙古公路与运输, 2016(3): 25 - 27. (WANG Xin-kuan. Study on the influence factors of mechanical response of subgrade soil[J]. Highways & Transportation in Inner Mongolia, 2016(3): 25 - 27. (in Chinese))
- [11] JIN H L, KIM J K, TASSOULAS J L. Dynamic analysis of a layered half-space subjected to moving line loads[J]. Soil Dynamics & Earthquake Engineering, 2013, **47**: 16 - 31.
- [12] 方保镭, 周继东, 李医民. 矩阵论[M]. 北京:清华大学出版社, 2013. (FANG Bao-rong, ZHOU Ji-dong, LI Yi-min. Matrix theory[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2013. (in Chinese))
- [13] WANG Zheng-sheng. Introduction to matrix theory[M]. Beijing: Science Press, 2015.
- [14] BRIGHAM E O. The fast Fourier transform[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1974.
- [15] 张春丽, 祝彦知, 王 博. 正交各向异性地基平面问题动力响应研究[J]. 力学季刊, 2016, **37**(4): 648 - 657. (ZHANG Chun-li, ZHU Yan-zhi, WANG Bo. Research on two-dimensional dynamic response of orthotropic medium[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2016, **37**(4): 648 - 657. (in Chinese))
- [16] 张晓霞, 周柏卓. 正交各向异性材料弹性本构关系分析[J]. 航空发动机, 1997, **23**(1): 20 - 25. (ZHANG Xiao-xia, ZHOU Bo-zhuo. Orthogonal anisotropic elastic constitutive relation analysis[J]. Aeroengine, 1997, **23**(1): 20 - 25. (in Chinese))