

DOI: 10.11779/CJGE201812008

基于随机多项式展开的流固耦合非饱和土坡概率反分析

吴芳^{1, 2, 3}, 张璐璐^{1, 2, 3}, 郑文棠⁴, 魏鑫^{1, 2, 3}

(1. 上海交通大学海洋工程国家重点实验室, 上海 200240; 2. 高新船舶与深海开发装备协同创新中心, 上海 200240;
3. 上海交通大学土木工程系, 上海 200240; 4. 中国能源建设集团广东省电力设计研究院有限公司, 广东 广州 510663)

摘要: 降雨入渗条件下非饱和土坡流固耦合作用复杂, 具有高度非线性特点, 一般采用数值方法模拟。数值模型计算量大已成为监测数据概率反分析的重要制约因素。提出一种基于随机多项式展开(PCE)的概率反分析方法。该方法采用随机多项式展开构建土性参数与数值模型响应的显式函数, 作为概率反分析中原数值模型的代替模型, 与基于贝叶斯理论和马尔可夫链蒙特卡罗(MCMC)模拟的概率反分析方法相结合, 从而有效提高非饱和土坡流固耦合参数概率反分析的效率。通过降雨入渗非饱和土坡算例研究, 结果表明, 与基于数值模型的常规随机反分析相比, 两种方法在后验分布统计值、95%置信区间等结果非常接近, 基于PCE的概率反分析计算效率显著提高, 结果可靠。

关键词: 反分析; 非饱和土; 流固耦合模型; 随机多项式展开; 马尔可夫链蒙特卡罗模拟

中图分类号: TU47 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2018)12-2215-08

作者简介: 吴芳(1993-), 女, 硕士, 主要从事岩土工程概率可靠度与风险分析方面的研究工作。E-mail: cewufang@163.com。

Probabilistic back analysis method for unsaturated soil slopes with fluid-solid coupling process based on polynomial chaos expansion

WU Fang^{1, 2, 3}, ZHANG Lu-lu^{1, 2, 3}, ZHENG Wen-tang⁴, WEI Xin^{1, 2, 3}

(1. State Key Laboratory of Ocean Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China; 2. Collaborative Innovation Center for Advanced Ship and Deep-Sea Exploration, Shanghai 200240, China; 3. Department of Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China; 4. China Energy Engineering Group Guangdong Electric Power Design Institute Co., Ltd., Guangzhou 510663, China)

Abstract: The seepage and stress-deformation in an unsaturated slope under rainfall infiltration are interacted with high nonlinearity. Numerical models are commonly adopted to solve the coupled governing equations. Tremendous computational cost of numerical modeling is the main obstacle for probabilistic back analysis with field monitoring data. A probabilistic back analysis method based on polynomial chaos expansion (PCE) is proposed in this study. PCE approximation is used to construct the explicit functions between unsaturated soil parameters and model responses to replace the original numerical model. The PCE surrogate model is adopted in parameter posterior inference with Markov chain Monte Carlo (MCMC) simulation based on the Bayesian theory. An example of unsaturated soil slope under rainfall infiltration is presented to illustrate the efficiency of the proposed method. The statistics of posterior distribution and 95% uncertainty bounds obtained using the PCE-based method are close to the results of the traditional back analysis based on the original numerical model. In addition, the proposed new method can significantly improve the efficiency of model calibration.

Key words: back analysis; unsaturated soil; coupled hydro-mechanical model; polynomial chaos expansion; Markov chain Monte Carlo simulation

0 引言

降雨诱发的滑坡灾害在全球广泛分布, 具有群发性、季节性的特点, 每年因灾死亡达数千人, 经济损失巨大。降雨入渗过程中坡体渗流场、应力场、变形场相互作用^[1-2], 要准确评价非饱和土坡在降雨入渗条件下的稳定性, 需采用考虑渗流场和应力场的耦合作

用的计算方法^[3-7]。由于土体存在自然变异性, 室内试验获得的土性参数不能完全反映现场情况, 确定性分

基金项目: 国家重点基础研究发展计划“973”项目(2014CB049100); 国家自然科学基金项目(51422905, 51679135); 中组部青年拔尖人才计划

收稿日期: 2017-10-09

析方法很难获得与工程实测数据一致的结果。近年来,国内外研究者利用现场监测数据进行参数反分析,取得了大量成果。杨林德等^[8]提出了考虑初始应力的线性和非线性位移反分析法。杨志法等^[9]提出用于位移反分析的图谱法,根据图谱由位移量测值反演地应力及围岩参数。黄宏伟等^[10]考虑模型输入和输出不确定性提出了贝叶斯广义参数反分析方法。冯夏庭等^[11]应用神经网络结合有限元进行位移反分析。陈斌等^[12]针对传统贝叶斯法中观测信息与先验信息不匹配的缺陷,提出扩展贝叶斯法。Zhang 等^[13]基于系统辨识理论提出了边坡稳定性概率反分析方法。Zhang 等^[14-15]提出了失稳信息同时反演强度参数和模型误差的边坡概率反分析方法,并利用时变监测数据进行了概率反分析。Juang 等^[16]基于贝叶斯反分析法,利用基坑工程分步开挖地表沉降与挡墙变形监测数据反演土体力学参数。Kelly 等^[17]基于沉降与超孔压监测数据反演了一维单面排水弹性土体固结参数。Li 等^[18]基于贝叶斯理论和支持向量机方法,采用位移监测数据反演岩质边坡参数。

采用监测数据对非饱和土坡流固耦合模型进行反分析的难点在于,由于非饱和土力学特性的高度非线性,解析解一般只针对一维问题和特定的初始条件和边界条件^[19],难以直接用于复杂情况分析;数值方法适应性好,但计算量大,即使采用相对高效的抽样方法,整体随机反分析的计算量也难以承受。近年来基于随机多项式展开(Polynomial Chaos Expansion,简称 PCE)的随机有限元方法在岩土工程可靠度分析方面取得了良好的效果。代表性的工作包括:黄淑萍等^[20-22]提出了基于概率配点法的谱随机有限元分析随机响应面方法,研究了其在结构可靠度和边坡可靠度分析中的应用。李典庆等^[23-24]考虑非正态随机变量之间的互相关性,将基于 PCE 的随机响应面法应用于岩质边坡可靠度分析,提出基于 PCE 的非侵入式随机有限元法,应用于地下洞室变形可靠度分析。Jiang 等^[25]通过 PCE 构建边坡稳定系统可靠度的多重响应面函数,研究了空间变异性对系统可靠度的影响。

针对现有非饱和土坡流固耦合反分析研究的不足,本文提出一种基于随机多项式展开的概率反分析方法,采用随机多项式展开建立非饱和土坡耦合分析的代替模型,通过马尔可夫链蒙特卡罗模拟对代替模型进行概率反分析,有效减小计算量提高反分析效率,通过算例研究与基于数值模型的常规概率反分析比较,探讨所提出方法的计算精度和效率。

1 非饱和土流固耦合理论

非饱和土流固耦合的基本控制方程包括力的平衡

方程和渗流连续方程。首先,非饱和土单元的二维应力状态满足下列平衡关系:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, σ_x 和 σ_y 分别为 x 和 y 方向的主总应力, τ_{xy} 为 x 平面上 y 方向的剪应力 ($\tau_{xy} = \tau_{yz}$), b_x 和 b_y 分别为 x 和 y 方向的体力。

采用 Bishop 非饱和和有效应力公式^[26]:

$$\sigma' = \sigma - u_a + \chi(u_a - u_w), \quad (2)$$

式中, σ' 为有效应力, σ 为总应力, u_a 和 u_w 分别为孔隙气压力和孔隙水压力, χ 为非饱和土有效应力参数。假设非饱和土孔隙与大气连通,则 u_a 为 0。

土体本构模型采用满足 Mohr-Coulomb 准则的理想弹塑性模型,非饱和土抗剪强度表示为^[27]

$$\tau_f = c' + (\sigma - u_a) \tan \phi' + \chi(u_a - u_w) \tan \phi', \quad (3)$$

式中, τ_f 为非饱和土抗剪强度, c' 为有效黏聚力, ϕ' 为有效内摩擦角。本文假定非饱和土有效应力参数 χ 等于饱和度 S ^[28]。

由质量守恒和 Darcy 定律,非饱和土二维非稳态渗流控制方程可表示为^[29]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right] = \frac{\partial \theta_w}{\partial t}, \quad (4)$$

式中, k_x 和 k_y 分别为 x 和 y 方向的渗透系数, θ_w 为体积含水率, t 为时间, H 为总水头 ($H = y + u_w / \gamma_w$, γ_w 为水重度)。对于各向同性均质土, k_x 等于 k_y , 下文简写为 k 。本文采用 VGM (van Genuchten-Mualem) 模型^[30-31]描述非饱和土饱和度和渗透系数,表示如下:

$$S = \frac{\theta_w - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \begin{cases} (1 + |\alpha u_w|^{n_w})^{-m_w} & (u_w < 0) \\ 1 & (u_w \geq 0) \end{cases}, \quad (5)$$

$$k(S) = k_s S^l \left[1 - (1 - S^{1/m_w})^{m_w} \right]^2, \quad (6)$$

式中, θ_s 和 θ_r 分别为饱和和残余体积含水率, α 是进气值倒数相关的参数, n_w 和 m_w 为水力特性参数, $m_w = (1 - 1/n_w)$, k_s 为饱和渗透系数, l 为孔隙连通性参数。

2 随机多项式展开代替模型

本文采用随机多项式展开(PCE)构建响应和随机变量的显式函数来代替非饱和土坡流固耦合数值模型。随机多项式展开是以正交多项式为基函数的一种模型近似方法。定义输入参数为随机向量 $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, 假定 n 维随机变量相互独立。原模型响应 F 可采用如下随机多项式展开^[32]来表示:

$$F(\boldsymbol{\theta}) = a_0 \Gamma_0 + \sum_{i1=1}^n a_{i1} \Gamma_1(\theta_{i1}) + \sum_{i1=1}^n \sum_{i2=1}^{i1} a_{i1i2} \Gamma_2(\theta_{i1}, \theta_{i2}) + \sum_{i1=1}^n \sum_{i2=1}^{i1} \sum_{i3=1}^{i2} a_{i1i2i3} \Gamma_3(\theta_{i1}, \theta_{i2}, \theta_{i3}) + \cdots + \sum_{i1=1}^n \cdots \sum_{ip=1}^{i_{p-1}} a_{i1 \cdots ip} \Gamma_p(\theta_{i1}, \cdots, \theta_{ip}) + \cdots, \quad (7)$$

式中, $a_0, a_{i1}, \cdots, a_{i1 \cdots ip}$ 为待定系数, p 为多项式的阶数, $\Gamma_p(\theta_{i1}, \cdots, \theta_{ip})$ 表示 p 阶多变量正交多项式。

正交多项式类型选取由随机变量分布决定, 高斯分布对应 Hermite 多项式, Beta 分布对应 Jacobi 多项式, Gamma 分布对应 Laguerre 多项式, 均匀分布对应 Legendre 多项式。由于土性参数一般服从正态或对数正态分布^[33], 本文采用 Hermite 多项式作为基函数, 则式(7)中 p 阶多项式为 Hermite 多项式:

$$\Gamma_p(\theta_{i1}, \cdots, \theta_{ip}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^p e^{\theta^T \theta} \frac{\partial^p}{\partial \theta_{i1} \cdots \partial \theta_{ip}} e^{-\theta^T \theta}. \quad (8)$$

为简化表达, 式(7)也可表示为

$$F(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{U-1} d_i \boldsymbol{\Psi}_i(\boldsymbol{\theta}), \quad (9)$$

式中, d_i 为第 i 个待定系数, $\boldsymbol{\Psi}_i(\boldsymbol{\theta})$ 为第 i 个正交多项式, U 为随机多项式展开的项数。在 n 维随机变量空间, 当多项式 $\boldsymbol{\Psi}_i(\boldsymbol{\theta})$ 最高阶数为 p 时, 式(9)展开项数 $U = (p+n)!/(p!n!)$ 。基函数 $\boldsymbol{\Psi}_i(\boldsymbol{\theta})$ 和 $\Gamma_p(\theta_{i1}, \cdots, \theta_{ip})$, 待定系数 d_i 和 $a_{i1 \cdots ip}$ 之间存在一一对应关系^[32]。求解展开式系数 d_i 的方法包括回归法和投影法等^[34]。本文采用谱投影法^[35]来计算待定系数:

$$d_i = \frac{\sum_{j=1}^Q F(\boldsymbol{\theta}_j) \boldsymbol{\Psi}_i(\boldsymbol{\theta}_j) w_j}{\langle \boldsymbol{\Psi}_i^2(\boldsymbol{\theta}) \rangle}, \quad (10)$$

式中, $\boldsymbol{\theta}_j$ 表示随机变量空间中任意一配点, w_j 是 $\boldsymbol{\theta}_j$ 对应权重系数, Q 为配点数目, $\langle \boldsymbol{\Psi}_i^2(\boldsymbol{\theta}) \rangle$ 表示第 i 个多维正交多项式内积。

谱投影法的关键在于选择合适的配点, 配点分布和数目直接影响计算精度和效率。常用的配点法包括

张量积法、Stroud 配点法、稀疏网格配点法和概率配点法。本文采用基于 Smolyak 算法^[36]的稀疏网格配点法。与张量积法不同, Smolyak 算法通过构造张量积的线性组合并根据一定的权重来组合配点, 配点数不随维度呈几何级数增加, 在大量减少所需的点数同时能保证较小的插值误差, 适用于处理高维问题。稀疏网格配点总数 Q 是配点阶数和随机变量维度的函数, Q 的计算方法详见文献^[37]。一般建议稀疏网格配点阶数与多项式展开阶数 p 相同^[38]。对于 Hermite 多项式展开, 稀疏网格配点采用高斯积分点。二维随机变量空间的稀疏网格配点如图 1 所示。随机变量维度为 2, 1 阶, 2 阶和 3 阶配点数目分别为 5, 22 和 75。

3 基于随机多项式展开的概率反分析

定义 t_1 到 t_N 时刻随机多项式展开 PCE 代替模型响应为向量 $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = \{F_1(\boldsymbol{\theta}), \cdots, F_N(\boldsymbol{\theta})\}$, 其中 N 表示数据量。 $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})$ 与实测值 $\mathbf{g} = \{g_1, \cdots, g_N\}$ 的误差向量为 $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_N\}$, t_i 时刻对应的误差为

$$\varepsilon_i = g_i - F_i(\boldsymbol{\theta}). \quad (11)$$

假定误差向量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 满足独立等方差高斯分布, 即 $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, 其中 σ_ε^2 是未知的常数方差, 则似然函数可表示为^[39]

$$L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{g}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp\left(-\frac{(g_i - F_i(\boldsymbol{\theta}))^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right). \quad (12)$$

基于贝叶斯原理, 由式(12)和参数先验分布可得到随机向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的后验概率密度函数如下:

$$f(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{g}) = b \cdot f(\boldsymbol{\theta}) \cdot L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{g}), \quad (13)$$

其中, b 为归一化系数, $f(\boldsymbol{\theta})$ 为随机向量 $\boldsymbol{\theta}$ 先验概率密度函数。

采用马尔可夫链蒙特卡罗 (Markov Chain Monte Carlo, 简称 MCMC) 方法, 对参数后验分布随机取样, 计算随机样本的后验分布估计值 (均值、方差、置信区间)。具体算法为 Vrugt 等^[40]提出的自适应差分

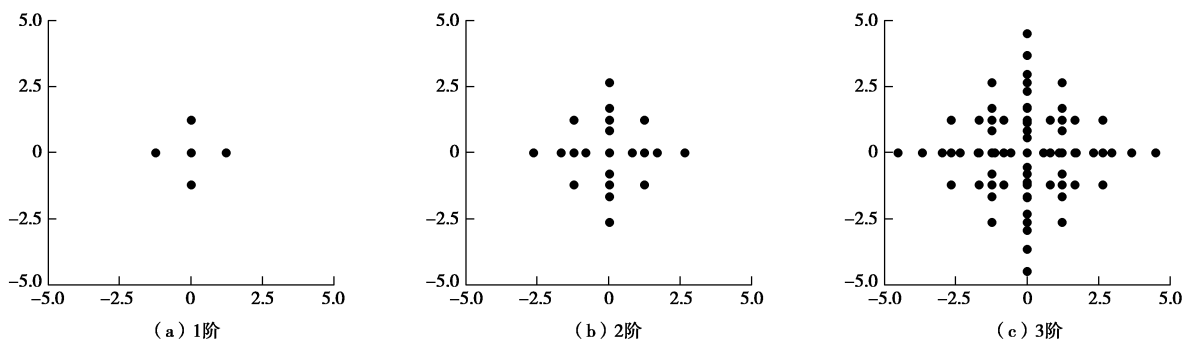


图 1 二维 1~3 阶稀疏网格配点

Fig. 1 1-, 2- and 3-level sparse grids in two-dimensional random space

演化 Metropolis 算法 (Differential Evolution Adaptive Metropolis Algorithm, 简称 DREAM)。该算法可同时运行多链, 能自动调节 Metropolis 转移函数的比例和方位进行全局搜索, 可高效地处理高维、强非线性的复杂问题。采用 Gelman 和 Rubin 提出的基于链内和链间方差的 R 收敛准则^[41]来判定收敛性。当各参数 R_{stat} 值均小于 1.2 时, 则马尔可夫链收敛于稳定的后验分布。DREAM 算法和 R_{stat} 值计算公式详见文献[40]。

以降雨入渗非饱和土坡的参数反演为例, 基于随机多项式展开的概率反分析方法的具体步骤如下:

(1) 建立降雨入渗非饱和土坡流固耦合数值模型。

(2) 明确需要反演的随机向量 θ 和先验分布, 对先验分布进行正态变换, 转化为独立高斯分布, 生成稀疏网格配点和相应权重。

(3) 将配点映射得到原始参数向量空间, 运行配点对应的数值模型得到响应 (如孔压和位移)。

(4) 利用谱投影法求解多项式系数, 得到随机多项式展开的显式表达式。

(5) 根据实测数据确定似然函数, 采用 MCMC 方法生成参数后验分布随机样本, 其中响应采用 PCE 代替数值模型计算。

(6) 计算后验分布统计值, 均值、标准差、最大后验概率密度 (MPD) 值、相关系数矩阵、置信区间等。

4 算例分析

采用有限元软件 ABAQUS 建立非饱和土坡耦合分析数值模型, 开发了基于随机多项式展开的概率反分析方法 MATLAB 程序。以一个降雨入渗非饱和土坡为例, 分别用传统的基于数值模型概率反分析方法和本文提出的基于 PCE 代替模型概率反分析方法求解参数后验分布, 验证所提出方法的计算精度和效率。

4.1 降雨入渗非饱和土坡流固耦合数值模型

降雨入渗非饱和土坡计算模型简图如图 2 所示。坡高 30 m, 坡度为 40°。初始水位在 HC, 初始坡体内孔压分布假设为静水压状态。降雨流量边界条件施加在 GFED, 强度 q (0.012 m/h, 中雨), 持续 36 h。AH 和 BC 为定水头边界 $H = 8$ m, AB、HG 和 CD 为不透水边界。左右两侧边界 AG 和 BD 为水平位移约束, 底边界 AB 水平竖向、位移均约束。

坡内土体为均质各向同性砂土, 采用 Mohr-Coulomb 理想弹塑性本构关系, 参数见表 1。

假定弹性模量 E 、饱和渗透系数 k_s 、VGM 模型参数 α 、内摩擦角 φ' 和黏聚力 c' 为随机变量。根据文献研究, 假定参数 E , k_s , α , $\tan \varphi'$ 服从对数正态分布,

参数 c' 服从正态分布。随机变量均值与表 1 一致。研究^[42]表明, 砂土摩擦角的变异系数 (COV) 一般在 5%~20%, 水力特性参数的变异性大于抗剪强度参数。本算例取 E , k_s , α , $\tan \varphi'$, c' 的 COV 分别为 0.25, 0.25, 0.25, 0.1, 0.15。表 2 列出了随机变量先验概率分布和统计值。

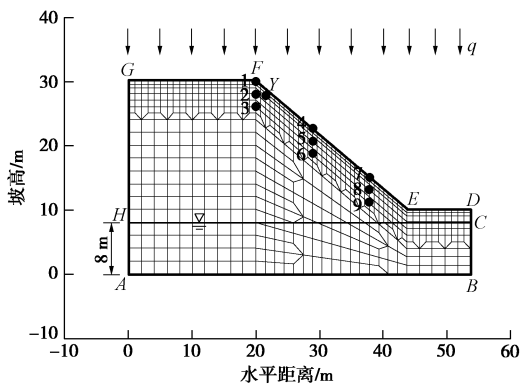


图 2 非饱和土坡模型示意图

Fig. 2 Schematic diagram of unsaturated soil slope model

表 1 非饱和土坡计算模型参数

Table 1 Input parameters of unsaturated soil slope model

参数 (单位)	数值	参数 (单位)	数值
密度 $\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	1800	残余饱和度 $\theta_r/\%$	0
泊松比 ν	0.3	$\alpha/(\text{kPa}^{-1})$	0.04
弹性模量 E/kPa	10000	n_w	1.2
渗透系数 $k_s/(\text{m}\cdot\text{h}^{-1})$	0.036	l	0.5
黏聚力 c'/kPa	12	内摩擦角 $\varphi'/(^\circ)$	30

表 2 随机变量先验分布和统计值

Table 2 Prior distribution and statistics of random variables

参数	均值	标准差	分布类型	下限	上限
$\ln E$	9.180	0.246	正态	8.2	10.1
$\ln k_s$	-3.355	0.246	正态	-4.2	-2.5
$\ln \alpha$	-3.249	0.246	正态	-4.1	-2.4
$\ln \tan \varphi'$	-0.550	0.100	正态	-0.9	-0.2
c'	12	1.8	正态	6	18

4.2 PCE 代替模型构建和验证

以坡顶 Y 点的孔压响应作为监测对象, 每 0.5 h 提取数值模型输出值, 构建 PCE 代替模型共 72 个。采用蒙特卡洛抽样法生成满足表 2 参数分布的 200 组随机样本点, 分别采用数值模型和 PCE 代替模型计算, 比较响应值的差别, 验证 PCE 代替模型精度。图 3 为 1~3 阶 PCE 模型和数值模型的孔压响应比较。对于本算例中随机向量维度为 5, 1~3 阶稀疏网格配点数目分别为 11, 81, 471, PCE 待定系数数目分别为 6, 21, 56。采用确定性系数 R^2 和均方根误差 (Root Mean Square Error, 简称 RMSE) 衡量数值模型和 PCE

代替模型的拟合程度。 R^2 越大, 均方根误差 RMSE 越小, 拟合效果越好。

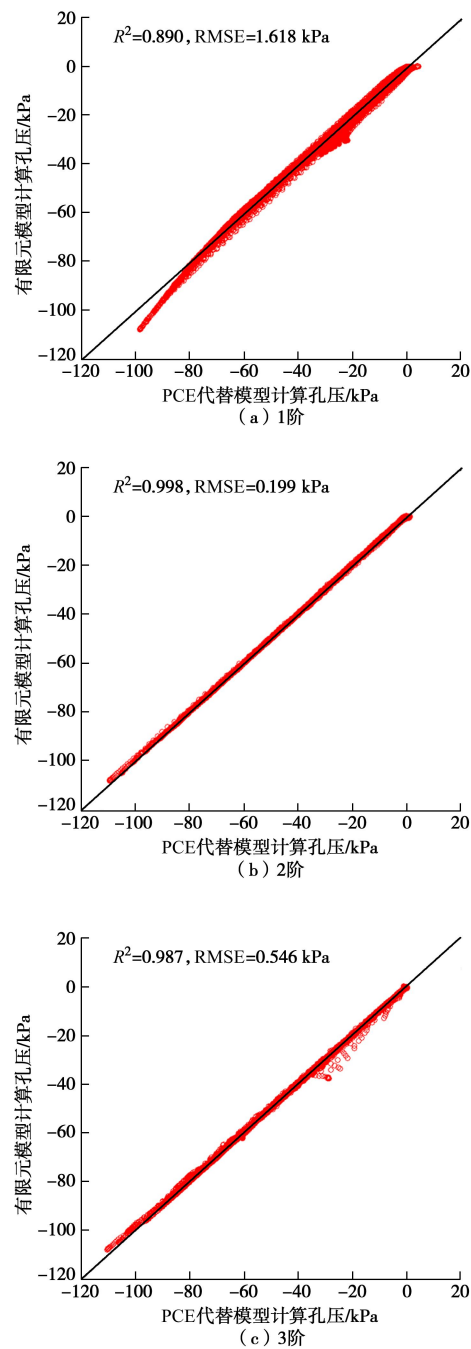


图 3 数值模型和 PCE 模型对比

Fig. 3 Comparison between numerical model and PCE model

由图 3 可见, 对于 Y 点孔压响应, 1 阶 PCE 没有交叉项, 逼近效果最差; 2 阶 PCE 能最好地近似数值模型; 3 阶 PCE 系数数目为 56, 多项式待定系数误差增加, 导致近似效果不理想。

选取边坡浅层和深部共 9 个测点 (见图 2), 基于稀疏网格配点法构建各点孔压响应的 2 阶、3 阶 PCE 代替模型。如图 4 所示, 所有测点 2 阶、3 阶 PCE 代替模型 R^2 都大于 0.996, RMSE 均小于 0.8 kPa; 除测

点 6、9 外, 2 阶 PCE 计算得的 R^2 普遍大于 3 阶 PCE 对应的值, RMSE 值普遍小于 3 阶 PCE 对应的值。综合考虑精度和计算效率, 本文采用 2 阶 PCE 作为孔压响应的代替模型。

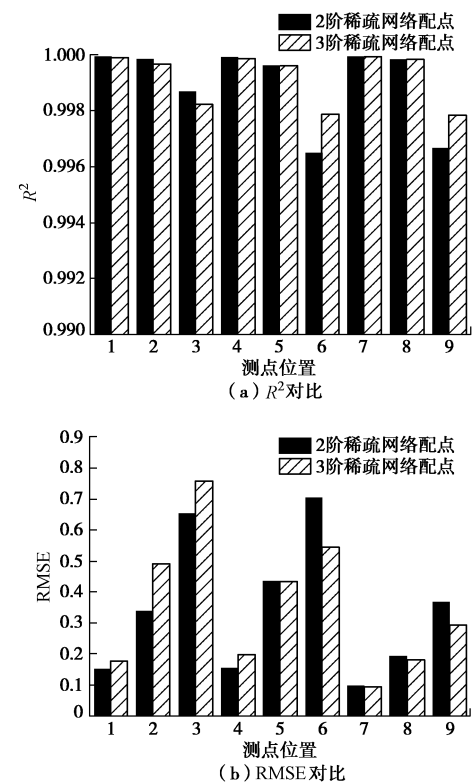


图 4 多测点 2 阶、3 阶 PCE 模型误差对比

Fig. 4 Comparison of errors using PCE model of 2-order and 3-order for different monitoring points

为比较不同配点法构建 PCE 模型的拟合效果, 在相同的 81 个配点情况下, 分别基于稀疏网格配点法和拉丁超立方方法构建各点孔压响应的 2 阶 PCE 代替模型。如图 5 所示, 对于不同位置的测点, 两种配点法计算得到的 R^2 均十分接近, 对于原数值模型都能提供较高的拟合精度。

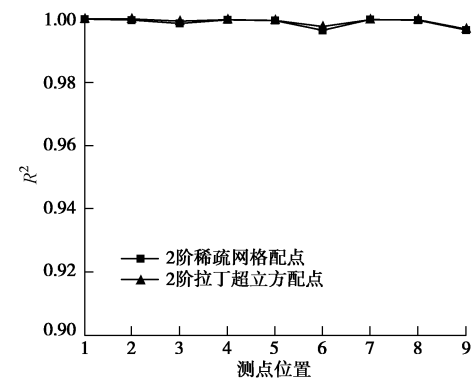


图 5 基于不同配点法 PCE 模型 R^2 对比

Fig. 5 Comparison of R^2 using PCE model based on different collocation methods

4.3 随机参数后验估计

以测点 Y 为例，将孔压响应的数值解加 3%随机噪声作为监测数据，MCMC 反分析计算取马尔科夫链 10 条，最大样本数 10000。图 6 所示为收敛准则 R_{stat} 值随样本数变化曲线。可见，两种方法收敛速度相差不大，均可在 2000 个样本后达到收敛。

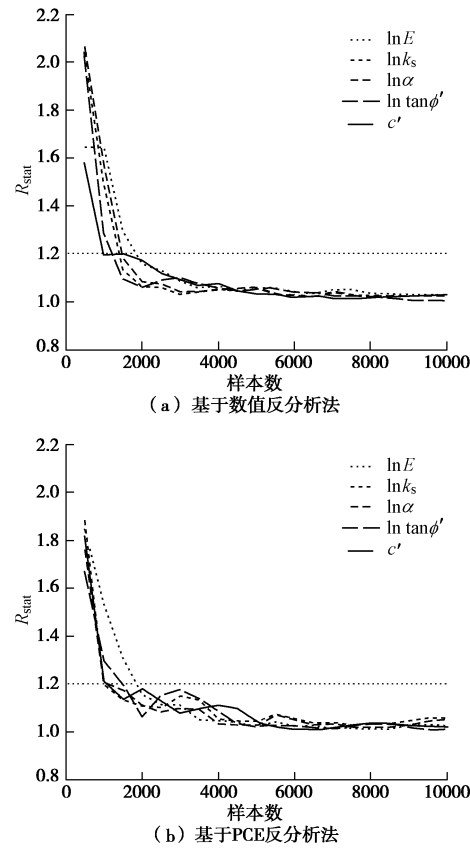


图 6 基于数值反分析法和基于 PCE 反分析法 R_{stat} 值随样本数变化

Fig. 6 Variation of R_{stat} with sample numbers using numerical model-based and PCE-based back analysis methods

就计算量而言，基于数值模型的概率反分析计算 207.45 h，采用 PCE 代替模型的概率反分析仅需 1.6 min，计算效率提高 7000 倍，表明本文提出的基于 PCE 的概率反分析方法极大提高了反分析效率。

根据马尔科夫链收敛结果，取后 25%样本作为稳态后验分布样本。表 3 列出了参数后验分布的均值和标准差。与先验分布(表 2)对比，水力特性参数 $\ln k_s$ 、 $\ln \alpha$ 的标准差较其他参数有显著减少，这与文献[42]结论相符，使用孔压数据能显著降低水力特性参数的变异性，而对其它类型力学参数的不确定性缩减效果不明显。

图 7 为两种反分析方法 95%置信区间和实测值的比较。图中灰色阴影区域表示同时考虑参数不确定性和模型误差的 95%置信区间。由图可见，两种方法结果非常接近，95%置信区间均较窄，实测数据基本在

置信区间内；MPD 计算值与实测值的确定性系数 R^2 均为 0.993，RMSE 值仅 1.69 kPa。结果表明，采用 PCE 代替数值模型随机反分析结果可靠，计算精度高。对不同位置测点同样可得到上述结论，由于篇幅原因本文不再展示其它测点的结果。

表 3 随机变量后验分布统计值

Table 3 Posterior distribution and statistics of random variables				
参数	基于数值反分析		基于 PCE 反分析	
	均值	标准差	均值	标准差
$\ln E$	9.232	0.223	9.223	0.191
$\ln k_s$	-3.281	0.062	-3.534	0.087
$\ln \alpha$	-3.201	0.031	-3.561	0.080
$\ln \tan \phi'$	-0.550	0.091	-0.539	0.100
c'	11.950	1.793	11.874	1.834

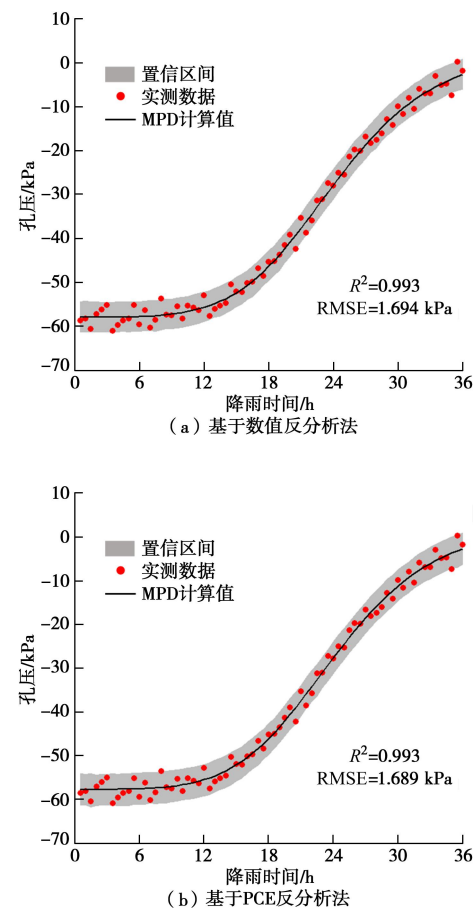


图 7 基于数值反分析法和基于 PCE 反分析法 95%置信区间
Fig. 7 95% prediction uncertainty bounds using numerical model-based and PCE-based back analysis methods

5 结 论

本文提出了一种基于随机多项式展开 (PCE) 的概率反分析方法，以降雨入渗非饱和土坡流固耦合问题为例，与基于数值模型的随机反分析对比。主要结

论如下:

(1) 综合考虑精度和计算效率, 相比 1 阶与 3 阶 PCE, 2 阶 PCE 能更好地近似非饱和土坡流固耦合数值模型, 对于时变孔压响应的拟合精度高。

(2) 基于数值模型的概率反分析计算量大, 基于 PCE 代替模型的概率反分析可显著提高计算效率。

(3) 基于数值模型的概率反分析和基于 PCE 的概率反分析在后验分布统计值、95%置信区间等结果非常接近。表明基于 PCE 的随机反分析方法用于非饱和土坡流固耦合问题结果可靠, 计算精度高。

参考文献:

- [1] FREDLUND D G, RAHARDJO H. Soil mechanics for unsaturated soils[M]. New York: John Wiley & Sons, 1993.
- [2] ZHANG L L, ZHANG L M, TANG W H. Rainfall-induced slope failure considering variability of soil properties[J]. Géotechnique, 2005, **55**(2): 183 - 188.
- [3] WONG T T, FREDLUND D G, KRAHN J. Numerical study of coupled consolidation in unsaturated soils[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1998, **35**(6): 926 - 937.
- [4] KIM J M. A fully coupled finite element analysis of water-table fluctuation and land deformation in partially saturated soils due to surface loading[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, **49**(9): 1101 - 1119.
- [5] 徐 晗, 朱以文, 蔡元奇, 等. 降雨入渗条件下非饱和土边坡稳定分析[J]. 岩土力学, 2005, **26**(12): 1957 - 1962. (XU Han, ZHU Yi-wen, CAI Yuan-qi, et al. Stability analysis of unsaturated soil slopes under rainfall infiltration[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, **26**(12): 1957 - 1962. (in Chinese))
- [6] WU L Z, ZHANG L M. Analytical solution to 1D coupled water infiltration and deformation in unsaturated soils[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2009, **33**(6): 773 - 790.
- [7] 田东方, 刘德富, 王世梅, 等. 土质边坡非饱和和渗流场与应力场耦合数值分析[J]. 岩土力学, 2009, **30**(3): 810 - 814. (TIAN Dong-fang, LIU De-fu, WANG Shi-mei, et al. Coupling numerical analysis of unsaturated seepage and stress fields for soil slope[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, **30**(3): 810 - 814. (in Chinese))
- [8] 杨林德, 黄 伟, 王 聿. 初始地应力位移反分析的有限单元法[J]. 同济大学学报, 1985(4): 15 - 20. (YANG Lin-de, HUANG Wei, WANG Yu. The finite element method for determining the initial earth stress by displacements in surrounding rock[J]. Journal of Tongji University, 1985(4): 15 - 20. (in Chinese))
- [9] 杨志法, 丁恩保, 张三旗. 地下工程平面问题弹性有限元图谱[M]. 北京: 科学出版社, 1989. (YANG Zhi-fa, DING En-bao, ZHANG San-qi. Elastic mapping finite element method for plane problem of under ground engineering[M]. Beijing: Science Press, 1989. (in Chinese))
- [10] 黄宏伟, 孙 钧. 基于 Bayesian 广义参数反分析[J]. 岩石力学与工程学报, 1994, **13**(3): 219 - 228. (HUANG Hong-wei, SUN Jun. Generalized parameters back analysis method based on Bayesian theory[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1994, **13**(3): 219 - 228. (in Chinese))
- [11] 冯夏庭, 张治强, 杨成祥, 等. 位移反分析的进化神经网络方法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, **18**(5): 529 - 533. (FENG Xia-ting, ZHANG Zhi-qiang, YANG Cheng-xiang, et al. Study on genetic neural network method of displacement back analysis[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1999, **18**(5): 529 - 533. (in Chinese))
- [12] 陈 斌, 刘 宁, 卓家寿. 岩土工程反分析的扩展贝叶斯法[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, **23**(4): 555 - 560. (CHEN Bin, LIU Ning, ZHUO Jia-shou. Extended Bayesian method of inverse analysis in geoenvironment[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, **23**(4): 555 - 560. (in Chinese))
- [13] ZHANG J, TANG W H, ZHANG L M. Efficient probabilistic back-analysis of slope stability model parameters[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2010, **136**(1): 99 - 109.
- [14] ZHANG L L, ZHANG J, ZHANG L M, et al. Back analysis of slope failure with Markov chain Monte Carlo simulation[J]. Computers and Geotechnics, 2010, **37**(7): 905 - 912.
- [15] ZHANG L L, ZUO Z B, YE G L, et al. Probabilistic parameter estimation and predictive uncertainty based on field measurements for unsaturated soil slope[J]. Computers and Geotechnics, 2013, **48**: 72 - 81.
- [16] JUANG C H, LUO Z, ATAMTURKTUR S, et al. Bayesian updating of soil parameters for braced excavations using field observations[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2012, **139**(3): 395 - 406.
- [17] KELLY R, HUANG J. Bayesian updating for one-dimensional consolidation measurements[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2015, **52**(9): 1318 - 1330.
- [18] LI S, ZHAO H, RU Z, et al. Probabilistic back analysis based on Bayesian and multi-output support vector machine for a high cut rock slope[J]. Engineering Geology, 2016, **203**: 178 - 190.

- [19] 吴礼舟, 张利民, 黄润秋, 等. 非饱和土的变形与渗流耦合的一维解析分析及参数研究[J]. 岩土工程学报, 2009, **31**(9): 1450 - 1455. (WU Li-zhou, ZHANG Li-ming, HUANG Run-qiu, et al. One-dimensional analytical analysis and parameter study of coupled deformation and seepage in unsaturated soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, **31**(9): 1450 - 1455. (in Chinese))
- [20] 黄淑萍. 基于观点法的谱随机有限元分析-随机响应面法[J]. 计算力学学报, 2007, **24**(2): 173 - 180. (HUANG Shu-ping. A collocation-based spectral stochastic finite element analysis-stochastic response surface approach[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2007, **24**(2): 173 - 180. (in Chinese))
- [21] HUANG S P, MAHADEVAN S, REBBA R. Collocation-based stochastic finite element analysis for random field problems[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2007, **22**(2): 194 - 205.
- [22] HUANG S P, LIANG B, PHOON K K. Geotechnical probabilistic analysis by collocation-based stochastic response surface method: An Excel add-in implementation[J]. Georisk, 2009, **3**(2): 75 - 86.
- [23] LI D Q, CHEN Y F, LU W B, et al. Stochastic response surface method for reliability analysis of rock slopes involving correlated non-normal variables[J]. Computers & Geotechnics, 2011, **38**(1): 58 - 68.
- [24] 李典庆, 蒋水华, 周创兵. 基于非侵入式随机有限元法的地下洞室可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(1): 123 - 129. (LI Dian-qing, JIANG Shui-hua, ZHOU Chuang-bing. Reliability analysis of underground rock caverns using non-intrusive stochastic finite element method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(1): 123 - 129. (in Chinese))
- [25] JIANG S H, LI D Q, CAO Z J, et al. Efficient system reliability analysis of slope stability in spatially variable soils using Monte Carlo simulation[J]. Journal of Geotechnical & Geoenvironmental Engineering, 2015, **141**(2): 04014096.
- [26] BISHOP A W. The principle of effective stress[J]. Teknisk Ukeblad, 1959, **106**(39): 859 - 863.
- [27] FREDLUND D G, MORGENSTERN N R, WIDGER R A. The shear strength of unsaturated soils[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1978, **15**(3): 313 - 321.
- [28] ZHANG F, IKARIYA T. A new model for unsaturated soil using skeleton stress and degree of saturation as state variables[J]. Soils and Foundations, 2011, **51**(1): 67 - 81.
- [29] RICHARD L A. Capillary conduction of liquids through porous mediums[J]. Physics, 1931, **1**(5): 318 - 333.
- [30] VAN GENUCHTEN M T. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils[J]. Soil Science Society of America Journal, 1980, **44**(5): 892 - 898.
- [31] MUALEM Y. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media[J]. Water Resources Research, 1976, **12**(3): 513 - 522.
- [32] GHANEM R G, SPANOS P D. Stochastic finite elements: a spectral approach[M]. New York: Springer-Verlag, 2003.
- [33] BAECHER G B, CHRISTIAN J T. Reliability and statistics in geotechnical engineering[M]. New York: John Wiley & Sons, 2005.
- [34] BLATMAN G, SUDRET B. An adaptive algorithm to build up sparse polynomial chaos expansions for stochastic finite element analysis[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2010, **25**(2): 183 - 197.
- [35] XIU D. Efficient collocation approach for parametric uncertainty analysis[J]. Communications in Computational Physics, 2007, **2**(2): 293 - 309.
- [36] SMOLJAK S A. Quadrature and interpolation formulae on tensor products of certain function classes[J]. Doklady Akademii Nauk Sssr, 1963, **4**(5): 240 - 243.
- [37] NOBILE F, TEMPONE R, WEBSTER C G. A sparse grid stochastic collocation method for partial differential equations with random input data[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2008, **46**(5): 2309 - 2345.
- [38] LALOY E, ROGIERS B, VRUGT J A, et al. Efficient posterior exploration of a high-dimensional groundwater model from two-stage Markov chain Monte Carlo simulation and polynomial chaos expansion[J]. Water Resources Research, 2013, **49**(5): 2664 - 2682.
- [39] BOX G E P, TIAO G C. Bayesian inference in statistical analysis[M]. New York: John Wiley & Sons, 2011.
- [40] VRUGT J A, TER BRAAK C J F, CLARK M P, et al. Treatment of input uncertainty in hydrologic modeling: Doing hydrology backward with Markov chain Monte Carlo simulation[J]. Water Resources Research, 2008, **44**(12): 5121 - 5127.
- [41] GELMAN A, RUBIN D B. Inference from iterative simulation using multiple sequences[J]. Statistical Science, 1992: 457 - 472.
- [42] ZHANG L L, LI J H, LI X, et al. Rainfall-induced soil slope failure: stability analysis and probabilistic assessment[M]. Boca Raton: CRC Press, 2016.