

DOI: 10.11779/CJGE201812011

# 地埋梁与横观各向同性层状地基相互作用的广义 Vesic 解答

王 雨, 陈文化\*

(北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044)

**摘要:** 根据横观各向同性弹性理论和传递矩阵法, 考虑梁底埋深、地基的横观各向同性及成层性, 推导得到基床系数的广义 Vesic 解答。数值算例验证了基床系数取值方法的合理性和准确性, 分析了各个参数变化对基床系数取值的影响。结果表明, 基床系数  $k$  随梁底埋深  $h$  的增加而不断增大至最大值, 约为地表时的 2.05~2.25 倍;  $k$  随着地基总厚  $H$  的增大而减小, 而随横观各向同性参数  $r$  的增大而增大; 当  $h$  为 0 或  $H$  超过  $100b$  或  $r$  为 1 时, 本文解退化为 Vesic 解; 土层加权平均弹性模量相同且首层土体越硬时,  $k$  值越大, 且广义 Vesic 解用于有限长梁分析时的计算误差越小。

**关键词:** 基床系数; 横观各向同性; 层状地基; 地埋梁; 广义 Vesic 解

中图分类号: TU470 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2018)12-2241-08

作者简介: 王 雨(1989-), 男, 山东德州人, 博士研究生, 主要从事结构与土体相互作用的研究工作。E-mail: wangyu198909@163.com。

## Generalized Vesic solutions for interaction of buried beams and transversely isotropic layered soils

WANG Yu, CHEN Wen-hua

(School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract:** According to the transversely isotropic elasticity theory and the transfer matrix method, the generalized Vesic solutions for the coefficient of subgrade reaction are obtained by considering the buried depth of beams and the transverse isotropy and layered properties of soils. The rationality and accuracy of the proposed method are validated by numerical examples, and the influences of variation of some parameters on the coefficient of subgrade reaction are analyzed. The results show that the coefficient of subgrade reaction  $k$  increases with the increase of the buried depth  $h$  to the maximum value, about 2.05~2.25 times the surface. It decreases with the increase of total soil thickness  $H$  and increases with the increase of the transversely isotropic parameter  $r$ . When  $h$  is 0 or  $H$  exceeds  $100b$  or  $r$  is 1, the proposed solutions are degenerated to the Vesic solution. In the condition that the weighted-average elastic moduli of soils are the same, the harder the top soil layer is, the larger  $k$  is, and the smaller the deviation is when the generalized Vesic solution is used to analyze the finite beams.

**Key words:** coefficient of subgrade reaction; transverse isotropy; multi-layered soil; buried beam; generalized Vesic solution

## 0 引言

地下、交通及建筑等工程中普遍采用经典的 Winkler 地基理论进行地下结构受荷变形分析, 其中基床系数是用于表征结构与土体相互作用的关键参数, 土体的横观各向同性、成层性及空间非均质性均会对基床系数产生重要影响, 而结构的形式(梁、板、壳)和埋深等因素也会导致基床系数的取值发生变化。因此如何选取合适的基床系数, 从而较为准确地计算结构的变形与内力是至关重要的。

国内外学者对基床系数的取值问题做了相关理论研究, 见表 1。Biot<sup>[1]</sup>推导了 Winkler 地基近似法与弹

性理论准确法下, 置于均质半无限弹性地基表面的无限长梁受集中力作用时的位移与内力解答, 并通过两者最大弯矩对比得到基床系数  $k_0$ 。Terzaghi<sup>[2]</sup>给出了置于砂土或黏土表面且全宽为 0.3 m 的梁的基准基床系数, 并根据实际梁宽来修正得到实际基床系数。Vesic<sup>[3]</sup>改进了 Biot 的研究方法, 通过对两种方法所得梁的位移、接触压力、转角、弯矩及剪力的整体分布进行控

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2016YJS115); 国家自然科学基金项目(51178035)

收稿日期: 2017-08-14

\*通讯作者(E-mail: whchen@bjtu.edu.cn)

制，并通过特征系数互等得到基床系数  $k_\infty$ 。俞剑等<sup>[4]</sup>通过对均质半无限弹性地基中有一定埋深的梁被动受荷变形问题进行分析，求得地埋管线被动受荷时的基床系数  $k_h$ 。Daloglu 等<sup>[5]</sup>通过对均质有限压缩弹性地基上板的基床系数  $k$  的取值进行研究后，指出  $k$  的取值不是常数，其值不仅与空间位置坐标有关，且与土层总厚取值相关。Sheldon 等<sup>[6]</sup>通过实验对地埋带接头管道的受荷位移进行分析，评估了 Biot、Terzaghi 及 Vesic 3 种方法所得基床系数  $k_{\text{method}}$  的适用性，并提出针对刚性管道和柔性管道的修正基床系数  $k_{\text{rigid}}$  与  $k_{\text{flexible}}$ 。

表 1 基床系数表达式相关研究汇总

Table 1 Research summary of common expressions for coefficient of subgrade reaction

研究者	结构形式	基床系数表达式
Biot (1937 年)		$k_\infty = \frac{0.615E}{C(1-\mu^2)b} \left[ \frac{1}{C(1-\mu^2)} \frac{Eb^4}{E_b I_b} \right]^{0.11}$
Terzaghi (1955 年)	梁	$k = k_l \left( \frac{B+1}{2B} \right)^2$
Vesic (1961 年)		$k_\infty = \frac{0.65E}{(1-\mu^2)B} \left( \frac{EB^4}{E_b I_b} \right)^{0.083}$
Daloglu (2000 年)	板	$k = K_{\text{nw}} \frac{E}{HB'}$
俞剑 (2012 年)	地埋管道	$k_h = \frac{3.08}{\eta_h} \frac{E}{(1-\mu^2)B} \left( \frac{EB^4}{E_b I_b} \right)^{0.125}$
Sheldon (2016 年)		$k_{\text{rigid}} = 2k_{\text{method}}, \quad k_{\text{flexible}} = 1.4k_{\text{method}}$

注：  $E$ ，  $\mu$  分别为土体弹性模量与泊松比；  $B$ ，  $b$ ，  $E_b I_b$  为梁的全宽、半宽及抗弯刚度；系数  $C$  的取值为 1~1.13，一般取  $C=1.1$ ；  $k_l$  为全宽 0.3 m 的梁的基床系数；  $B'$  为板的全宽；  $H$  为土层厚度；  $K_{\text{nw}}$  为归一化基床系数，其取值与土体弹性模量、土体厚度及板抗弯刚度有关；  $\eta_h$  为埋深影响系数，当  $h/B \leq 0.5$  时，  $\eta_h = 2.18$ ，当  $h/B > 0.5$  时，  $\eta_h = 1 + 1/(1.7h/B)$ 。

现有基床系数的相关理论研究均局限于均质各向同性弹性地基，而天然地基多呈现出横观各向同性和成层性。因此，对于复杂环境条件下基床系数  $k$  如何合理取值的问题，有必要做进一步深入研究。关于结构与横观各向同性层状地基相互作用问题是近些年研究热点。艾智勇等<sup>[7]</sup>采用传递矩阵法得到刚性条形基础与横观各向同性层状地基相互作用的解答，并分析了地基的横观各向同性及成层性对该解答的影响。

Liang 等<sup>[8]</sup>根据横向各向同性地基中水平受荷嵌岩钻孔桩的三维有限元分析结果，提出利用横观各向同性岩体的 5 个弹性常数来计算具有高度各向异性的岩石介质的基床系数。王春玲等<sup>[9]</sup>利用传递矩阵法和三角级数法，得到横观各向同性层状地基上四边自由各向

异性矩形薄板的弯曲解析解。AI 等<sup>[10]</sup>结合解析层元法和边界元法，建立了横观各向同性层状地基中水平受荷群桩的力学反应算法。韩泽军等<sup>[11-12]</sup>针对基础与横观各向同性层状地基动力相互作用问题，提出了地基位移格林函数和基础动力刚度矩阵的数值算法。

本文根据横观各向同性弹性理论、传递矩阵法及梁土变形协调条件，提出更为准确且实用的基床系数的广义 Vesic 解答。主要分析解决如下 4 个问题：①建立埋置于横观各向同性层状地基中梁的受荷变形计算方法。②通过对归一化 Vesic 解答与广义 Vesic 解答进行比较，得到基床系数的修正图表，以此来解决各种参数变化下基床系数的取值问题。③如何考虑梁底埋深、地基的横观各向同性及成层性对基床系数取值的影响。④通过与边界元法的对比，验证本文基床系数取值方法的合理性和准确性。

## 1 地埋梁变形的 Winkler 模型解

Winkler 地基无限长梁上作用集中荷载  $P$  时的变形微分方程表示为

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + 4\alpha^4 w(x) = \frac{P\delta(x)}{E_b I_b}, \quad (1)$$

式中，  $w(x)$  为梁的竖向位移，  $E_b I_b$  同表 1，  $\alpha$  为特征系数，  $\alpha = [kB/(4E_b I_b)]^{1/4}$ ，  $k$  为基床系数，  $\delta(x)$  为单位脉冲函数。

对式 (1) 作如下一维 Fourier 变换：

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}(\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\zeta x} dx, \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\zeta) e^{-i\zeta x} d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

结合式 (1)、(2) 可得变换域内的位移  $\bar{w}(\zeta)$ ：

$$\bar{w}(\zeta) = \frac{P}{\sqrt{2\pi} kB} \left( \frac{4\alpha^4}{\zeta^4 + 4\alpha^4} \right). \quad (3)$$

式 (3) 经 Fourier 逆变换，并根据位移与弯矩之间的微分关系，就得到如下归一化位移和归一化弯矩的解答：

$$\left. \begin{aligned} \frac{kBw(x)}{P\alpha} &= \frac{1}{2} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x), \\ \frac{\alpha M(x)}{P} &= \frac{1}{4} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

## 2 地埋梁变形的弹性理论解

本节借鉴并扩展应用 Biot<sup>[1]</sup>针对置于均质半无限弹性体表面的无限长梁在集中荷载作用下的变形与内力推导方法，并考虑了梁底埋深、地基的横观各向同性及成层性的影响。主要推导思路如下：①采用传递

矩阵法求得梁底平面处土体受任意双简谐荷载  $q(x, y)$  作用下的变形; ②将  $q(x, y)$  的  $y$  向分布力  $q(y)$  限制于梁宽范围  $[-b, b]$  并对其求平均值, 得到单简谐荷载  $q_1(x, y)$ , 从而将地基梁的变形求解问题由空间简化到平面; ③根据梁土之间的变形协调条件以及单简谐荷载  $q(x)$  与集中荷载  $P$  之间的 Fourier 积分转化式, 最终推得埋置于横观各向同性层状地基中的梁受集中荷载作用时的变形与内力。

## 2.1 双简谐荷载下梁底平面土体变形

如图 1 所示, 分析梁底平面土体受如下双简谐荷载作用时的变形:

$$q(x, y) = q_0 \cos \kappa x \cos \omega y \quad \text{。} \quad (5)$$

不计体力时, 直角坐标系下空间静力平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

位移所表示的物理方程为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= C_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{13} \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \sigma_y &= C_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{11} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{13} \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \sigma_z &= C_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{33} \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \tau_{yz} &= C_{44} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \tau_{xz} &= C_{44} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \tau_{xy} &= C_{66} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中,  $C_{11} = r(1 - r\mu_{vh}^2)a$ ,  $C_{12} = r(\mu_{hh} + r\mu_{vh}^2)a$ ,  $C_{13} = r(1 + \mu_{hh})\mu_{vh}a$ ,  $C_{33} = (1 - \mu_{hh}^2)a$ ,  $C_{44} = G_v$ ,  $C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2$ ,  $a = E_v / [(1 + \mu_{hh})(1 - \mu_{hh} - 2r\mu_{vh}^2)]$ ,  $r = E_h/E_v$ ,  $E_h$ ,  $E_v$  为水平向和竖直向弹性模量,  $\mu_{hh}$  和  $\mu_{vh}$  分别为水平面和竖直面的泊松比,  $G_v$  为竖直面的剪切模量。

式 (6)、(7) 经整理并化简<sup>[13]</sup>得如下偏微分方程组:

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{R}(x, y, z) = \mathbf{P}(x, y) \mathbf{R}(x, y, z) \quad , \quad (8)$$

式中,  $\mathbf{R}(x, y, z) = \{uv(x, y, z), w(x, y, z), \tau(x, y, z), \sigma_z(x, y, z)\}^T$ ,  $uv = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y$ ,  $\tau = \partial \tau_{xz} / \partial x + \partial \tau_{yz} / \partial y$

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{R}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & -\nabla^2 & a_4 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & a_3 \\ a_2 \nabla^2 & 0 & 0 & a_1 \nabla^2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad a_1 = -C_{13} / C_{33}, \quad a_2 = (C_{13}^2 - C_{11}C_{33}) / C_{33}, \quad a_3 = 1 / C_{33}, \quad a_4 = 1 / C_{44}.$$

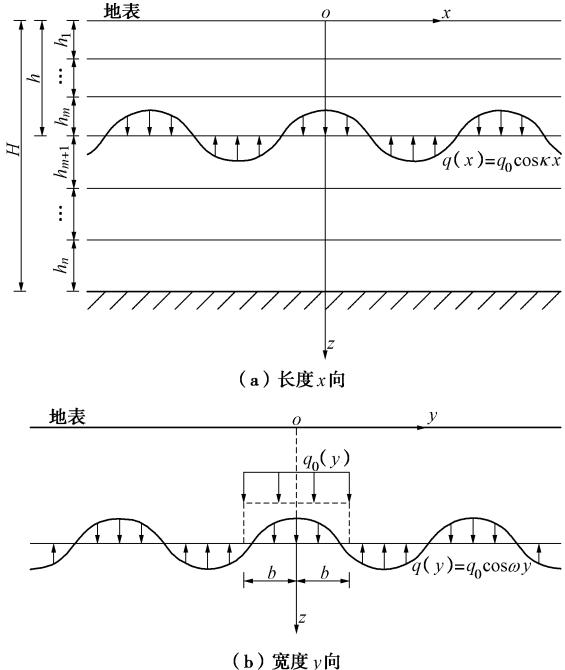


图 1 地基内部简谐荷载

Fig. 1 Sine-wave loads beneath ground surface

文中公式推导与数值计算均在 Mathematica 软件下进行, 对状态向量  $\mathbf{R}(x, y, z)$  及矩阵  $\mathbf{P}(x, y)$  作如下二维 Fourier 变换:

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}(\xi_x, \xi_y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{i(\xi_x x + \xi_y y)} dx dy, \\ f(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\xi_x, \xi_y) e^{-i(\xi_x x + \xi_y y)} d\xi_x d\xi_y. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式 (8) 经过二维 Fourier 变换, 可得如下常微分方程组:

$$\frac{d}{dz} \bar{\mathbf{R}}(\xi, z) = \mathbf{Q}(\xi) \bar{\mathbf{R}}(\xi, z) \quad , \quad (10)$$

式中,  $\bar{\mathbf{R}}(\xi, z) = \{\bar{u}\bar{v}(\xi, z), \bar{w}(\xi, z), \bar{\tau}(\xi, z), \bar{\sigma}_z(\xi, z)\}^T$ ,

$$\mathbf{Q}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & \xi^2 & a_4 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & a_3 \\ -a_2 \xi^2 & 0 & 0 & -a_1 \xi^2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \xi = \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}.$$

根据 Cayley-Hamilton 定理和矩阵  $\mathbf{Q}(\xi)$  特征值可求得状态向量  $\bar{\mathbf{R}}(\xi, z)$  的初始函数解答为

$$\bar{\mathbf{R}}(\xi, z) = \mathbf{S}(\xi, z) \bar{\mathbf{R}}(\xi, 0) \quad , \quad (11)$$

式中,  $\mathbf{S}(\xi, z)$  为  $4 \times 4$  传递矩阵, 其各元素见附录。

结合图 1 分析可知, 地埋梁变形求解所需边界条件在 Fourier 变换域内可表示如下:

(1) 地基表面自由位移

$$\bar{\tau}(\xi, 0) = \bar{\sigma}_z(\xi, 0) = 0 \quad ; \quad (12)$$

(2)  $q(x, y)$  作用接触面

$$\bar{R}(\xi, h^+) = \bar{R}(\xi, h^-) + \bar{F}(\xi, h^+) \quad , \quad (13)$$

式中,  $\bar{F}(\xi, h^+) = \{0, 0, 0, -\bar{q}(\xi_x, \xi_y, h^+)\}^\top$ ;

(3) 层间为完全弹性接触

$$\bar{R}(\xi, H_i^+) = \bar{R}(\xi, H_i^-), i \neq m, H_i = \sum_{j=1}^i h_j \quad ; \quad (14)$$

(4) 地基底面固定位移

$$\bar{w}(\xi, H) = \bar{w}(\xi, h) = 0 \quad . \quad (15)$$

结合式(13)、(14), 地基表面、 $q(x, y)$  作用面及地基底面的状态向量可通过传递矩阵建立如下关系:

$$\bar{R}(\xi, h^-) = \mathbf{T}^{(1)} \bar{R}(\xi, 0) \quad , \quad (16)$$

$$\bar{R}(\xi, H) = \mathbf{T} \bar{R}(\xi, 0) + \mathbf{T}^{(2)} \bar{F}(\xi, h^+) \quad , \quad (17)$$

式中,  $\mathbf{T}^{(1)} = \mathbf{S}_m \mathbf{S}_{m-1} \cdots \mathbf{S}_1$ ,  $\mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n-1} \cdots \mathbf{S}_{m+1}$ ,  $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{(2)} \mathbf{T}^{(1)}$ ,  $\mathbf{S}_i = \mathbf{S}(\xi, h_i)$ 。

由式(12)、(15)、(16)、(17)可以得到  $\bar{q}(\xi_x, \xi_y, h^+)$  作用面处的土体竖向位移  $\bar{w}(\xi_x, \xi_y)$ :

$$\bar{w}(\xi_x, \xi_y) = \frac{T_{24}^{(2)}(T_{11}T_{22}^{(1)} - T_{12}T_{21}^{(1)}) + T_{14}^{(2)}(T_{22}T_{21}^{(1)} - T_{21}T_{22}^{(1)})}{T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}}.$$

$$\bar{q}(\xi_x, \xi_y, h^+) \quad . \quad (18)$$

为方便后续推导和简化最终解答, 假定各土层泊松比  $\mu_{vi} = \mu_{hi} = \mu = 0.3$ , 并对其弹性模量  $E_{vi}$  ( $E_{hi}$ ) 和厚度  $h_i$  按比例系数替换:

$$\left. \begin{aligned} E_{vi} &= g_{vi} E, \quad E_{hi} = g_{hi} E, \\ h_i &= g_{bi} b. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中,  $E = \min\{E_{vi}\}$ , 比例系数  $g_{vi} \geq 1$ ,  $g_{hi}(g_{bi}) > 0$ 。

式(18)经 Fourier 逆变换并结合式(19), 可得双简谐荷载  $q(x, y)$  作用下的地中土体位移  $w(x, y)$ :

$$w(x, y) = \frac{b(1-\mu^2)}{E} f(\eta, \gamma, \mu) q(x, y) \quad , \quad (20)$$

式中,  $f(\eta, \gamma, \mu)$  是仅包含变量  $\kappa$ ,  $\omega$  及参数  $b$ ,  $\mu$  的函数, 可由编程计算得到, 其中  $\gamma = b\kappa$ ,  $\eta = b\omega$ 。

## 2.2 单简谐荷载下梁底平面土体变形

图 1(b) 中表示了对双简谐荷载  $q(x, y)$  的  $y$  向分布力  $q(y)$  在区间  $[-b, b]$  内求其平均值, 从而得到梁宽范围内的单简谐荷载  $q_1(x, y)$ :

$$q_1(x, y) = q_0(y) \cos \kappa x \quad . \quad (21)$$

式(21)中的  $q_0(y)$  可通过对  $q(y)$  作如下 Fourier 积分转化得到:

$$q_0(y) = \frac{q_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega(y+b) - \sin \omega(y-b)}{\omega} d\omega \quad . \quad (22)$$

荷载  $q_1(x, y)$  作用下的地中土体变形可表示为

$$w_1(x, y) = w_0(y) \cos \kappa x \quad , \quad (23)$$

式中,  $w_0(y)$  表示沿  $y$  向梁宽范围内的土体位移。

结合式(20)、(21)、(23)可得

$$w_0(y) = \frac{b(1-\mu^2)}{E} f(\eta, \gamma, \mu) q_0(y) \quad . \quad (24)$$

结合图 1, 2 分析, 梁宽范围  $y \in [-b, b]$  内单简谐荷载的合力与相应的平均位移表示如下:

$$\left. \begin{aligned} Q(x) &= Q_{avg} \cos \kappa x = \left[ \int_{-b}^b q_0(y) dy \right] \cos \kappa x, \\ w(x) &= w_{avg} \cos \kappa x = \left[ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b w_0(y) dy \right] \cos \kappa x. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

由式(22)、(24)、(25)可得

$$Q(x) = w(x) \frac{E}{C(1-\mu^2)} \gamma \psi(\gamma) \quad , \quad (26)$$

式中,  $\psi(\gamma) = \pi / \left[ \gamma \int_0^\infty f(\eta, \gamma, \mu) \frac{\sin^2 \eta}{\eta^2} d\eta \right]$ , 参数  $C$  的取值范围为 [1, 1.13] (当荷载均布时,  $C$  取 1; 当位移均布时,  $C$  取 1.13), 这里采用 Vesic<sup>[3]</sup>建议值 1.1。

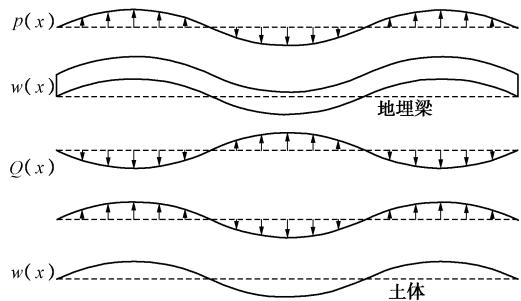


图 2 地埋梁与土体协调变形

Fig. 2 Compatibility of deformation between beams and soils

## 2.3 集中荷载下地埋梁变形与内力

地埋梁上作用单简谐荷载  $p(x)$  时的变形微分方程表示为

$$E_b I_b \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + Q(x) = p(x) \quad . \quad (27)$$

将式(26)代入式(27), 并结合单简谐荷载  $p(x)$  与集中荷载  $P$  之间的 Fourier 积分转化式以及弯矩  $M(x)$  与位移  $w(x)$  之间的微分关系就可得到  $P$  作用下梁的归一化位移和归一化弯矩的表达式:

$$\left. \begin{aligned} E_b I_b w(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\beta x/c)}{\beta [\beta^3 + \psi(b\beta/c)]} d\beta, \\ M(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\beta \cos(\beta x/c)}{\beta^3 + \psi(b\beta/c)} d\beta. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

式中,  $c = [C(1-\mu^2)E_b I_b / (Eb)]^{1/3}$ 。

## 3 基床系数的广义 Vesic 解答

Vesic<sup>[3]</sup>通过研究发现, 式(28)右端的积分可近

似写成与式(4)右端相同的函数形式, 而当弹性理论准确法的特征系数 $\alpha'$ 等于 Winkler 地基近似法的特征系数 $\alpha$ 时, 两者所得梁的位移、接触压力、转角、弯矩及剪力的整体分布均较为接近。 $\alpha'$ 可表示为

$$\alpha' = \frac{\pi}{4x_0} = \frac{\pi}{4v_a c} \left( \frac{c}{b} \right)^{v_b}, \quad (29)$$

式中,  $x_0$ 为弯矩第一零点, 系数 $v_a$ ,  $v_b$ 的取值与地基复杂特性及梁底埋深等相关, 由式(28)  $M(x)/(Pc)$ 中  $b/c$ 在区间[0.01, 1]内取值 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1.0 并拟合得到。

由 $\alpha=\alpha'$ 并经化简得

$$k = \frac{E}{B(1-\mu^2)} m \left( \frac{EB^4}{E_b I_b} \right)^n, \quad (30)$$

式中,  $m=1.3836/[16^n v_a^4]$ ,  $n=(1-4v_b)/3$ 。

对于横观各向同性层状地基中的地埋梁, 需考虑梁底埋深、地基的横观各向同性及成层性, 则归一化基床系数 $\hat{k}$ 一般表达式为

$$\hat{k} = \frac{kB(1-\mu^2)}{E} = m \left( \frac{EB^4}{E_b I_b} \right)^n. \quad (31)$$

对于置于均质各向同性半无限地基表面的梁, 式(31)退化为如下基床系数 $\hat{k}_\infty$ 表达式:

$$\hat{k}_\infty = \frac{k_\infty B(1-\mu^2)}{E} = m_\infty \left( \frac{EB^4}{E_b I_b} \right)^{n_\infty}. \quad (32)$$

式(32)即为 Vesic 解答, 式(31)为广义 Vesic 解答。表 2 给出了 Vesic 解与广义 Vesic 解的适用描述、表达式及相关修正系数, 其中符号 $\rho=EB^4/(E_b I_b)$ 。分别考察梁底埋深 $h$ 、地基总厚 $H$ 、横观各向同性参数 $r$ 及地基成层性对基床系数 $k$ 的影响, 如图 3 所示。

表 2 广义 Vesic 解及描述

Table 2 Generalized Vesic solutions and descriptions

基床系数	适用描述	表达式	修正系数
Vesic 解答	$\hat{k}_\infty$ 均质各向同性半无限 地基, 梁置于地表	$\hat{k}_\infty = m_\infty \rho^{n_\infty}$	—
	$\hat{k}_h$ 均质各向同性半无限 地基, 梁置于土中	$\hat{k}_h = m_h \rho^{n_h}$ $M_h = m_h / m_\infty$ $N_h = n_h / n_\infty$	
广义 Vesic 解答	$\hat{k}_H$ 均质各向同性有限 地基, 梁置于地表	$\hat{k}_H = m_H \rho^{n_H}$ $M_H = m_H / m_\infty$ $N_H = n_H / n_\infty$	
	$\hat{k}_r$ 横观各向同性半无限 地基, 梁置于地表	$\hat{k}_r = m_r \rho^{n_r}$ $M_r = m_r / m_\infty$ $N_r = n_r / n_\infty$	
$\hat{k}_s$	层状各向同性地基 梁置于地表	$\hat{k}_s = m_s \rho^{n_s}$ $M_s = m_s / m_\infty$ $N_s = n_s / n_\infty$	

考察均质半无限各向同性地基中, 梁底埋深 $h$ 对基床系数 $k_h$ 的影响(图 3(a))。随着 $h$ 的增大, 系数 $M_h$ 及 $k_h/k_\infty$ 逐渐增大,  $N_h$ 先增大后减小, 三者均当 $h/b=0$ 时为 1, 而当 $h/b \geq 100$ 时趋于稳定。这说明梁置于地表时, 本文解即为 Vesic 解, 而随着 $h$ 的增

加, 基床系数 $k_h$ 不断增大至最大值; 最大值与土梁刚度比 $\rho$ 相关, 约为地表时的 2.05~2.25 倍。

考察均质各向同性有限地基且梁置于地表时, 地基总厚 $H$ 对基床系数 $k_H$ 的影响(图 3(a))。随着 $H$ 的增大, 系数 $N_H$ 逐渐增大, 而 $M_H$ 及 $k_H/k_\infty$ 则逐渐减小, 三者均当 $H/b \geq 100$ 时趋于 1。说明当 $H/b \geq 100$ 时, 本文解即为 Vesic 解, 而当 $H/b < 100$ 时, 基床系数 $k_H$ 随 $H$ 的减小而不断增大, 且增幅与 $\rho$ 相关。

考察均质半无限横观各向同性地基且梁置于地表时, 横观各向同性参数 $r$ 对基床系数 $k_r$ 的影响(图 3(b))。系数 $M_r$ ,  $N_r$ 及 $k_r/k_\infty$ 均随参数 $r$ 的增大而逐渐增大。当 $r \leq 2$ 时,  $k_r/k_\infty$ 与土梁刚度比 $\rho$ 无关; 而当 $r > 2$ 时,  $k_r/k_\infty$ 随 $\rho$ 的增加而稍有增大。当 $r$ 取 1 时,  $M_r$ ,  $N_r$ 及 $k_r/k_\infty$ 均为 1, 本文解即退化为 Vesic 解。

考察 2 层各向同性地基( $h_1=h_2=10b$ )且梁置于地表时, 地基成层特性对基床系数 $k_s$ 的影响(图 3(c)、(d))。对于 2 层地基(上软下硬), 系数 $M_s$ 及 $k_s/k_\infty$ 均随弹性模量比( $E_2/E_1$ )的增大而增大, 而 $N_s$ 则逐渐减小, 系数 $k_s/k_\infty$ 随土梁刚度比 $\rho$ 的增大而减小。当 $E_2/E_1=1$ 时,  $k_s/k_\infty$ 取值均大于 1, 且与图 3(a)中 $H/b=20$ 时 $k_H/k_\infty$ 取值完全对应。对于 2 层地基(上硬下软), 系数 $M_s$ ,  $N_s$ 及 $k_s/k_\infty$ 均随弹性模量比( $E_1/E_2$ )的增大而增大, 且 $k_s/k_\infty$ 随土梁刚度比 $\rho$ 的增大而增大。

## 4 算例验证

### 4.1 算例 1

如图 4 所示, 埋置于横观各向同性有限地基中且两端铰支的有限长梁的中部作用集中荷载 $P$ ,  $P=300$  kN,  $L=10$  m,  $H-h=30b$ ,  $b=h_b=0.5$  m,  $E_b=16$  GPa; 土体竖向弹性模量 $E_v=5$  MPa, 泊松比 $\mu_h=\mu_v=\mu=0.3$ 。考虑不同梁底埋深 $h$ 及横观各向同性参数 $r$ 下的 3 种工况, 如表 3 所示。

表 3 基床系数 $k$ 的广义 Vesic 解

Table 3 Generalized Vesic solutions of  $k$

编号	埋深 $h$	横观特性参数 $r$	基床系数 $k/(kN \cdot m^3)$	无量纲长度因子 $\alpha L'$
工况 1	0	5	4163.00	3.9755
工况 2	5b	0.2	3482.99	3.8021
工况 3	30b	1	5408.27	4.2443

注:  $\alpha L'$ 用来判断无限长梁的基床系数 $k$ 用于计算有限长梁时的适用性<sup>[3]</sup>,  $\alpha L' > 2.25$  时适用,  $L'$ 表示荷载至梁边缘的长度总和, 即梁的自由长度。

由表 3 可知, 对于梁底埋深 $h$ 与横观各向同性参数 $r$ 不同的 3 种工况, 本文所得基床系数 $k$ 的广义 Vesic 解差别较大。由图 5 可见, 地埋梁竖向位移的本文解与边界元解<sup>[14]</sup>(文献[14])的方法拓展应用到横观各向

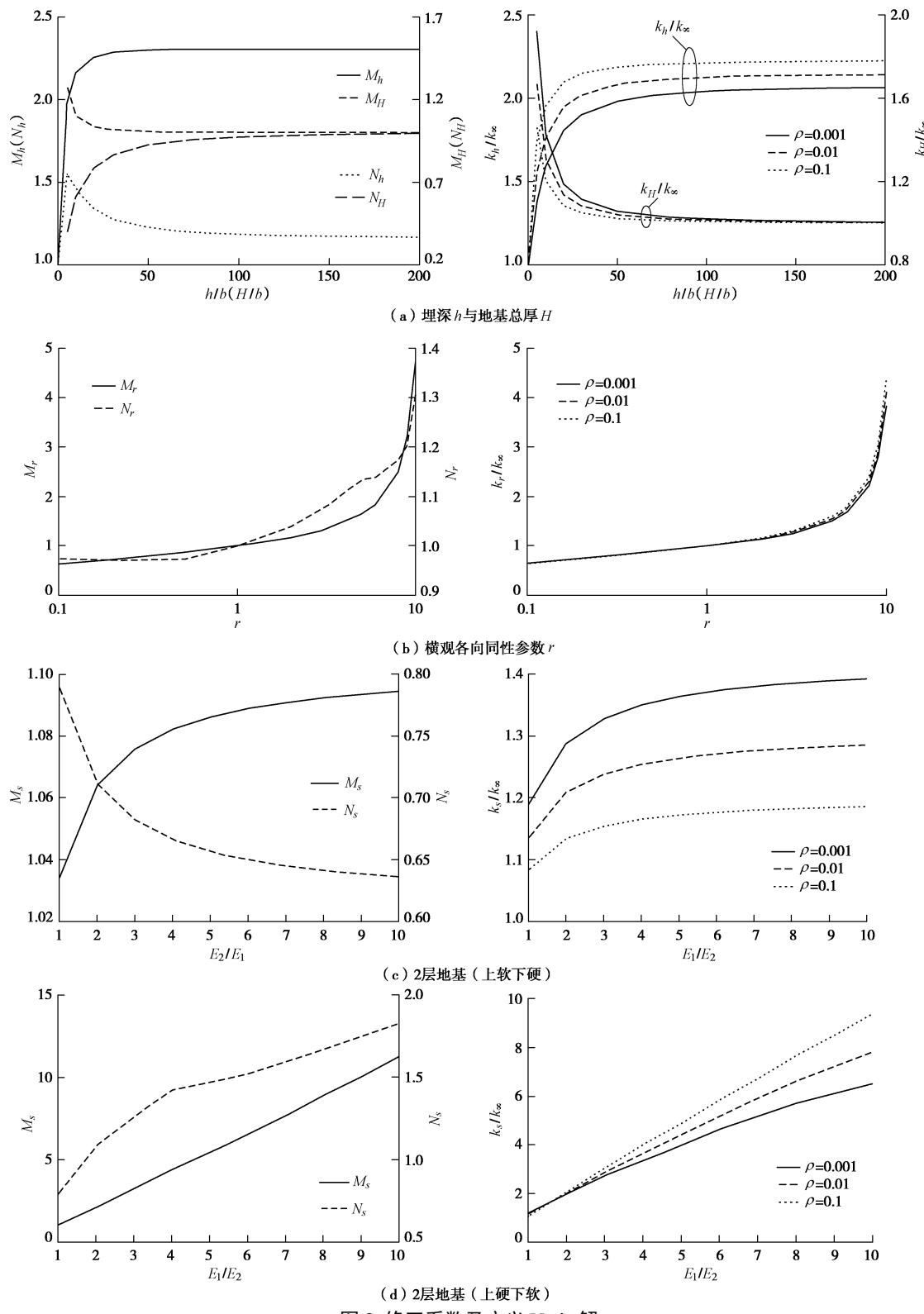


图 3 修正系数及广义 Vesic 解

Fig. 3 Correction coefficients and generalized Vesic solutions

同性层状地基) 很接近, 而 Vesic 解则与之有较大差别。这是由于与 Vesic 解将所有工况均视作均质半无限弹性地基不同, 本文解考虑了梁底埋深、地基的有限压缩性及横观各向同性的影响, 使所得竖向位移计算值相较于 Vesic 解更为合理准确。

#### 4.2 算例 2

如图 6 所示, 置于 3 层各向同性层状地基表面上的有限长梁中部受集中荷载  $P$  作用, 梁的计算参数分别记为  $E_b$ ,  $L$ ,  $2b$  及  $h_b$ ,  $b=0.5$  m; 各土层相关参数分别记为  $E_i$ ,  $\mu_i$  及  $h_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 且  $\mu_i = 0.3$ 。 $L : h_b : b : h_1 : h_2 : h_3 = 30 : 2 : 1 : 10 : 10 : 10$ 。考虑不同地基软硬分布形式下的 3 种工况, 如表 4 所示。

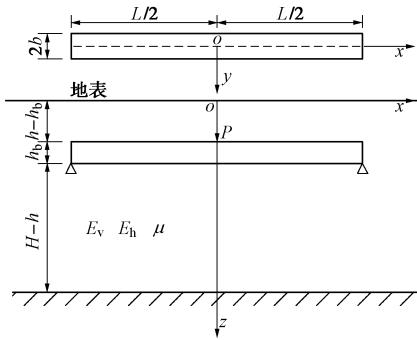


图4 横观各向同性地基中的有限长地埋梁

Fig. 4 A finite buried beam in transversely isotropic soils

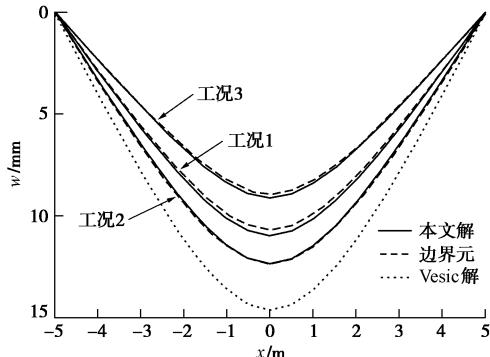


图5 坚向位移对比曲线

Fig. 5 Contrast curves of vertical displacement

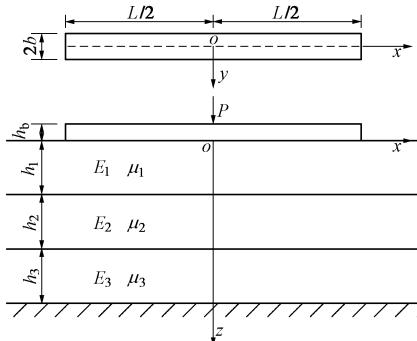


图6 三层各向同性地基上的有限长梁

Fig. 6 A finite beam resting on three-layered soils

表4 归一化基床系数  $\hat{k}$  的广义 Vesic 解Table 4 Generalized Vesic solutions of  $\hat{k}$ 

编号	$E_b : E_i$	归一化基床系数 $\hat{k}$	无量纲长度因子 $\alpha L'$
工况 1	3000 : 1 : 3 : 5	0.4596	3.1802
工况 2	3000 : 3 : 3 : 3	1.1799	4.0254
工况 3	3000 : 5 : 3 : 1	1.6664	4.3883

注:  $\alpha L'$  定义见表 3

由表 4, 图 7 可知,  $\hat{k}$  和  $\alpha L'$  均为工况 1 < 工况 2 < 工况 3, 本文方法与边界元法<sup>[14]</sup>所得竖向位移计算值较为接近, 且随  $\alpha L'$  的增大, 计算结果吻合程度越来越好。这说明对于土体加权平均弹性模量相同的几种工况, 首层土体越硬, 则基床系数计算值越大, 且本文所得无限长梁的基床系数  $k$  用于计算有限长梁时的适用性越高, 即计算误差越小。与本文解相比, Vesic 解由于将所有工况均视作均质半无限地基, 所得结果

会高估或低估梁的竖向位移, 说明基床系数的 Vesic 解不适用于土体分层特性明显时的工况, 而考虑分层特性的本文广义 Vesic 解更为准确。

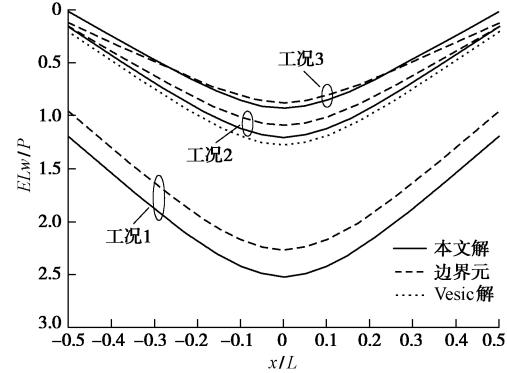


图7 归一化竖向位移对比曲线

Fig. 7 Contrast curves of normalized vertical displacement

## 5 结论

本文根据横观各向同性弹性理论和传递矩阵法, 考虑梁底埋深、地基的横观各向同性及成层性, 求得基床系数的广义 Vesic 解答。数值算例验证了本文基床系数取值方法的合理性和准确性, 分析了各个参数变化对基床系数取值的影响, 得到如下 3 点结论。

(1) 由于与 Vesic 解将所有工况均视作均质半无限弹性地基不同, 本文广义 Vesic 解考虑了梁底埋深及地基复杂特性的影响, 使所得地埋梁力学反应计算值更为合理准确。

(2) 基床系数  $k_h$  随梁底埋深  $h$  的增加而不断增大至最大值, 该值与土梁刚度比  $\rho$  相关, 约为地表时的 2.05~2.25 倍; 随着地基总厚  $H$  的增大, 基床系数  $k_h$  不断减小且降幅与  $\rho$  相关; 随着横观各向同性参数  $r$  的增大, 基床系数  $k_r$  不断增大且增幅与  $\rho$  基本无关; 当  $h$  为 0 或  $H$  超过  $100b$  或  $r$  为 1 时, 广义 Vesic 解即退化为 Vesic 解。

(3) 土层加权平均弹性模量相同且首层土体越硬时, 基床系数计算值越大, 且无限长梁的基床系数用于有限长梁分析时的计算误差越小。

## 参考文献:

- [1] BIOT M A. Bending of an infinite beam on an elastic foundation[J]. Journal of Applied Mechanics, ASME, 1937, 59: A1 - A7.
- [2] TERZAGHI K. Evaluation of coefficients of subgrade reaction[J]. Géotechnique, 1955, 5(4): 297 - 326.
- [3] VESIC A B. Bending of beams resting on isotropic elastic solid[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 1961, 87(2): 35 - 53.
- [4] 俞剑, 张陈蓉, 黄茂松. 被动状态下地埋管线的地基模

- 量[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, 31(1): 123–132. (YU Jian, ZHANG Chen-rong, HUANG Mao-song. Subgrade modulus of underground pipelines subjected to soil movements[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2012, 31(1): 123–132. (in Chinese))
- [5] DALOGLU A T, VALLABHAN C V G. Values of  $k$  for slab on Winkler foundation[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2000, 126(5): 463–471.
- [6] SHELDON T, SEZEN H, MOORE I D. Beam-on-springs modeling of jointed pipe culverts[J]. Journal of Performance of Constructed Facilities, 2016, 30(2): 1–9.
- [7] 艾智勇, 张逸帆. 层状横观各向同性地基与刚性条形基础共同作用分析[J]. 岩土工程学报, 2014, 36(4): 752–756. (AI Zhi-yong, ZHANG Yi-fan. Interactive analysis of a rigid strip footing on transversely isotropic layered soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, 36(4): 752–756. (in Chinese))
- [8] LIANG R Y, SHATNAWI E S. Estimating subgrade reaction modulus for transversely isotropic rock medium[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2010, 136(8): 1077–1085.
- [9] 王春玲, 丁欢, 刘俊卿. 层状横观各向同性地基上异性矩形薄板的弯曲解析解[J]. 计算力学学报, 2014, 31(1): 78–83. (WANG Chun-ling, DING Huan, LIU Jun-qing. Bending analytic solutions of anisotropic rectangular plates with four free edges on the transversely isotropic elastic
- multilayered subgrade[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2014, 31(1): 78–83. (in Chinese))
- [10] AI Z Y, FENG D L. BEM analysis of laterally loaded pile groups in multi-layered transversely isotropic soils[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2014, 44: 143–151.
- [11] 韩泽军, 林皋, 周小文, 等. 横观各向同性层状地基上埋置刚性条带基础动力刚度矩阵求解[J]. 岩土工程学报, 2016, 38(6): 1117–1124. (HAN Ze-jun, LIN Gao, ZHOU Xiao-wen, et al. Solution of dynamic stiffness matrix for rigid strip foundations embedded in layered transversely isotropic soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, 38(6): 1117–1124. (in Chinese))
- [12] 韩泽军, 林皋, 周小文. 三维横观各向同性层状地基任意点格林函数求解[J]. 岩土工程学报, 2016, 38(12): 2218–2225. (HAN Ze-jun, LIN Gao, ZHOU Xiao-wen. Solution to Green's functions for arbitrary points in 3D cross-anisotropic multi-layered soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, 38(12): 2218–2225. (in Chinese))
- [13] 钟阳, 殷建华. 弹性层状体的求解方法[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 212–226. (ZHONG Yang, YIN Jian-hua. Solving method of elastic layered body[M]. Beijing: Science Press, 2007: 212–226. (in Chinese))
- [14] AI Z Y, LI Z X, CHENG Y C. BEM analysis of elastic foundation beams on multilayered isotropic soils[J]. Soils and Foundations, 2014, 54(4): 667–674.

#### 附录:

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{33} = b_2(a_1 - a_2a_4)\xi^2 + b_0; \\ S_{12} &= -\xi^2 S_{43} = \xi^2 [b_3(a_1 - a_2a_4)\xi^2 + b_1]; \\ S_{13} &= b_1a_4 - b_3[a_3 + a_4(a_2a_4 - 2a_1)]\xi^2; \\ S_{14} &= -\xi^2 S_{23} = b_2(a_3 - a_1a_4)\xi^2; \\ S_{21} &= -S_{34}/\xi^2 = b_3(a_1^2 - a_1a_2a_4 + a_2a_3)\xi^2 + b_1a_1; \\ S_{22} &= S_{44} = b_2a_1\xi^2 + b_0; \\ S_{24} &= b_3a_1(2a_3 - a_1a_4)\xi^2 + b_1a_3; \\ S_{31} &= a_2\xi^2 [b_3(a_2a_4 - 2a_1)\xi^2 - b_1]; \\ S_{32} &= -\xi^2 S_{41} = -b_2a_2\xi^4; \\ S_{42} &= b_3a_2\xi^4. \end{aligned}$$

系数  $b_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) 的取值分为如下两种情况:

(1)  $t = a_2(-4a_1a_4 + a_2a_4^2 + 4a_3) \neq 0$  时

$$b_0 = \frac{\lambda_1^2 \cosh(\lambda_2 z) - \lambda_2^2 \cosh(\lambda_1 z)}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2},$$

$$b_1 = \frac{\lambda_1^3 \sinh(\lambda_2 z) - \lambda_2^3 \sinh(\lambda_1 z)}{\lambda_1^3 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2^3},$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{\cosh(\lambda_1 z) - \cosh(\lambda_2 z)}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \\ b_3 &= \frac{\lambda_2 \sinh(\lambda_1 z) - \lambda_1 \sinh(\lambda_2 z)}{\lambda_1^3 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2^3}, \\ \lambda_1 &= \sqrt{\frac{2a_1 - a_2a_4 - \sqrt{t}}{2}}\xi, \\ \lambda_2 &= \sqrt{\frac{2a_1 - a_2a_4 + \sqrt{t}}{2}}\xi; \\ (2) \quad t &= a_2(-4a_1a_4 + a_2a_4^2 + 4a_3) = 0 \text{ 时} \\ b_0 &= \cosh(\lambda z) - \frac{1}{2}\lambda z \sinh(\lambda z), \\ b_1 &= \frac{3 \sinh(\lambda z)}{2\lambda} - \frac{1}{2}z \cosh(\lambda z), \\ b_2 &= \frac{z \sinh(\lambda z)}{2\lambda}, \\ b_3 &= \frac{\lambda z \cosh(\lambda z) - \sinh(\lambda z)}{2\lambda^3}, \\ \lambda &= \sqrt{\frac{2a_1 - a_2a_4}{2}}\xi. \end{aligned}$$