

DOI: 10.11779/CJGE201812010

# 三维层状路面结构动力响应的混合变量法

王 妍<sup>1, 2</sup>, 林 皋<sup>1, 2</sup>

(1. 大连理工大学海岸与近海岸工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024; 2. 大连理工大学工程抗震研究所 建设工程学部水利工程学院, 辽宁 大连 116024)

**摘 要:** 提出了三维多层路面结构动力响应分析的混合变量法和精细积分方法。通过 Fourier-Bessel 变换, 将频率波数域内的偏微分波动方程解耦为两组二阶常微分方程, 一组相应于 P-SV 波动分量, 一组相应于 SH 波动分量。引入位移的对偶向量, 将二阶常微分方程进一步简化为一阶齐次常微分方程, 其解为指数函数, 采用精细积分法可以获得很高的计算精度。此外, 将解表示成混合变量形式, 便于多层体系的合并和提高计算效率。该方法适用于任意荷载分布, 计算稳定, 便于计算机编程。将计算结果与 BISAR 软件结果及试验结果进行比较, 验证了方法的精确性与合理性。在此基础上, 分析了轮胎荷载作用下路面结构的变形特点及应力分布情况。研究结果可为公路路面结构设计提供参考。

**关键词:** 混合变量法; 层状路面结构; 动力响应; Green 函数; 动刚度矩阵

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2018)12-2231-10

**作者简介:** 王 妍(1989-), 女, 博士研究生, 主要从事结构与地基的动力响应分析。E-mail: wangyanchn@mail.dlut.edu.cn。

## Mixed variable formulation for dynamic response of 3D layered road structures

WANG Yan<sup>1, 2</sup>, LIN Gao<sup>1, 2</sup>

(1. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China; 2. Institute of

Earthquake Engineering, Faculty of Infrastructure Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

**Abstract:** A mixed variable formulation and the relevant precise integration method are proposed for the dynamic response analysis of multilayered road structures. By performing the Fourier-Bessel transform, the partial differential wave motion equation in the frequency wave number domain can be decoupled into two sets of second-order ordinary differential equations, one for P-SV components and the other for SH components. By introducing the dual vectors of stress and displacement, the second-order ordinary differential equation is further reduced to a homogeneous first-order one. The solution is in the form of an exponential function. By employing the precise integration method, very high accuracy can be achieved. Furthermore, the mixed variable formulation of the solution of wave motion equation facilitates the assembly of layers and improves the computational efficiency. The proposed method is applicable to arbitrary distribution of loads. The computation is stable and convenient for the computer programming. The accuracy and rationality of the proposed method are verified by comparing the solutions with the BISAR software and the experimental results. Some numerical results are presented to reflect the deformation characteristics and stress distribution of the road structures under the tire loads. The research results are useful for the design of road pavement structures.

**Key words:** mixed variable formulation; layered road structure; dynamic response; Green's function; dynamic impedance matrix

## 0 引 言

高速公路及城镇道路在国民经济发展和社会进步中扮演着重要角色, 直接影响着公共交通及人民生命财产的安全。沥青路面在中国公路的总里程中已达到相当大的相对密度, 因而其安全性应得到更多的重视。沥青路面具有分层结构形式, 各结构层材料的物理-力学特性不同, 层状体系底部可为半无限空间或刚性基岩。路面结构所受荷载主要为车辆动力荷载, 其大

小、方向、位置均产生变化。目前, 国内外有关公路结构的分析计算, 多采用层状(黏)弹性介质理论, 基于静力荷载作用下的轴对称模型来进行研究, 如荷兰 Shell 工作组的 BISAR3.0 程序。有关层状体系的计

**基金项目:** 国家重点研发计划项目(2016YFB0201001); 创新群体“工程安全与监控” II 期国家自然科学基金项目(51421064)

**收稿日期:** 2017-09-25

算方法有传递矩阵法、积分变换法、刚度矩阵法、薄层法、有限元法、边界元法等。相关的研究主要针对于各向同性层状体系,而大多为二维平面问题。

传递矩阵法是由 Thomson<sup>[1]</sup>和 Haskell<sup>[2]</sup>提出的早期求解层状地基中波传播问题的计算方法。随后许多学者在该方法的基础上结合积分变换法来研究层状体系的动力响应问题。但该方法在计算过程中含有指数项,当层厚较大或荷载频率较高时,会出现指数溢出现象,导致计算失败;Kausel 等<sup>[3]</sup>提出的刚度矩阵法是结合积分变换法将单层弹性体的刚度矩阵按照薄层法理论组装成总体刚度矩阵,可以避免传递矩阵法的指数溢出问题,但层数较多时,需要求解大型方程组;薄层法<sup>[4]</sup>是模拟弹性波在层状介质中传播的半数值半解析方法,该方法对层状结构有较好的适应性,但其求解精度受薄层厚度及薄层数目的影响。

有限元法对复杂的几何形状和不均匀的材料特性有较强的适应性,但需要设置人工边界条件来模拟波在边界处向无限远处传播的特性。人工边界的模拟与计算也比较复杂,为取得良好的计算结果,往往需要庞大的计算范围、较多的自由度及较长的计算时间;边界元法使问题维数降低一阶,可以满足无限远处的辐射条件,但需要基本解,对每层地基在层间交界面上都需要分别进行离散。当结构层数较多时或计算三维问题时,计算量大幅增加;比例边界有限元法是 Wolf 等<sup>[5]</sup>和 Song 等<sup>[6]</sup>提出的一种新的半解析数值方法,兼具有限元法和边界元法的优点。但比例边界有限元法应用于层状地基,需进行一定的处理。文献[7, 8]中提出了将传统的点相似中心转换为轴线相似中心的方法进行频域或时域的分析。但这样将增加计算的复杂性,或是影响计算结果的准确性。

精细积分算法是由 Zhong 等<sup>[9]</sup>提出的一种有效求解常微分方程的精确数值解法,可获得计算机精度意义下的解析解,精细积分法在运算过程中的矩阵维度为 2 或 3,计算量小,数值求解稳定。韩泽军等<sup>[10]</sup>结合精细积分法用于求解多层地基基础动力刚度矩阵,获得精度较高的计算结果。

混合变量是由笔者课题组所研究的一种积分变换方法与精细积分相结合的半解析半数值解法,适用于求解任意荷载分布及任意荷载作用区域下的层状结构动力响应问题,适用于求解层数较多、层厚较大的弹性层动力响应问题<sup>[11-12]</sup>。方法简便,计算快,可获得任意理想的计算精度。

路面结构内部应力、位移是路面设计过程中重点关注的对象,本文作者在课题组已有研究成果的基础上,将混合变量法(MVF)应用于层状公路结构的动力分析中,并提出适用于求解三维各向同性层状路面

体系表面及内部位移与层间应力的处理方法,该方法有利于计算机的编程计算,可批量处理大量节点,其计算精度与计算速度不受层厚及层数影响,可以避免一般传递矩阵法计算中的指数溢出问题,保障了高频区的收敛性,计算稳定,适用于各种情况。本文的关键在于将三维空间的应力和位移偏微分方程通过 Fourier-Bessel 变换在波数域内化为线性一阶齐次常微分方程求解,计算方便,采用精细积分方法可以达到比较高的计算精度。以动力荷载下的三维层状公路为例阐明混合变量法求解动位移及动应力的计算过程,并以试验结果及 BISAR3.0 计算结果进行验证。

土体具有强非线性性质,在交通重载作用下,土体的变形往往包含弹性变形及塑性变形两部分。评价土的非线性性能有两个重要指标,①土的动剪切模量与剪应变的变化关系,②阻尼比与剪应变的变化关系<sup>[13]</sup>。根据土壤的种类不同,这两个参数随剪应变的变化表现出不同的非线性性质。在计算土层的动力响应时,需要不断地对这两种参数进行修正,以获得近似的计算结果,常用的方法为等效线性化法。等效线性化法基于土体总动力效应相当的原则将土的非线性问题求解转变为线性问题求解,在计算过程中通过迭代不断调整剪应变的幅值,直到前后两次迭代的差值满足精度要求为止。因此,若层状体系在动力交通荷载下产生非线性响应时,需要根据实际情况作非线性计算或等价线性处理。

## 1 计算模型

### 1.1 频率-波数域内弹性波动方程的导出

将公路结构视为层状体系,将直角坐标系的原点置于层状体系的表面, $z$ 轴竖直向下, $x$ 轴、 $y$ 轴水平向,圆柱坐标系的 $z$ 轴与直角坐标系的 $z$ 轴保持一致, $r$ 、 $\theta$ 轴位于水平面内,如图1所示。

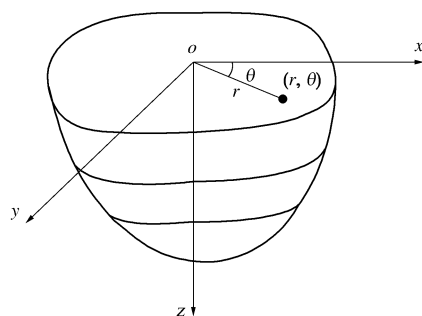


图1 层状公路结构及坐标系示意图

Fig. 1 Sketch map of multilayered road structure and coordinate system

不同坐标系下的变量以变量上部的记号加以区

别, 例如, 应力  $\tilde{\sigma}$  为圆柱坐标系内的表示方法,  $\hat{\sigma}$  为直角坐标系内的表示方法, 而  $\sigma$  为频率-波数域内的表示方法。假定层状体系由  $l$  层组成, 第  $l+1$  层为半无限域或刚性基岩。每层由属性各不相同的均质各向同性材料组成。第  $k$  层的材料常数设为弹性模量  $E_k$ , 泊松比  $\nu_k$ , 密度  $\rho_k$ , 阻尼比  $\zeta_k$ , 厚度  $h_k = z_k - z_{k-1}$ , ( $k=1, 2, \dots, l$ ), 如图 2 所示。

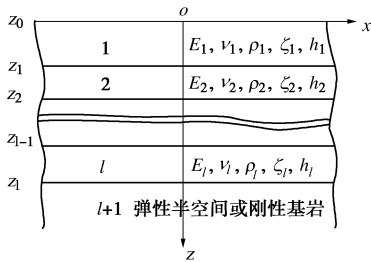


图 2 层状体系计算模型

Fig. 2 Computational model for multilayered road

进行交通荷载下公路结构动力响应分析时, 可以采用波在介质中的传播理论来求解路面结构中的动位移与动应力。本文求解以位移表示的弹性动力学波动方程, 采用图 3 所示圆形微元建立层状体系的 Green 影响函数, 利用荷载与变形的对称性与反对称性, 采用圆柱坐标系可使方程得到简化, 由此可以拓展到任意形式荷载作用下层状体系波动问题的求解。圆柱坐标系下弹性波动的拉梅方程为

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2G) \frac{\partial \theta_r}{\partial r} - \frac{2G}{r} \frac{\partial \omega_z}{\partial \theta} + 2G \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial t^2}, \\ (\lambda + 2G) \frac{\partial \theta_r}{r \partial \theta} + 2G \frac{\partial \omega_z}{\partial r} - 2G \frac{\partial \omega_r}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial t^2}, \\ (\lambda + 2G) \frac{\partial \theta_r}{\partial z} - \frac{2G}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\theta) + \frac{2G}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} &= \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial t^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中,  $\rho$  为密度,  $\lambda$  和  $G$  为实拉梅常数,  $\theta_r$  为体应变,  $\omega_r, \omega_\theta, \omega_z$  为位移的转动分量。将圆柱坐标系下位移向量及层间节点应力向量表示为

$$\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_r \quad \tilde{u}_\theta \quad \tilde{u}_z)^T, \quad \tilde{\mathbf{p}} = (\tilde{\tau}_{rz} \quad \tilde{\tau}_{\theta z} \quad \tilde{\sigma}_z)^T, \quad (2)$$

式中,  $\tilde{\sigma}_z, \tilde{\tau}_{rz}, \tilde{\tau}_{\theta z}$  为正应力和剪应力在柱坐标系下的分量,  $\tilde{u}_r, \tilde{u}_\theta, \tilde{u}_z$  为位移分量。为简化方程 (1) 的求解, 利用 Fourier-Bessel 变换, 将波动方程由时间-空间域转换到频率-波数域求解。位移的 Fourier-Bessel 变换表达式为

$$\mathbf{u}_n(\kappa, z, \omega) = a_n \int_0^{+\infty} r C_n \int_0^{2\pi} T_n \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{u}}(r, \theta, z, t) e^{-i\omega t} dt d\theta dr, \quad (3)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}(r, \theta, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} T_n \int_0^{+\infty} \kappa C_n \mathbf{u}_n(\kappa, z, \omega) d\kappa d\omega. \quad (4)$$

同理, 对于应力向量  $\tilde{\mathbf{p}}$  的 Fourier-Bessel 变换与式 (3) 和式 (4) 的形式相同。式中  $\kappa$  表示波数,  $\tilde{\mathbf{u}}$  为空间域

内位移向量。  $a_n$  为规格化因子  $a_n = 1/2\pi, (n=0)$ ,  $a_n = 1/\pi, (n \neq 0)$ 。  $T_n = \text{diag}[\cos n\theta \quad -\sin n\theta \quad \cos n\theta]$  适用于对称的情况,  $T_n = \text{diag}[\sin n\theta \quad \cos n\theta \quad \sin n\theta]$  适用于反对称的情况。

矩阵  $C_n(\kappa r)$  的表达式为

$$C_n(\kappa r) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa} J_n(\kappa r) & \frac{n}{\kappa r} J_n(\kappa r) \\ \frac{n}{\kappa r} J_n(\kappa r) & \frac{1}{\kappa} J_n(\kappa r) \\ -J_n(\kappa r) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

式中,  $J_n(\kappa r)$  是第一类  $n$  阶贝塞尔函数。

为使波动方程的求解简化, 将位移划分为对称部分和反对称部分分别求解, 式中以  $\theta$  为零的  $r$  轴作为对称轴, 将其按傅里叶级数展开为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_r(r, \theta, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_r^s(r, z, t, n) \cos n\theta + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_r^a(r, z, t, n) \sin n\theta, \\ \tilde{u}_\theta(r, \theta, z, t) &= -\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_\theta^s(r, z, t, n) \sin n\theta + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_\theta^a(r, z, t, n) \cos n\theta, \\ \tilde{u}_z(r, \theta, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_z^s(r, z, t, n) \cos n\theta + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_z^a(r, z, t, n) \sin n\theta, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中, 上标  $s$  代表位移的对称分量,  $a$  代表位移的反对称分量。

对于实际应用中的均布水平力和均布竖向力作用的圆形微元 (参见图 3) 分别相应于  $n=1$  和  $n=0$  的对称工况。分别将式 (3) 中有关  $n=1$  和  $n=0$  的对称工况的表达式代入波动方程 (1), 前者可将波动方程解耦为波数域内的平面 P-SV 波的波动方程和平面外 SH 波的波动方程 (此时 SH 波动形式的含义与直角坐标中有所不同)。后者可将波动方程解耦为波数域内的平面内 P-SV 波动方程。前后两者的 P-SV 波动方程具有相同的表达形式。将波数域内的波动方程统一表示成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} G \\ \lambda + 2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r'' \\ u_z'' \end{Bmatrix} - i\kappa \begin{bmatrix} \lambda + G \\ \lambda + G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r' \\ u_z' \end{Bmatrix} - \left( \kappa^2 \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \\ & G \end{bmatrix} - \rho \omega^2 \mathbf{I} \right) \begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \end{Bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

$$G u_\theta'' - (\kappa^2 G - \rho \omega^2) u_\theta = 0, \quad (8)$$

式中,  $u_r'$  的上标表示对  $z$  的一阶导数。

由此将时间-空间域内的波动方程 (1) 变换为频域-波数域内的二阶联立齐次常微分方程 (7) 和 (8), 以下可应用混合变量法对其求解。

## 1.2 精细积分算法求解层状体系柔度矩阵

将频率-波数域内的二阶齐次常微分波动方程 (7)、(8) 统一写成如下形式:

$$\mathbf{K}_{22}^m (\mathbf{u}^m)'' + (\mathbf{K}_{21}^m - \mathbf{K}_{12}^m) (\mathbf{u}^m)' - (\mathbf{K}_{11}^m - \rho \omega^2 \mathbf{I}^m) \mathbf{u}^m = \mathbf{0}, \quad (9)$$

式中,  $\mathbf{u}' = \partial \mathbf{u} / \partial z$ ,  $m=1$  代表 P-SV 波动,  $m=2$  代表 SH 波动。 $\mathbf{I}^m$  代表  $m$  阶单位阵。 $\mathbf{u}^m$  表示波数域内的位移向量:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}^1 &= \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{22}^1 = \begin{bmatrix} G \\ \lambda + 2G \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_{21}^1 &= -i\kappa \begin{bmatrix} G \\ \lambda \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{12}^1 = i\kappa \begin{bmatrix} \lambda \\ G \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_{11}^1 &= \kappa^2 \begin{bmatrix} \lambda + 2G \\ G \end{bmatrix}, \mathbf{u}^2 = u_\theta, \mathbf{K}_{22}^2 = G, \\ \mathbf{K}_{21}^2 &= 0, \mathbf{K}_{12}^2 = 0, \mathbf{K}_{11}^2 = \kappa^2 G. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

考虑体系介质有阻尼影响时, 可用复拉梅常数代替式 (10) 中的实拉梅常数计算:

$$G^* = G(1 + 2i\zeta), \lambda^* + G^* = (\lambda + G)(1 + 2i\zeta), \quad (11)$$

式中,  $\zeta$  代表复阻尼参数。引入  $\mathbf{u}^m$  的对偶变量  $\mathbf{p}^m$ , 根据虚功原理可以导出:

$$\mathbf{p}^m = -(\mathbf{K}_{22}^m (\mathbf{u}^m)' + \mathbf{K}_{21}^m \mathbf{u}^m) \quad (m=1, 2), \quad (12)$$

$$\mathbf{p}^1 = -\begin{bmatrix} \tau_{rz} \\ \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}^2 = -\tau_{\theta z}. \quad (13)$$

利用式 (12) 可使二阶齐次常微分方程 (9) 转化为一阶齐次常微分方程。为了便于推导, 下文省略变量中的上标  $m$ 。利用  $\mathbf{V} = [\mathbf{u} \quad \mathbf{p}]^T$  可将式 (9) 转换为状态方程:

$$\mathbf{V}' = \mathbf{H}\mathbf{V}. \quad (14)$$

式中,  $\mathbf{H}$  为哈密顿矩阵,  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{D} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$ , 其中  $\mathbf{A} =$

$$-\mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21}, \quad \mathbf{D} = -\mathbf{K}_{22}^{-1}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} - \mathbf{K}_{11} + \rho \omega^2 \mathbf{I},$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1}.$$

式 (14) 的通解为指数函数, 表示为

$$\mathbf{V} = \exp(\mathbf{H}z) \mathbf{c}, \quad (15)$$

式中,  $\mathbf{c}$  为积分常数, 可通过边界条件确定。

针对该指数函数的计算, Zhong 等<sup>[9]</sup>在基于  $2^N$  类算法计算指数矩阵的基础上, 提出了精细积分求解法, 可以达到任意理想的求解精度。以层状体系中的任意层为典型层, 将其上下边界分别为记为  $z_a$  和  $z_b$ , 厚度为  $h$ 。由式 (15),  $a$  端和  $b$  端的位移、应力满足关系式  $\mathbf{V}_b = \exp(\mathbf{H}h) \mathbf{V}_a$ , ( $h = z_b - z_a$ ), 令  $\mathbf{T} = \exp(\mathbf{H}h)$ , 则  $\mathbf{V}_b = \mathbf{T} \mathbf{V}_a$  展开即为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{p}_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{uu} & \mathbf{T}_{up} \\ \mathbf{T}_{pu} & \mathbf{T}_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{p}_a \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

$\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{p}$  的计算精度取决于指数函数  $\mathbf{T}$  的计算精度。将典型层划分为厚度相等的  $2^{N_1}$  个子层, 再将每一子层划分为厚度相等的  $2^{N_2}$  个微层。子层厚度为  $\eta = h/2^{N_1}$ , 微层厚度为  $\tau = \eta/2^{N_2}$ , 则:

$$\tau = h/2^{N_1+N_2} = h/b \quad (b = 2^N, N = N_1 + N_2). \quad (17)$$

如无特殊情况, 根据笔者经验,  $N_1, N_2$  分别取为 10 和 20, 则此时的  $\tau$  已非常小, 则

$$\mathbf{T} = \exp(\mathbf{H}h) = [\exp(\mathbf{H}h/b)]^b = [\exp(\mathbf{H}\tau)]^b. \quad (18)$$

将  $\exp(\mathbf{H}\tau)$  进行 Taylor 级数展开:

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{H}\tau) &= \mathbf{I} + \mathbf{H}\tau + \frac{1}{2!}(\mathbf{H}\tau)^2 + \frac{1}{3!}(\mathbf{H}\tau)^3 + \dots \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{T}_0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{则 } \mathbf{T} = [\exp(\mathbf{H}\tau)]^b = (\mathbf{I} + \mathbf{T}_0)^{2^N} = \mathbf{I} + \mathbf{T}_N, \quad (20)$$

利用递归公式  $\mathbf{T}_i = 2\mathbf{T}_{i-1} + \mathbf{T}_{i-1}^2$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), 可以计算  $\mathbf{T}_N$ 。

对于上述典型层内的  $\mathbf{T}$  的维度为 2 或 1, 矩阵维度小, 便于计算, 且  $\mathbf{T}$  只需进行  $N_1 + N_2$  次递归计算即可求解。

对于线性保守系统, 典型层上下两端  $z_a$  和  $z_b$  之间的应力、位移关系同样满足关系式:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{p}_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{p}_a \end{Bmatrix}, \quad (21)$$

式中, 系数矩阵  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{E}$  通过对比式 (16) 计算得

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{T}_{uu} - \mathbf{T}_{up}^T \mathbf{T}_{pp}^{-1} \mathbf{T}_{pu}, \quad \mathbf{G} = -\mathbf{T}_{up} \mathbf{T}_{pp}^{-1}, \\ \mathbf{Q} &= -\mathbf{T}_{pp}^{-1} \mathbf{T}_{pu}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{T}_{pp}^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

利用以上对于典型层的求解方程, 可以将层状体系中任意相邻两层进行合并, 1 层  $[z_a, z_b]$  和 2 层  $[z_b, z_c]$  合并后为  $c$  层  $[z_a, z_c]$ 。层状体系各层交界面处满足位移及应力连续条件, 即:

$$\mathbf{u}_k^k = \mathbf{u}_k^{k+1}, \quad \mathbf{p}_k^k = \mathbf{p}_k^{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, l), \quad (23)$$

式中, 向量的上标表示位移或应力所属的层编号, 下标表示位移或应力的编号。根据式 (21), 1 层及 2 层满足关系式:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{p}_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^1 & -\mathbf{G}^1 \\ \mathbf{Q}^1 & \mathbf{E}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{p}_b \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{p}_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^2 & -\mathbf{G}^2 \\ \mathbf{Q}^2 & \mathbf{E}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{p}_c \end{Bmatrix}.$$

合并消去  $\mathbf{u}_b$ ,  $\mathbf{p}_b$  后得到关系式:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{p}_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^c & -\mathbf{G}^c \\ \mathbf{Q}^c & \mathbf{E}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{p}_c \end{Bmatrix}, \quad (24)$$

式中,  $\mathbf{F}^c$ ,  $\mathbf{G}^c$ ,  $\mathbf{Q}^c$ ,  $\mathbf{E}^c$  为合并后的  $c$  层系数矩阵  $\mathbf{F}^c = \mathbf{F}^2 (\mathbf{I} + \mathbf{G}^1 \mathbf{Q}^2)^{-1} \mathbf{F}^1$ ,  $\mathbf{G}^c = \mathbf{G}^2 + \mathbf{F}^2 ((\mathbf{G}^1)^{-1} + \mathbf{Q}^2)^{-1} \mathbf{E}^2$ ,  $\mathbf{Q}^c = \mathbf{Q}^1 + \mathbf{E}^1 ((\mathbf{Q}^2)^{-1} + \mathbf{G}^1)^{-1} \mathbf{F}^1$ ,  $\mathbf{E}^c = \mathbf{E}^1 (\mathbf{I} + \mathbf{Q}^2 \mathbf{G}^1)^{-1} \mathbf{E}^2$ .

采用上述方法, 依次将整个层状体系中各层合并后, 可得到路面与底层的位移和应力关系:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_l \\ \mathbf{p}_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{p}_l \end{Bmatrix}, \quad (26)$$

式中,  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{p}_0$  为路面位移及应力向量,  $\mathbf{u}_l$ ,  $\mathbf{p}_l$  为  $l$  层底部的位移及应力向量, 其中,  $\mathbf{p}_0$  为已知量。为求解式 (26), 需引入边界条件。

对于层状体系第  $l+1$  层为半无限域的情况, 半无限土体需满足波向无穷远处辐射的边界条件。由此可对  $\mathbf{H}$  求解特征值问题, 令特征值和特征向量矩阵分别为  $\mathbf{\Lambda}$  和  $\mathbf{\Phi}$ , 则

$$\mathbf{H}\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Lambda} \quad (27)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_i & \\ & -\lambda_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \quad (28)$$

引入向量  $\mathbf{b} = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{b}$  满足关系式  $\mathbf{b}' = \mathbf{\Lambda}\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b}$  的解为

$$\mathbf{b}(z) = \begin{bmatrix} \exp(\lambda_i z) \\ \exp(-\lambda_i z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad \text{则} \quad \mathbf{V} = \mathbf{\Phi}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \exp(\lambda_i) \\ c_2 \exp(-\lambda_i) \end{bmatrix} \quad (29)$$

对于层状体系底部为半无限空间的情况,  $c_1 = 0$ , 则  $l$  层底部位移-应力关系为

$$\mathbf{p}_l = \mathbf{K}_\infty \mathbf{u}_l = \mathbf{\Phi}_{22} \mathbf{\Phi}_{12}^{-1} \mathbf{u}_l \quad (30)$$

对于层状体系第  $l+1$  层为刚性基岩的情况,  $l$  层底部无位移产生, 则边界条件为

$$\mathbf{u}_l = \mathbf{0} \quad (31)$$

对于层状体系底部为半无限空间的情况, 将式 (30) 代入 (26), 得到地表的位移和应力关系:

$$\mathbf{p}_0 = (\mathbf{Q} + \mathbf{E}\mathbf{K}_\infty(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{K}_\infty)^{-1}\mathbf{F})\mathbf{u}_0 \quad (32)$$

对于层状体系底部为刚性基岩的情况, 将公式 (31) 代入 (26), 得到地表的位移和应力关系:

$$\mathbf{p}_0 = (\mathbf{Q} + \mathbf{E}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{F})\mathbf{u}_0 \quad (33)$$

上述两种情况统一写成刚度矩阵方程的形式:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{S}_{l0}(\kappa)\mathbf{u}_0 \quad (34)$$

写成柔度矩阵方程的形式:

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{C}_{l0}(\kappa)\mathbf{p}_0, \quad \mathbf{C}_{l0} = \mathbf{S}_{l0}^{-1} \quad (35)$$

式中,  $\mathbf{S}_{l0}$  及  $\mathbf{C}_{l0}$  分别为波数域内层状体系表层的刚度矩阵及柔度矩阵。

根据式 (32)、(33) 和层状体系内任意激励点  $j$  及接收点  $i$  (参见图 4) 之间的合并系数矩阵, 即可建立  $j$  点应力及  $i$  点位移的关系式:

$$\begin{bmatrix} u_r(\kappa, z, \omega) \\ u_\theta(\kappa, z, \omega) \\ u_z(\kappa, z, \omega) \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} F_{rr} & F_{rz} \\ F_{\theta\theta} & F_{\theta z} \\ F_{rz} & F_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \begin{bmatrix} p_r(\kappa, z, \omega) \\ p_\theta(\kappa, z, \omega) \\ p_z(\kappa, z, \omega) \end{bmatrix}_j \quad (36)$$

式中,  $u_r$ ,  $u_\theta$ ,  $u_z$ ,  $p_r$ ,  $p_\theta$ ,  $p_z$  为层状体系的位移和应力。  $F_{rr}$ ,  $F_{rz}$ ,  $F_{\theta\theta}$ ,  $F_{\theta z}$  为平面内波动的柔度系数,  $F_{\theta\theta}$  为平面外波动的柔度系数。

### 1.3 任意荷载下层状体系内 Green 影响函数的求解

式 (36) 为波数域内位移和作用力之间的关系, 需将其转换为圆柱坐标系下的关系。

#### (1) 水平向均布荷载下的 Green 函数

在激励点  $j$  处的半径为  $\Delta r$  的圆形微元上作用有

$x$  向水平均布谐振荷载,  $\hat{p}_x$  为该谐振荷载在频率-空间域内的应力强度幅值, 如图 3 (a) 所示, 将其转换成圆柱坐标系内的径向荷载分量与环向荷载分量, 即  $\hat{p}_x \cos \theta$  和  $-\hat{p}_x \sin \theta$ , 由此产生的位移情况对应于公式 (6) 中  $n=1$  的对称分量。为简化书写, 将  $J_n(\kappa r)$  简写为  $J_n$ , 则利用式 (3),  $j$  点应力在频率-波数域内表达式为

$$\begin{Bmatrix} p_r(\kappa, z, \omega) \\ p_\theta(\kappa, z, \omega) \end{Bmatrix}_j = \frac{1}{\pi} \int_{r=0}^{\Delta r} \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} rJ_{1,r} & J_1 \\ J_1 & rJ_{1,r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}_x \cos \theta \\ -\hat{p}_x \sin \theta \end{Bmatrix} d\theta dr = \frac{\hat{p}_x \Delta r}{\kappa} J_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

利用式 (4)、(36)、(37) 可将频率-波数域内位移表达式进行 Bessel 逆变换得到接收点  $i$  的位移值在频率-空间域内的表达式为

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u}_r(r, z, \theta) \\ \tilde{u}_\theta(r, z, \theta) \\ \tilde{u}_z(r, z, \theta) \end{Bmatrix}_i = \frac{\Delta r}{2} \begin{bmatrix} \cos \theta & & \\ & -\sin \theta & \\ & & \cos \theta \end{bmatrix} \left( \int_0^\infty J_1(\kappa \Delta r) \begin{bmatrix} J_0 - J_2 & J_0 + J_2 \\ J_0 + J_2 & J_0 - J_2 \\ & & -2J_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{rr} \\ F_{\theta\theta} \\ F_{zz} \end{Bmatrix} d\kappa \right) \hat{p}_x \quad (38)$$

同理, 可得激励点  $j$  处的  $y$  向水平均布谐振荷载 (如图 3 (b)) 在接收点  $i$  处产生的频率-空间域位移表达式。

#### (2) 竖直向均布荷载下的 Green 函数

在激励点  $j$  处的半径为  $\Delta r$  的圆形微元上作用  $z$  向竖直均布谐振荷载,  $\hat{p}_z$  为该谐振荷载在频率-空间域内的应力强度幅值, 由此产生的位移情况对应于公式 (6)  $n=0$  的对称分量,  $j$  点应力在频率-波数域内表达式:

$$p_z(\kappa, z, \omega)_j = \frac{1}{2\pi} \int_{r=0}^{\Delta r} r(-J_0) \int_{\theta=0}^{2\pi} \hat{p}_z d\theta dr = -\frac{\hat{p}_z \Delta r}{\kappa} J_1 \quad (39)$$

利用式 (4)、(36)、(39) 可将频率-波数域内位移表达式进行 Bessel 逆变换得到接收点  $i$  的位移值在频率-空间域内的表达式为

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u}_r(r, z, \theta) \\ \tilde{u}_\theta(r, z, \theta) \\ \tilde{u}_z(r, z, \theta) \end{Bmatrix}_i = \Delta r \int_{\kappa=0}^\infty J_1(\kappa \Delta r) \begin{bmatrix} F_{rz} J_1 \\ F_{zz} J_1 \end{bmatrix} d\kappa \hat{p}_z \quad (40)$$

将激励点  $j$  的简谐力与接收点  $i$  的位移关系统一表示为

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u}_r(r, z, \theta) \\ \tilde{u}_\theta(r, z, \theta) \\ \tilde{u}_z(r, z, \theta) \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} F_{rx} & F_{ry} & F_{rz} \\ F_{\theta x} & F_{\theta y} & F_{\theta z} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}_x \\ \hat{p}_y \\ \hat{p}_z \end{Bmatrix}_j \quad (41)$$

式中,  $F_{rx}$  表示激励点  $j$  处圆形微元在  $x$  向荷载作用下

对接点  $i$  处的 Green 函数。

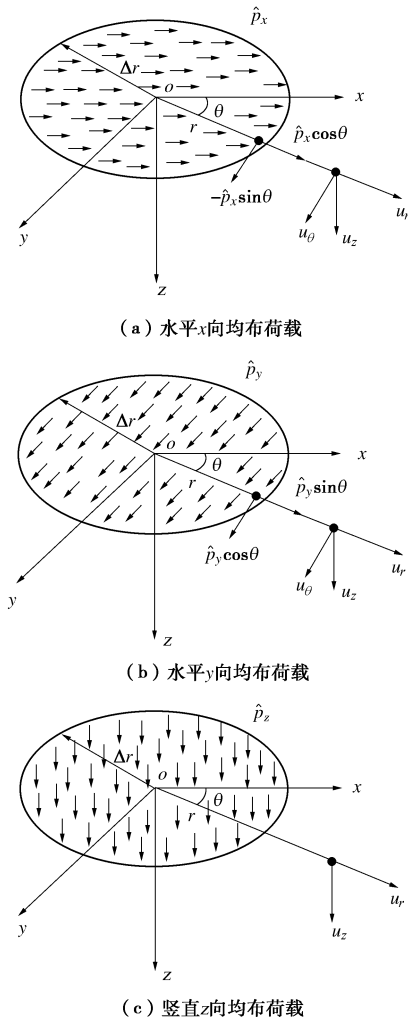


图 3 圆形微元受均布荷载作用

Fig. 3 Subdisk subjected to even load

为便于求解任意荷载下层状体系内部任意点的位移与应力, 可将式 (21) 转换成如下表达式:

$$\begin{Bmatrix} p_a \\ -p_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix}, \quad (42)$$

式中,

$$\begin{cases} K_{aa} = Q + EG^{-1}F, & K_{ab} = -EG^{-1}, \\ K_{ba} = -G^{-1}F, & K_{bb} = G^{-1}. \end{cases} \quad (43)$$

以 3 层体系为例, 如图 4 所示, 阐述体系内任意点处位移及应力的求解方法。各结构层均满足式 (42), 则

$$\begin{matrix} 1 \text{ 层} \\ \begin{Bmatrix} p_0^1 \\ -p_1^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0^1 \\ u_1^1 \end{Bmatrix} \end{matrix}, \quad (44)$$

$$\begin{matrix} 2 \text{ 层} \\ \begin{Bmatrix} p_1^2 \\ -p_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} \end{matrix}, \quad (45)$$

$$\begin{matrix} 3 \text{ 层} \\ \begin{Bmatrix} p_2^3 \\ -p_3^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^3 & K_{12}^3 \\ K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2^3 \\ u_3^3 \end{Bmatrix} \end{matrix}, \quad (46)$$

式中, 向量的上标表示位移或应力所属的层编号, 下标表示位移或应力的编号。将式 (44) ~ (46) 组合, 进行层状地基位移和应力的求解:

$$\begin{Bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & & \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & \\ & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 \\ & & K_{21}^3 & K_{22}^3 + K_{\infty} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}, \quad (47)$$

式中,

$$P_0 = p_0^1, P_1 = -p_1^1 + p_1^2, P_2 = -p_2^2 + p_2^3, P_3 = -p_3^3 + p_l, \\ U_0 = u_0^1, U_1 = u_1^1 = u_1^2, U_2 = u_2^2 = u_2^3, U_3 = u_3^3 = u_l.$$

利用式 (47) 可求得层状体系的位移与应力表达式。将位移表达式中的系数矩阵代入式 (41), 可得到  $j$  点荷载与  $i$  点位移的关系为

$$\tilde{u}_i^j = F_{ij} \hat{p}_j, \quad (48)$$

式中,  $F_{ij}$  为圆柱坐标系下  $j$  点单位荷载在  $i$  点产生 Green 函数。

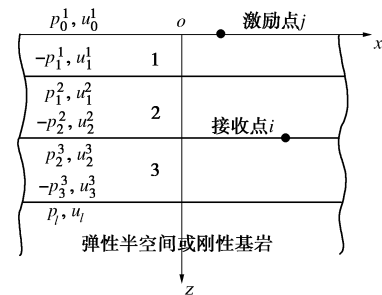


图 4 层状体系内部位移及应力计算模型

Fig. 4 Computational model of displacement and stress within multilayered system

对于路面受任意荷载分布的情况, 如图 5 所示, 可将荷载作用的区域用  $n$  个半径为  $\Delta r$  的圆形微元来表示, 每个微元上作用的荷载可以不同, 每个微元的圆心可组成节点群, 所有微元的面积总和等于荷载作用区域的面积, 在弹性体系内, 可通过叠加原理求解任意位置处的位移或应力。根据课题组经验, 在实际划分圆形微元时, 微元的个数、大小及位置会影响计算精度, 此处理方法与有限元网格相类似, 当微元个数越多、半径越小、分布越均匀时, 得到的结果越好。将  $\tilde{u}_i^j$  由圆柱坐标系转换为直角坐标系表示, 转换矩阵为

$$H_i^j = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (49)$$

式中,  $\theta_i$  为  $i$  点相对于  $j$  点的转角, 利用式 (49), 可得  $\tilde{u}_i^j$  在直角坐标系下的应力 - 位移关系为

$$\hat{u}_i^j = H_i^j F_{ij} \hat{p}_j. \quad (50)$$

则任意荷载作用下层状体系内任意位置*i* 处的位移可通过叠加所有 *n* 节点对*i* 的位移获得, 则*i* 点位移为

$$\hat{u}_i = \sum_{j=1}^n \hat{u}_i^j = \sum_{j=1}^n H_i^j F_{ij} \hat{P}_j \quad (51)$$

节点群的位移与荷载的可表示为

$$\hat{u} = (\hat{u}_1 \quad \hat{u}_2 \quad \cdots \quad \hat{u}_n)^T, \quad \hat{P} = (\hat{P}_1 \quad \hat{P}_2 \quad \cdots \quad \hat{P}_n)^T. \quad (52)$$

节点群位移与荷载的关系为  $\hat{u} = H F \hat{P}$ , 展开为

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1^1 F_{11} & H_1^2 F_{12} & \cdots & H_1^n F_{1n} \\ H_2^1 F_{21} & H_2^2 F_{22} & \cdots & H_2^n F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_N^1 F_{N1} & H_N^2 F_{N2} & \cdots & H_n^n F_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \vdots \\ \hat{P}_n \end{bmatrix}, \quad (53)$$

由此可得到层状体系任意位置的位移响应。

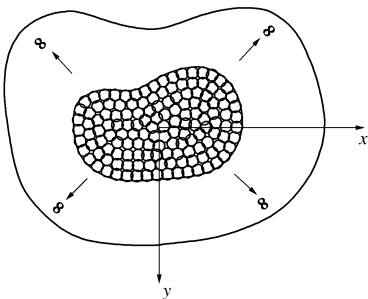


图 5 任意荷载分布和任意形状荷载作用区域的离散

Fig. 5 Discretization for loading area of arbitrary shape with arbitrary distribution of loads

同理, 将应力表达式中的系数矩阵代入式 (41) 并采用上述相同的求解方式, 即可得到层状体系内部任意位置或节点群的应力响应。

2 数值算例

2.1 计算结果验证

卢正等<sup>[14]</sup>针对层状公路结构的动力响应进行了两组室内大型模型试验。该模型长为 2.3 m, 横向顶宽为 2.0 m, 横向底宽为 3.6 m, 边坡坡度为 45°, 由 6 个结构层组成, 底部为刚性基岩。各层物理参数如下表 1 所示。试验荷载按照规范<sup>[15]</sup>规定采用双圆均布荷载模拟交通荷载, 单圆半径为  $R=0.1065\text{ m}$ , 双圆间距为  $3R$ , 荷载大小为 75 kN, 加载频率为 5 Hz。结构层、荷载及测点布置如图 6 所示。

表 1 模型试验各结构层参数<sup>[14]</sup>

Table 1 Parameters of structural layers of model tests<sup>[14]</sup>

结构	回弹模量/MPa	泊松比	厚度/m	密度/(g·cm <sup>3</sup> )
沥青面层	1400.00	0.30	0.18	2.4
基层	689.87	0.30	0.30	2.2
底基层	536.48	0.30	0.30	2.2
路基 1 层	31.52	0.35	0.30	2.0
路基 2 层	33.56	0.35	0.30	2.0
路基 3 层	36.45	0.35	0.30	2.0

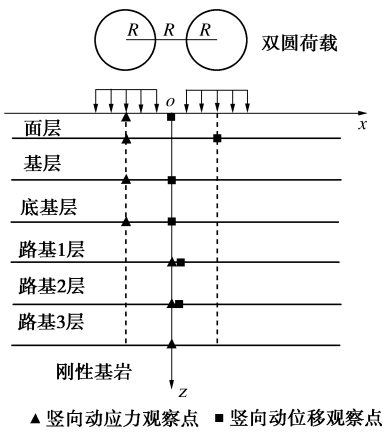


图 6 数值计算观察点<sup>[14]</sup>

Fig. 6 Observing points for numerical calculation<sup>[14]</sup>

道路设计软件 BISAR3.0 是荷兰 Shell (壳牌) 沥青公司开发研制的一款辅助设计类产品, 其理论基础是弹性层状体系力学, 可计算静力双圆形路面荷载下的层状路面结构各点处应力、应变状态及位移。为了验证本文方法的正确性, 分别应用 BISAR3.0 程序及本文混合变量法 (MVF) 对层状体系进行计算, 并结合文献<sup>[14]</sup>的试验结果进行讨论分析。考虑到 BISAR3.0 程序的计算特点, 采用图 6 所示的下卧弹性半空间的层状结构体系进行计算, 选取观测点为图 6 中荷载中心点下虚线与层间接触面的交点。图 7, 8 分别给出了观测点处的应力及位移值。由表 2 可知,

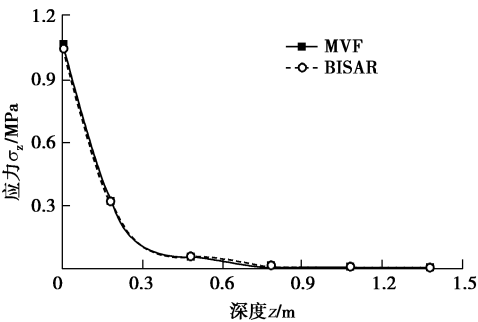


图 7 竖向动应力幅值的 MVF 与 BISAR3.0 计算结果比较

Fig. 7 Comparison of calculated vertical stresses between MVF and BISAR3.0 program

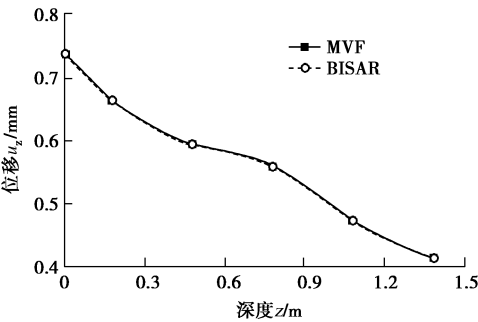


图 8 竖向动位移幅值的 MVF 与 BISAR3.0 计算结果比较

Fig. 8 Comparison of calculated vertical displacement between MVF and BISAR3.0 program

表 2 MVF 与 BISAR3.0 程序的计算结果比较

Table 2 Comparison of calculated results between MVF and BISAR3.0 program						
深度 /m	竖向动应力/MPa		相对误 差/%	竖向动位移/mm		相对误 差/%
	MVF	BISAR3.0		MVF	BISAR3.0	
0.00	1.063200	1.052000	1.065	0.73601	0.7356	0.056
0.18	0.327110	0.327100	0.003	0.66471	0.6643	0.062
0.48	0.061259	0.061240	0.031	0.59535	0.5949	0.076
0.78	0.011146	0.011150	0.036	0.56086	0.5604	0.082
1.08	0.007761	0.007767	0.066	0.47439	0.4739	0.103
1.38	0.005884	0.005889	0.070	0.41563	0.4152	0.103

本文 MVF 及 BISAR3.0 程序的计算结果高度吻合, 相对误差非常小, 可以说明本文的计算方法是行之有效的, 并且, 本文方法能够处理更为复杂的荷载形式及复杂的荷载作用区域形状, 能够求解任意位置的位移及应力。为简便, 下文中的 $u_z$ 及 $\sigma_z$ 均为直角坐标系的表示方法。

应用本文方法对文献[14]中的结构进行计算并与其试验结果相比较, 如图 9, 10 所示, 混合变量法 (MVF) 结果与试验结果在应力及位移方面均出现一定偏差, 这是可以想象得到的, 两者出现差异的原因可以分析如下: ①土是强非线性介质, 剪切模量及阻尼比随着剪应变的大小而变化, 这就要求在计算过程中, 通过迭代法不断调整这两种参数, 使之符合剪应变的大小。由于文献[14]并没有给出相应的土体物理学参数随剪应变大小的变化规律, 所以本文基于线弹性理论体系的计算结果与其试验结果并不能相提并论。但基于土的线弹性计算方面, 本文提出的计算方法能够给出精确的解答。②试验中地基为有限区域, 本文计算按无限域考虑, 地基刚度发生变化。

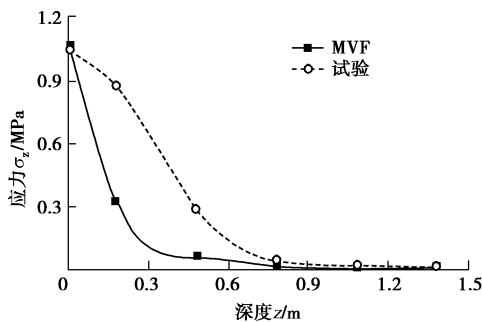


图 9 竖向动应力幅值的 MVF 与 BISAR3.0 计算结果比较  
Fig. 9 Comparison of calculated vertical stress between MVF and BISAR3.0 program

2.2 双圆荷载下路面位移分布形式

应用本文方法, 针对图 6 层状体系, 计算幅值为 75 kN, 频率为 8 Hz 的双圆均布竖向谐振荷载下路面位移情况。如图 11, 12 所示, 路表面的 $u_x$ 关于  $y$  轴

成反对称分布, 最大值 0.016 mm 在  $x = \pm 3$  m 处产生, 路表面的 $u_z$ 关于  $y$  轴成对称分布, 最大值 0.292 mm 在  $x = 0$  m 处产生, 振动强度随着距离的增加而减弱, 车辆对路面产生的变形主要以竖向变形为主, 该荷载对路面的影响范围为荷载作用点前后 50 m。

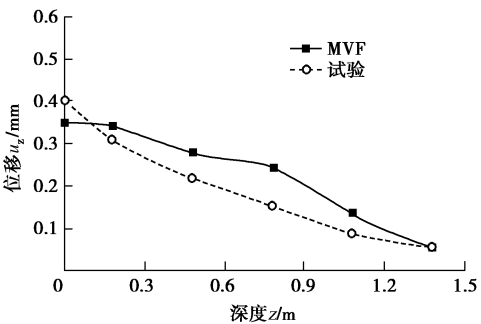


图 10 竖向动位移幅值的 MVF 与试验结果比较  
Fig. 10 Comparison of calculated vertical displacement between MVF and experimental results

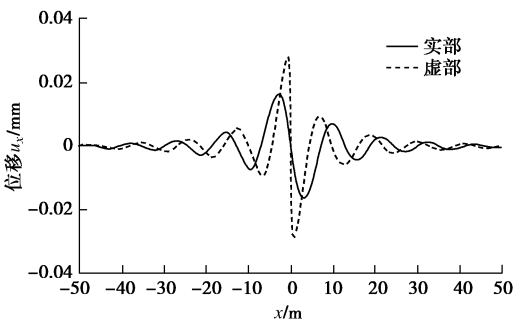


图 11 水平纵向位移  $u_x$  沿  $x$  轴分布  
Fig. 11 Distribution of longitudinal displacement  $u_x$  along  $x$  axis

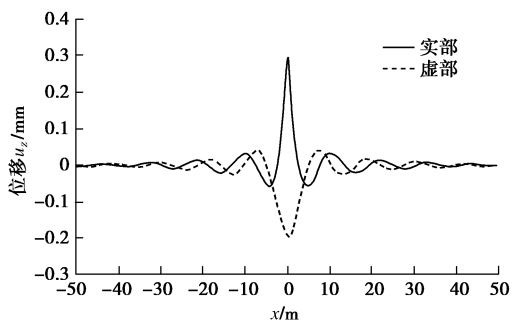


图 12 竖向动位移  $u_z$  沿  $x$  轴分布  
Fig. 12 Distribution of vertical displacement  $u_z$  along  $x$  axis

2.3 轮胎荷载下层状体系的位移及应力的分布情况

应用本文方法计算单个车轮作用下路面的变形及应力分布情况。将单个轮胎作用于路面的荷载简化为矩形均布荷载形式。竖向均布谐振力幅值  $\hat{p}_z = 25$  kN (模拟载重), 水平纵向均布谐振力幅值  $\hat{p}_x = -1$  kN (模拟摩擦力), 荷载作用区域的长和宽分别均为 0.2 m, 荷载频率 8 Hz, 路面结构仍采用图 6 所示层状体系, 材料参数同表 1, 部分计算结果如图 13~17 所示。



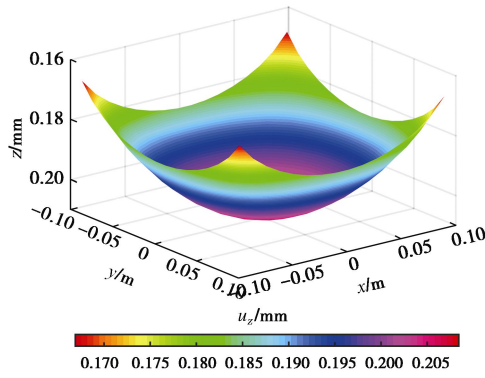
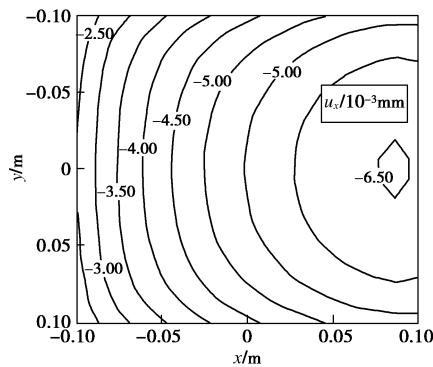
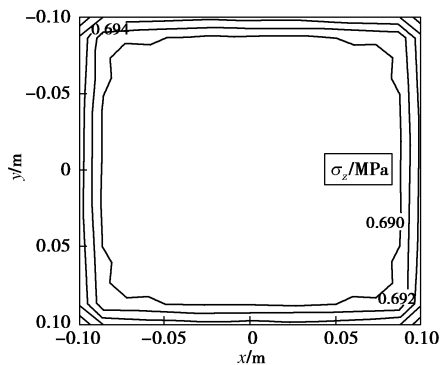
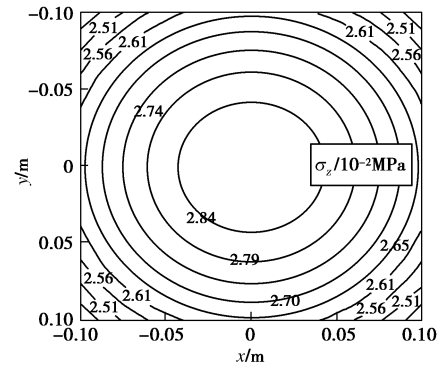
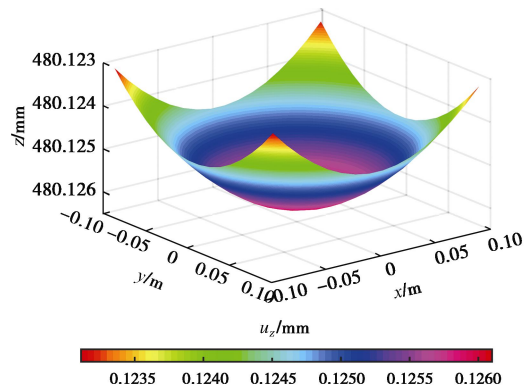
图 13 路面变形及竖向位移  $u_z$  分布Fig. 13 Pavement deformation and distribution of vertical displacement  $u_z$ 图 14 路面纵向位移  $u_x$  分布Fig. 14 Distribution of longitudinal displacement  $u_x$  at surface of road图 15 路面竖向应力  $\sigma_z$  分布Fig. 15 Distribution of vertical stress  $\sigma_z$  at surface of road

图 13 描述了路面（标高 0 mm 处）在单轮竖向谐振力与水平摩擦谐振力的共同作用下的变形情况，同时用颜色标识了竖向位移  $u_z$  的分布情况。由图可见，竖向位移在荷载中心处最大，四周最小，以圆形形式向四周逐渐减小。图 14 描绘了纵向位移  $u_x$  在  $xoy$  平面上的等高线图，可以看到，纵向位移  $u_x$  在右侧最大，左侧最小， $u_x$  关于  $x$  轴对称分布，位移的变化率从右至左逐渐增大。图 15 为路面竖向应力  $\sigma_z$  在  $xoy$  平面上的等高线图，可知竖向应力  $\sigma_z$  在四个角点处最大，中间部位较小，但其变化率较小。为了解该层状

体系内的位移及应力分布情况，提取基层底面（标高 480 mm 处）的位移及应力计算结果，如图 16 所示，竖向应力  $\sigma_z$  在中心处最大，并向四周逐渐减小，通过对比图 15 可知，竖向应力的分布情况在路表面与内部完全不同，表现为应力变化率的改变和分布形式的改变。图 17 描述了基层底面的变形及竖向位移  $u_z$  分布情况，通过对比图 13, 17 可知，基层的竖向位移小于面层的位移。

图 16 基层底面应力  $\sigma_z$  分布Fig. 16 Distribution of vertical stress  $\sigma_z$  at bottom of the base图 17 基层底面变形及竖向位移  $u_z$  分布Fig. 17 Deformation of bottom of base and distribution of vertical displacement  $u_z$ 

### 3 结 论

(1) 数值算例表明，在计算层状体系弹性动力学响应时，本文计算方法与 BISAR3.0 计算结果高度吻合，可为工程路面结构设计提供可靠的计算依据。

(2) 本文提出的 Fourier-Bessel 变换为基础的混合变量方法具有广泛的适用性，具有处理复杂荷载下动力响应问题的能力 & 处理各向异性介质的潜力，计算简便，精度高。

(3) 本文提出的混合变量法为求解任意荷载作用下层状体系的动力响应问题提供了一种有效的求解途径。通过积分变换将波动方程解耦为波数域下的平面内及平面外的波动方程，进而引入对偶变量将波动方

程转变为状态方程,采用精细积分算法显著提高了计算效率,并获得计算机精度意义下的解析解,可以保证高频区的收敛性,避免了通常文献中出现的指数溢出问题。

### 参考文献:

- [1] THOMSON W T. Transmission of elastic waves through a stratified medium[J]. *Journal of Applied Physics*, 1950, **21**: 89 - 93.
- [2] HASKELL N A. The dispersion of surface waves in multilayered media[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1953, **43**(1): 17 - 34.
- [3] KAUSEL E, ROESSET J M. Stiffness matrices for layered soils[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1981, **71**(6): 1743 - 1761.
- [4] 蒋 通, 程昌熟. 用二次形函数薄层法分析弹性层状地基中的动力问题[J]. *力学季刊*, 2006, **27**(3): 495 - 504. (JIANG Tong, CHENG Chang-shu. Dynamic analysis of elastic stratified soil problems by using thin layer method with quadratic shape function[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2006, **27**(3): 495 - 504. (in Chinese))
- [5] WOLF J P, SONG C M. The scaled boundary finite-element method-a primer: derivations[J]. *Computers and Structures*, 2000, **78**: 191 - 210.
- [6] SONG C M, WOLF J P. The scaled boundary finite-element method-alias consistent infinitesimal finite- element cell method-for elastodynamics[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1979, **147**: 329 - 355.
- [7] BIRK C, BEHNKE R. A modified scaled boundary soil-structure interaction in layered soil[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2012, **89**(3): 371 - 402.
- [8] LU Shan, LIU Jun, LIN Gao. A time domain solution for complex multilayered soil model with circular inhomogeneity by the SBFEM[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2016, **71**: 652 - 675.
- [9] ZHONG W X, LIN J H, GAO Q. The precise computation for wave propagation in stratified material[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, **60**(1): 11 - 25.
- [10] 韩泽军, 林 皋, 周小文, 等. 横观各向同性层状地基上埋置刚性条带基础动力刚度矩阵求解[J]. *岩土工程学报*, 2016, **38**(6): 1117 - 1124. (HAN Ze-jun, LIN Gao, ZHOU Xiao-wen. Solution of dynamic stiffness matrix for rigid strip foundations embedded in layered transversely isotropic soil[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2016, **38**(6): 1117 - 1124. (in Chinese))
- [11] LIN G, HAN Z J, LI J B. An efficient approach for dynamic impedance of surface footing on layered half-space[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2013, **49**: 39 - 51.
- [12] LIN G, HAN Z J, LU S, et al. Wave motion equation and the dynamic Green's function for a transverse isotropic multilayered half-space[J]. *Soils and Foundations*, 2017, **57**: 397 - 411.
- [13] 孙 锐, 陈红娟, 袁晓铭. 土的非线性动剪切模量比和阻尼比不确定性分析[J]. *岩土工程学报*, 2010, **32**(8): 1228 - 1235. (SUN Rui, CHEN Hong-juan, YUAN Xiao-ming. Uncertainty of non-linear dynamic shear modular ratio and damping ratio of soils[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2010, **32**(8): 1228 - 1235. (in Chinese))
- [14] 卢 正, 姚海林, 胡梦玲, 等. 基于传递-反射矩阵法的层状公路结构动力响应研究[J]. *岩土力学*, 2012, **33**(12): 3767 - 3774. (LU Zheng, YAO Hai-lin, HU Meng-ling, et al. Study of dynamic response of multilayered road structures based on transmission-reflection matrix method[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2012, **33**(12): 3767 - 3774. (in Chinese))
- [15] JTG D50—2017 公路沥青路面设计规范[S]. 2017. (JTG D50—2017 Specifications for design of highway asphalt pavement[S]. 2017. (in Chinese))