

DOI: 10.11779/CJGE201810005

# 非饱和土成层场地波动问题的解析解及应用

李伟华<sup>1</sup>, 胡叶尘<sup>2</sup>, 赵成刚<sup>1</sup>, 郑洁<sup>3</sup>

(1. 北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044; 2. 上海朗信房地产开发有限公司, 上海 201306; 3. 中冶京诚工程技术有限公司, 北京 100176)

**摘要:** 现有地基场地波动问题研究中, 多将地基土视为饱和、准饱和状态或单相介质, 难以反映非饱和土体波动性质。在现有非饱和多孔介质波动理论的基础上, 建立基岩上覆成层非饱和土复杂场地模型, 采用传递矩阵法, 分别求解了平面 P 波和 SV 波入射下基岩上覆成层非饱和土场地波动问题的解析解。通过与已有的基岩上覆单一非饱和土层波动问题的解进行对比, 验证了该解的正确性。并利用该解答初步分析了当非饱和土层饱和度呈梯度变化时, 地下水位变化对地面运动的影响。分析结果表明: 地下水位变化对地面运动的影响与入射波频率和入射角有关。相同频率下, 当入射角较小时, 地下水位变化对地表竖向位移的影响较大; 地下水位变化对水平位移的影响随着入射角增加先增加后减小。相同入射角下, 随着地下水位上升, 地表竖向位移的峰值减小, 峰值频率增加, 而地表水平位移的峰值及峰值频率变化不大。

**关键词:** 非饱和孔隙介质; 成层场地; 地面运动; 地下水位; 平面波

**中图分类号:** TU43      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-4548(2018)10-1790-09

**作者简介:** 李伟华(1976-)女, 博士, 副教授, 主要从事土动力学和地震工程方面的研究。E-mail: whli@bjtu.edu.cn。

## Analytic solution for wave propagations in layered unsaturated soil and its application

LI Wei-hua<sup>1</sup>, HU Ye-chen<sup>2</sup>, ZHAO Cheng-gang<sup>1</sup>, ZHEN Jie<sup>3</sup>

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Beijing Jiao-tong University, Beijing 100044, China; 2. Shanghai Langxin Real Estate

Development Co., Ltd., Shanghai 201306, China; 3. MCC Capital Engineering Research Incorporation Limited, Beijing 100176, China)

**Abstract:** In most of the current analyses of free field seismic response, the unsaturated soils are usually regarded as the quasi-saturated or single-phase media. It is difficult to describe the characteristics of unsaturated soils. A free field model for rock-layered unsaturated soil system is established. Based on the theory of wave motion in poroelastic medium, the elastic wave propagation under plane P-wave and SV-wave incidence in the rock-layered unsaturated soil system is solved using the transfer matrix method. By comparison with the existing solutions for an overlying unsaturated soil layer on the bedrock half-space, the solution given here is verified. Assuming the saturation of the soils above the groundwater layer has a gradient variation along the depth, the effects of variation of groundwater level on earthquake ground motions are analyzed using this solution. It is shown that the effects of variation of groundwater level on ground motions are related with the wave frequency and incident angle. At the same frequency, the variation of groundwater level has a great effect on the vertical displacement at ground surface when the incident angle is small. The effect of the groundwater level on the horizontal displacement first increases and then decreases with the incident angle increasing from 0° to 90°. At the same incident angle, the response peaks of the vertical displacement at ground surface decrease, and the frequencies of the resonance peaks increase with the increase of the groundwater level. But the variation of groundwater level has little effects on the horizontal displacement at ground surface.

**Key words:** unsaturated porous medium; layered unsaturated soil; earthquake ground motion; underground water; plane wave

## 0 引言

场地土性质的改变会引起地震波的放大或者衰减, 因而在进行地震地面运动研究时要选择符合实际的场地模型。过去几十年间, 自由场地震反应问题的研究通常将场地土视为单相弹性或两相饱和土的情况。单相弹性介质无法体现土体的多孔多相性质。饱

和多孔介质波动理论因为能较好地反映饱和土体的力学特性, 目前已得到了较多的研究和广泛的应用<sup>[1]</sup>。但是, 理想的饱和土体在现实中非常罕见。把非饱和土

基金项目: 国家自然科学基金项目(51378058); 国家重点基础研究发展计划项目(2015CB057800); 中央高校基本科研业务费专项(2015JBZ008)

收稿日期: 2017-07-31

简化为饱和多孔介质, 会造成与实际现象有很大出入。所以建立一个能够反映非饱和土性质的场地模型, 并研究其地震反应具有重要的意义。

随着多孔介质理论和混合物理论的发展, 近年来非饱和多孔介质波动问题的研究取得了一定进展。研究者们<sup>[2-9]</sup>依据 Biot 理论、混合物理论或二者的结合建立了适用条件各异的非饱和多孔介质的动力方程, 并研究了其弹性波的传播特征, 确定了非饱和多孔介质中除了存在与流体饱和多孔介质中类似的 P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub> 波和剪切波外, 还存在由气相引起的第 3 种压缩波 P<sub>3</sub> 波。以非饱和多孔介质动力方程为基础, 体波在非饱和多孔介质与其他介质分界面上传播问题的研究也逐渐发展起来。

蔡袁强等<sup>[10]</sup>研究了 P<sub>1</sub> 波入射到饱和孔隙介质与非饱和砂岩界面产生的反射和透射情况。Lo<sup>[11]</sup>分析了 Rayleigh 波在非饱和土半空间地表的传播特性, Chen 等<sup>[12-13]</sup>分别研究了面波和平面 P 波在非饱和多孔介质与单相弹性介质交界面处的传播, Tomar 等<sup>[14]</sup>分析了平面 P 波和 SV 波由单相弹性介质入射到非饱和多孔介质交界面处产生的反射与透射情况, Kumar 等<sup>[15]</sup>研究了两种不同非饱和介质交界面处平面波传播情况。这些研究表明各模式的反射、透射波受土层饱和度变化的影响显著, 由此提示我们在场地地震反应研究中应重视饱和度变化的影响, 但目前关于非饱和孔隙介质场地地震动特性的研究尚不多见。李伟华等<sup>[16]</sup>首次将非饱和孔隙介质动力模型引入到自由场地震地面运动的解析分析中, 推导得到了平面 P 波从基岩入射到上覆单一非饱和土层中波动问题的解析解, 并分析了饱和度变化对基岩上覆单一非饱和土层场地的地震地面运动的影响。

本文拟在此基础上, 建立基岩上覆非饱和土成层场地模型, 采用传递矩阵法, 分别推导平面 P 波、SV 入射下基岩上覆非饱和土成层场地波动问题的解析解, 并利用该解答初步分析地下水水位变化对地面运动的影响。

## 1 非饱和土成层场地模型

非饱和土成层场地模型如图 1 所示, 水平均匀半无限基岩层上覆厚度分别为  $h_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 的  $n$  层均匀非饱和土层。半无限基岩层视作单相弹性介质, 非饱和土层为非饱和孔隙介质。每层建立局部坐标系, 坐标系原点设于每层顶面, 详见图 1。

采用文献[5]提出的非饱和孔隙介质的波动方程研究非饱和土层的波动, 方程表达式如下:

$$n_0^S \rho_0^S \ddot{\mathbf{u}}^S = (M_{ss} + G) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^S + G \nabla \cdot \nabla \mathbf{u}^S + M_{sw} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^W +$$

$$M_{sn} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^N + \hat{\mu}^W (\dot{\mathbf{u}}^W - \dot{\mathbf{u}}^S) + \hat{\mu}^N (\dot{\mathbf{u}}^N - \dot{\mathbf{u}}^S) \quad , \quad (1a)$$

$$n_0^W \rho_0^W \ddot{\mathbf{u}}^W = M_{sw} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^S + M_{ww} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^W + M_{wn} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^N - \hat{\mu}^W (\dot{\mathbf{u}}^W - \dot{\mathbf{u}}^S) \quad , \quad (1b)$$

$$n_0^N \rho_0^N \ddot{\mathbf{u}}^N = M_{sn} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^S + M_{wn} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^W + M_{nn} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^N - \hat{\mu}^N (\dot{\mathbf{u}}^N - \dot{\mathbf{u}}^S) \quad . \quad (1c)$$

式中  $n_0^\alpha$ ,  $\rho_0^\alpha$ ,  $\mathbf{u}^\alpha$  ( $\alpha = S, W, N$ , 其中 S, W, N 分别代表多孔介质固相部分、湿润流体部分和干燥流体部分, 下同) 分别为各组分的初始体积分数、初始密度、位移;  $M_{ss}$ ,  $M_{ww}$ ,  $M_{nn}$ ,  $M_{sw}$ ,  $M_{sn}$ ,  $M_{wn}$  为与非饱和孔隙介质各相的体积模量  $K^\alpha$ 、固体骨架的体积模量  $K$ 、剪切模量  $G$ 、有效应力系数  $\alpha_B$  以及描述毛细管平衡条件的参数  $\Theta_w$ ,  $\Theta_n$  有关的弹性系数,  $\hat{\mu}^f$  ( $f = W, N$ ) 为与渗透系数  $k$  及流体的动力黏滞系数  $\nu^f$  有关的系数, 具体表达详见文献[16]。

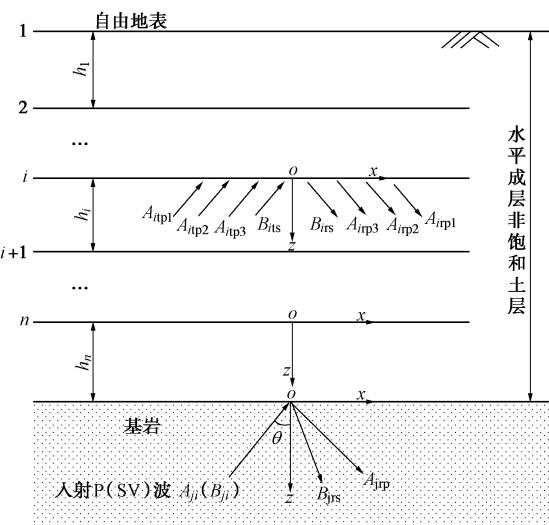


图 1 非饱和土成层场地简化模型

Fig. 1 Simplified model for unstratified layered field

非饱和土的土水特征曲线采用 Brooks-Corey 模型

$$p^N - p^W = p_d S_e^{-1/\lambda} \quad . \quad (2)$$

式中,  $p_d$  为进气压力值,  $\lambda$  为正常数,

$$S_e = \begin{cases} 0.0 & (S_r \leq S_{rw}) \\ \frac{S_r - S_{rw}}{S_{rn} - S_{rw}} & (S_{rw} < S_r < S_{rn}) \\ 1.0 & (S_r \geq S_{rn}) \end{cases} \quad , \quad (3)$$

式中,  $S_{rw}$  为束缚饱和度,  $S_{rn}$  为空气残余饱和度。

根据多孔弹性模型, 非饱和孔隙介质的应力张量可表示为

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^S &= (M_{ss} \nabla \cdot \mathbf{u}^S + M_{sw} \nabla \cdot \mathbf{u}^W + M_{sn} \nabla \cdot \mathbf{u}^N) \mathbf{I} + \\ &\quad 2G(\nabla \mathbf{u}^S + (\nabla \mathbf{u}^S)^T) , \\ \boldsymbol{\sigma}^W &= (M_{sw} \nabla \cdot \mathbf{u}^S + M_{ww} \nabla \cdot \mathbf{u}^W + M_{wn} \nabla \cdot \mathbf{u}^N) \mathbf{I} , \\ \boldsymbol{\sigma}^N &= (M_{sn} \nabla \cdot \mathbf{u}^S + M_{wn} \nabla \cdot \mathbf{u}^W + M_{nn} \nabla \cdot \mathbf{u}^N) \mathbf{I} , \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中,  $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$  分别为各相的应力张量,  $\mathbf{I}$  为单位张量。

文献[5]指出, 若令非饱和孔隙介质波动方程式(1)中与气相有关的参数为0, 该方程可以退化为与Biot<sup>[17]</sup>提出的饱和孔隙介质相同形式的波动方程, 用于考虑饱和土的情况。

半无限基岩层的运动由单相弹性介质波动方程确定

$$(\lambda^R + \mu^R) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^R + \mu^R \nabla^2 \mathbf{u}^R = \rho^R \ddot{\mathbf{u}}^R \quad (5)$$

式中  $\mathbf{u}^R$  和  $\ddot{\mathbf{u}}^R$  分别为基岩的位移和加速度矢量;  $\lambda^R$ ,  $\mu^R$  和  $\rho^R$  分别为基岩的Lame常数和密度; 上标“R”表示基岩。

## 2 非饱和土层中波幅系数转换矩阵

根据Helmholtz原理, 位移矢量可分解为

$$\mathbf{u}^\alpha = \nabla \phi^\alpha + \nabla \times \psi^\alpha \quad (6)$$

式中,  $\phi^\alpha$ ,  $\psi^\alpha$  分别为非饱和孔隙介质各相的标量和矢量势函数。将式(6)代入式(1)中, 可以得到在非饱和孔隙介质中存在3种压缩波  $P_1$ ,  $P_2$  和  $P_3$  和一种剪切波  $S$ , 详见文献[16]。由此可以得到, 在  $Oxz$  平面内, 第  $i$  层非饱和土的波场(固相波场势函数)可以表示如下:

上行  $P_1$  波

$$\varphi_{ip1}^{u,S} = A_{ip1}^u \exp[i(\omega t - k_{ip1x}x + k_{ip1z}z)] \quad (7a)$$

上行  $P_2$  波

$$\varphi_{ip2}^{u,S} = A_{ip2}^u \exp[i(\omega t - k_{ip2x}x + k_{ip2z}z)] \quad (7b)$$

上行  $P_3$  波

$$\varphi_{ip3}^{u,S} = A_{ip3}^u \exp[i(\omega t - k_{ip3x}x + k_{ip3z}z)] \quad (7c)$$

上行 SV 波

$$\psi_{is}^{u,S} = B_{is}^u \exp[i(\omega t - k_{isx}x + k_{isz}z)] \quad (7d)$$

下行  $P_1$  波

$$\varphi_{ip1}^{d,S} = A_{ip1}^r \exp[i(\omega t - k_{ip1x}x - k_{ip1z}z)] \quad (8a)$$

下行  $P_2$  波

$$\varphi_{ip2}^{d,S} = A_{ip2}^r \exp[i(\omega t - k_{ip2x}x - k_{ip2z}z)] \quad (8b)$$

下行  $P_3$  波

$$\varphi_{ip3}^{d,S} = A_{ip3}^r \exp[i(\omega t - k_{ip3x}x - k_{ip3z}z)] \quad (8c)$$

下行 SV 波

$$\psi_{is}^{d,S} = B_{is}^d \exp[i(\omega t - k_{isx}x - k_{isz}z)] \quad (8d)$$

则非饱和土中固相部分的总的标量势函数:

$$\varphi_{ip}^S = \varphi_{ip1}^{u,S} + \varphi_{ip2}^{u,S} + \varphi_{ip3}^{u,S} + \varphi_{ip1}^{d,S} + \varphi_{ip2}^{d,S} + \varphi_{ip3}^{d,S} \quad (9a)$$

总的矢量势函数:

$$\psi_{is}^S = \psi_{is}^u + \psi_{is}^d \quad (9b)$$

液相、气相部分的总的标量势函数:

$$\varphi_{ip}^f = \sum_{j=1}^3 \delta_{ij}^f (\varphi_{ipj}^{u,S} + \varphi_{ipj}^{d,S}) \quad (10a)$$

总的矢量势函数:

$$\psi_{is}^f = \delta_{is}^f (\psi_{is}^u + \psi_{is}^d) \quad (10b)$$

式(7)~(10)中:  $\omega$  为圆频率,  $i = \sqrt{-1}$ ; 上标“u”, “d” 分别表示上行、下行; “S”, “W”, “N” 分别表示固、液、气三相; 下标 “ $i$ ” 表示土层, “ $p1$ ”, “ $p2$ ”, “ $p3$ ” 和 “s” 分别表示  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  和 SV 波;  $\delta_{ij}^f$  ( $j=1, 2, 3$ ) 为第  $i$  层  $f$  相 3 个压缩波参与系数,  $\delta_{is}^f$  为  $f$  相剪切波参与系数, 确定方法见文献[16];  $A_{ip1}^u$ ,  $A_{ip2}^u$ ,  $A_{ip3}^u$ ,  $B_{is}^u$ ,  $A_{ip1}^d$ ,  $A_{ip2}^d$ ,  $A_{ip3}^d$ ,  $B_{is}^d$  为波幅系数;  $k_{ip1x}$ ,  $k_{ip2x}$ ,  $k_{ip3x}$ ,  $k_{isx}$  以及  $k_{ip1z}$ ,  $k_{ip2z}$ ,  $k_{ip3z}$ ,  $k_{isz}$  分别为  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  和 SV 波在  $x$  方向和  $z$  方向上的视波数,  $k_{ip1x}^2 + k_{ip1z}^2 = k_{ip1}^2$ ,  $k_{ip2x}^2 + k_{ip2z}^2 = k_{ip2}^2$ ,  $k_{ip3x}^2 + k_{ip3z}^2 = k_{ip3}^2$ ,  $k_{isx}^2 + k_{isz}^2 = k_{is}^2$ ;  $k_{ip1}$ ,  $k_{ip2}$ ,  $k_{ip3}$ ,  $k_{is}$  分别为  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  和 SV 波波数。根据 Snell 定理, 有

$$k_{ip1x} = k_{ip2x} = k_{ip3x} = k_{isx} \text{ 设为 } k_x \quad (11)$$

在非饱和土层中, 各应力、位移分量与势函数的关系可根据式(4)、(6)得

$$\sigma_{xi}^S = \frac{\partial \varphi_{ip}^S}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{is}^S}{\partial z} \quad (12a)$$

$$u_{zi}^\alpha = \frac{\partial \varphi_{ip}^\alpha}{\partial z} - \frac{\partial \psi_{is}^\alpha}{\partial x} \quad (12b)$$

$$\sigma_{zz}^S = M_{SSi} \nabla^2 \varphi_{ip}^S + 2G \left( \frac{\partial^2 \varphi_{ip}^S}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_{is}^S}{\partial z \partial x} \right) + M_{SWi} \nabla^2 \varphi_{ip}^W + M_{SNi} \nabla^2 \varphi_{ip}^N \quad (12c)$$

$$\sigma_{xzi}^S = G \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_{ip}^S}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_{is}^S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_{is}^S}{\partial z^2} \right) \quad (12d)$$

$$\sigma_{zzi}^W = M_{SWi} \nabla^2 \varphi_{ip}^S + M_{WWi} \nabla^2 \varphi_{ip}^W + M_{WNi} \nabla^2 \varphi_{ip}^N \quad (12e)$$

$$\sigma_{zzi}^N = M_{SNi} \nabla^2 \varphi_{ip}^S + M_{WNi} \nabla^2 \varphi_{ip}^W + M_{NNi} \nabla^2 \varphi_{ip}^N \quad (12f)$$

把式(9)、(10)代入式(11)、(12)中, 可以得到第  $i$  层非饱和土中的应力、位移分量与各波波幅系数有如下关系:

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{T}_{Si} \mathbf{H}_i \exp[i(\omega t - k_x x)] \quad (13)$$

其中,  $\mathbf{S}_i$  为第  $i$  层非饱和土中应力-位移矢量,

$$\mathbf{S}_i = [\sigma_{zzi}^N \sigma_{zzi}^W \sigma_{zzi}^S \sigma_{xzi}^S u_{xi}^S u_{zi}^S u_{zi}^W u_{zi}^N]^T \quad (14a)$$

$\mathbf{H}_i$  为第  $i$  层非饱和土中波幅矢量,

$$\mathbf{H}_i = [A_{ip1}^u A_{ip2}^u A_{ip3}^u B_{is}^u A_{ip1}^d A_{ip2}^d A_{ip3}^d B_{is}^d]^T \quad (14b)$$

$\mathbf{T}_{Si}$  为  $8 \times 8$  的系数矩阵, 矩阵各分量表达式见附录1。

设相邻两层非饱和土满足应力和位移的连续条件, 则在第  $i$  层和第  $i+1$  层分界面上, 有

$$\mathbf{S}_i \Big|_{z=h_i} = \mathbf{S}_{i+1} \Big|_{z=0} \quad (15)$$

由式(13)、(15)可得

$$\mathbf{T}_{Si} \Big|_{z=h_i} \mathbf{H}_i = \mathbf{T}_{Si+1} \Big|_{z=0} \mathbf{H}_{i+1} \quad (16)$$

于是

$$\mathbf{H}_{i+1} = \mathbf{T}_{Si+1}^{-1} \Big|_{z=0} \mathbf{T}_{Si} \Big|_{z=h_i} \mathbf{H}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{H}_i \quad (17)$$

其中,  $\mathbf{T}_i = \mathbf{T}_{Si+1}^{-1} \Big|_{z=0} \mathbf{T}_{Si} \Big|_{z=h_i}$  即为波幅系数转换矩阵。

由以上递推关系, 可以将第  $n$  层非饱和土的波幅

矢量用第1层的波幅矢量表示, 得到

$$\mathbf{H}_n = \mathbf{T}_{n1} \mathbf{H}_1 \quad , \quad (18)$$

其中,  $\mathbf{T}_{n1} = \mathbf{T}_{n-1} \mathbf{T}_{n-2} \cdots \mathbf{T}_1$ 。

### 3 基岩上覆成层非饱和土波动问题解

基岩视为单相弹性介质, 设 P(SV)波从基岩入射至上覆非饱和土层, 入射频率为  $\omega$ , 入射角为  $\theta(\beta)$ , 则当 P 波入射时

$$\varphi^i = A_p^i \exp[i(\omega t - k_{px}x + k_{pz}z)] \quad , \quad (19)$$

当 SV 波入射时

$$\psi^i = B_s^i \exp[i(\omega t - k_{sx}x + k_{sz}z)] \quad , \quad (20)$$

其中: 上标  $i$  表示入射波;  $A_p^i$ ,  $B_s^i$  分别表示入射 P 波、SV 波的波幅系数;  $k_{px}$ ,  $k_{sx}$  以及  $k_{pz}$ ,  $k_{sz}$  分别为 P 和 SV 波  $x$  方向和  $z$  方向的视波数;  $k_{px}^2 + k_{pz}^2 = k_p^2$ ,  $k_{sx}^2 + k_{sz}^2 = k_s^2$ ;  $k_p$ ,  $k_s$  为 P 波、SV 波的波数, 且  $k_p = \omega/c_p$ 、 $k_s = \omega/c_s$ ,  $c_p$ ,  $c_s$  为基岩中 P 波、S 波波速。

由于基岩层与非饱和土层交界面的存在, 入射波会在基岩层中产生反射 P 波、SV 波, 分别表示为

$$\varphi^r = A_p^r \exp[i(\omega t - k_{px}x - k_{pz}z)] \quad , \quad (21a)$$

$$\psi^r = B_s^r \exp[i(\omega t - k_{sx}x - k_{sz}z)] \quad , \quad (21b)$$

式中, 上标 “r” 表示反射波,  $A_p^r$ ,  $B_s^r$  分别表示反射 P 波、SV 波的波幅系数。根据 Snell 定理, 有

$$\begin{aligned} k_{px} &= k_{sx} = k_x = k_p \sin \theta \text{(P波入射)} \\ &= k_s \sin \beta \text{(SV波入射)} . \end{aligned} \quad (22)$$

则基岩中的总波场表示为

当 P 波入射时:  $\varphi = \varphi^i + \varphi^r$ ,  $\psi = \psi^r$  , (23b)

当 SV 波入射时:  $\varphi = \varphi^r$ ,  $\psi = \psi^i + \psi^r$  。 (23b)

基岩中位移和应力可以用势函数表达为

$$\left. \begin{aligned} u_x^R &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} , \\ u_z^R &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} , \end{aligned} \right\} \quad (24a)$$

$$\sigma_{zz}^R = \lambda^R \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + 2\mu^R \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) , \quad (24b)$$

$$\sigma_{xz}^R = \mu^R \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) . \quad (24c)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{S4 \times 4}^R \\ \boldsymbol{\theta}_{1 \times 4} \\ \boldsymbol{\theta}_{1 \times 4} \end{bmatrix}_{z=0} \mathbf{H}^R = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 T_{Sni1} & \sum_{i=1}^3 T_{Sni2} & \sum_{i=1}^3 T_{Sni3} & \sum_{i=1}^3 T_{Sni4} & \sum_{i=1}^3 T_{Sni5} & \sum_{i=1}^3 T_{Sni6} & \sum_{i=1}^3 T_{Sni7} & \sum_{i=1}^3 T_{Sni8} \\ T_{Sni1} & T_{Sni2} & T_{Sni3} & T_{Sni4} & T_{Sni5} & T_{Sni6} & T_{Sni7} & T_{Sni8} \\ T_{Sni41} & T_{Sni42} & T_{Sni43} & T_{Sni44} & T_{Sni45} & T_{Sni46} & T_{Sni47} & T_{Sni48} \\ T_{Sni51} & T_{Sni52} & T_{Sni53} & T_{Sni54} & T_{Sni55} & T_{Sni56} & T_{Sni57} & T_{Sni58} \\ T_{Sni61} & T_{Sni62} & T_{Sni63} & T_{Sni64} & T_{Sni65} & T_{Sni66} & T_{Sni67} & T_{Sni68} \\ T_{Sni71} - T_{Sni61} & T_{Sni72} - T_{Sni62} & T_{Sni73} - T_{Sni63} & T_{Sni74} - T_{Sni64} & T_{Sni75} - T_{Sni65} & T_{Sni76} - T_{Sni66} & T_{Sni77} - T_{Sni67} & T_{Sni78} - T_{Sni68} \\ T_{Sni81} - T_{Sni61} & T_{Sni82} - T_{Sni62} & T_{Sni83} - T_{Sni63} & T_{Sni84} - T_{Sni64} & T_{Sni85} - T_{Sni65} & T_{Sni86} - T_{Sni66} & T_{Sni87} - T_{Sni67} & T_{Sni88} - T_{Sni68} \end{bmatrix}_{z=h_n} \mathbf{H}_n \quad (29)$$

$$= \mathbf{T}^R \mathbf{H}_n$$

同理可得, 基岩中的应力、位移分量与各波波幅系数的关系:

$$\mathbf{S}^R = \mathbf{T}_S^R \mathbf{H}^R \exp[i(\omega t - k_x x)] \quad , \quad (25)$$

其中,  $\mathbf{S}^R$  为基岩中应力-位移矢量,

$$\mathbf{S}^R = \begin{bmatrix} \sigma_{zz}^R & \sigma_{xz}^R & u_x^R & u_z^R \end{bmatrix}^T , \quad (26a)$$

$\mathbf{H}^R$  为波幅矢量,

$$\mathbf{H}^R = \begin{bmatrix} A_p^i & B_s^i & A_p^r & B_s^r \end{bmatrix}^T , \quad (26b)$$

$\mathbf{T}_S^R$  为  $4 \times 4$  的系数矩阵, 矩阵各分量表达式见附录 2。

入射波会在各非饱和土层中产生 4 种上行波和 4 种下行波 (P<sub>1</sub>、P<sub>2</sub> 和 P<sub>3</sub> 和 SV 波), 各层非饱和土层中波幅系数之间的关系如第 2 节所述。

波场中所有波动满足交界面边界条件。假设基岩与第  $n$  层非饱和土交界面上不透水, 且不考虑二者之间的相对运动, 则基岩层与第  $n$  层非饱和土层交界面上的边界条件可以表示如下:

交界面上法向总应力连续,

$$\sigma_{zz}^R|_{z=0} = \sigma_{zzn}^S|_{z=h_n} + \sigma_{zzn}^W|_{z=h_n} + \sigma_{zzn}^N|_{z=h_n} ; \quad (27a)$$

基岩的切向应力与第  $n$  层非饱和土固相切向应力连续,

$$\sigma_{xz}^R|_{z=0} = \sigma_{xzn}^S|_{z=h_n} ; \quad (27b)$$

基岩的法向位移与第  $n$  层非饱和土固相、气相与固相的法向位移连续,

$$u_z^R|_{z=0} = u_{zn}^S|_{z=h_n} = u_{zn}^W|_{z=h_n} = u_{zn}^N|_{z=h_n} ; \quad (27c)$$

基岩的切向位移与第  $n$  层非饱和土固相的切向位移连续,

$$u_x^R|_{z=0} = u_{xn}^S|_{z=h_n} . \quad (27d)$$

第1层非饱和土表面为自由地表, 边界条件为

$$\sigma_{zz1}^S|_{z=0} = \sigma_{zz1}^W|_{z=0} = \sigma_{zz1}^N|_{z=0} = \sigma_{xz1}^S|_{z=0} = 0 . \quad (27e)$$

根据基岩层和第  $n$  层非饱和土层的边界条件, 有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}^R|_{z=0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{zzn}^S + \sigma_{zzn}^W + \sigma_{zzn}^N \\ \sigma_{xzn}^S \\ u_{xn}^S \\ u_{zn}^S \\ u_{zn}^W - u_{zn}^S \\ u_{zn}^N - u_{zn}^S \end{bmatrix}_{z=h_n} . \quad (28)$$

将式(13)、(25)代入式(28), 可以得到式(29)。式(29)中,  $T_{Sni}(i, j=1, 2, \dots, 8)$ 是矩阵  $\mathbf{T}_{Sn}$  的各分量。将各非饱和土层波幅系数递推公式(18)代入式(29)可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{S 4 \times 4}^R \\ \boldsymbol{\theta}_{1 \times 4} \\ \boldsymbol{\theta}_{1 \times 4} \end{bmatrix}_{z=0} = \mathbf{T}^R \mathbf{H}_n = \mathbf{T}^R \mathbf{T}_{nl} \mathbf{H}_1 \quad \text{。} \quad (30)$$

根据第 1 层非饱和土表面的自由边界条件式(27e)及应力、位移分量与各波波幅系数关系式(13), 可以进一步得到

$$\begin{bmatrix} T_{S111} & T_{S112} & T_{S113} & T_{S114} & T_{S115} & T_{S116} & T_{S117} & T_{S118} \\ T_{S121} & T_{S122} & T_{S123} & T_{S124} & T_{S125} & T_{S126} & T_{S127} & T_{S128} \\ T_{S131} & T_{S132} & T_{S133} & T_{S134} & T_{S135} & T_{S136} & T_{S137} & T_{S138} \\ T_{S141} & T_{S142} & T_{S143} & T_{S144} & T_{S145} & T_{S146} & T_{S147} & T_{S148} \end{bmatrix} \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{。} \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}^R \Big|_{z=0} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{zn}^S + \sigma_{zn}^W \\ \sigma_{xn}^S \\ u_{xn}^S \\ u_{zn}^S \\ u_{zn}^W - u_{zn}^S \end{bmatrix}_{z=h_n} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{S 4 \times 4}^R \\ \boldsymbol{\theta}_{1 \times 4} \end{bmatrix}_{z=0} \mathbf{H}^R = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^2 T'_{Sni1} & \sum_{i=1}^2 T'_{Sni2} & \sum_{i=1}^2 T'_{Sni4} & \sum_{i=1}^2 T'_{Sni5} & \sum_{i=1}^2 T'_{Sni6} & \sum_{i=1}^2 T'_{Sni8} \\ T'_{Sni41} & T'_{Sni42} & T'_{Sni44} & T'_{Sni45} & T'_{Sni46} & T'_{Sni48} \\ T'_{Sni51} & T'_{Sni52} & T'_{Sni54} & T'_{Sni55} & T'_{Sni56} & T'_{Sni58} \\ T'_{Sni61} & T'_{Sni62} & T'_{Sni64} & T'_{Sni65} & T'_{Sni66} & T'_{Sni68} \\ T'_{Sni71} - T'_{Sni61} & T'_{Sni72} - T'_{Sni62} & T'_{Sni74} - T'_{Sni64} & T'_{Sni75} - T'_{Sni65} & T'_{Sni76} - T'_{Sni66} & T'_{Sni78} - T'_{Sni68} \end{bmatrix}_{z=h_n} \mathbf{H}'_n \quad (32)$$

方程组(30)中, 共有 6 个方程, 10 个待定系数, 分别为  $\mathbf{H}_{1(8 \times 1)}$  和  $A_p^r$ ,  $B_s^r$ , 当 P 波入射时  $A_p^i$  已知,  $B_s^i = 0$ , 当 SV 波入射时  $B_s^i$  已知,  $A_p^i = 0$ ; 方程组(31)中, 共有 4 个方程。联立方程组(30)、(31), 便能求得待定系数  $\mathbf{H}_{1(8 \times 1)}$  和  $A_p^r$ ,  $B_s^r$ , 从而确定整个基岩上覆成层非饱和场地中的波场, 根据应力、位移分量与各波波幅系数关系式(13), 可以进一步求得非饱和土层中各点的应力、位移。

实际地层中由于地下水的存在, 往往把地下水位以下土层看成饱和土。由于本文的非饱和孔隙介质波动方程式可以退化为饱和孔隙介质的波动方程, 所以本文的解也可以进一步推广至基岩-饱和土-成层非饱和土场地模型。

设图 1 中第  $n$  层为饱和土层, 其上  $n-1$  层为非饱和土层。基岩与饱和土层间波幅系数关系可以由式(28)、(29)退化得到, 见式(32)。其中  $T'_{Sni}(i, j=1, 2, \dots, 8)$ 是令矩阵  $\mathbf{T}_{Sn}$  中与气相有关参数为 0 时的各分量, 加上角“'”表示区别。 $\mathbf{H}'_n$  为饱和土层波幅系数, 饱和土层中有 P<sub>1</sub>、P<sub>2</sub> 和 SV 3 种波动, 上下行共 6 个波幅系数, 具体为

$$\mathbf{H}'_n = \begin{bmatrix} A_{np1}^u & A_{np2}^u & B_{ns}^u & A_{np1}^d & A_{np2}^d & B_{ns}^d \end{bmatrix}^T, \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{zn}^W \\ \sigma_{zn}^S \\ \sigma_{xn}^S \\ u_{xn}^S \\ u_{zn}^S \\ u_{zn}^W \end{bmatrix}_{z=0} = \begin{bmatrix} \sigma_{zn-1}^N \\ \sigma_{zn-1}^W \\ \sigma_{zn-1}^S \\ \sigma_{xn-1}^S \\ u_{xn-1}^S \\ u_{zn-1}^S \\ u_{zn-1}^W \end{bmatrix}_{z=h_{n-1}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T'_{Sn21} & T'_{Sn22} & T'_{Sn24} & T'_{Sn25} & T'_{Sn26} & T'_{Sn28} \\ T'_{Sn31} & T'_{Sn32} & T'_{Sn34} & T'_{Sn35} & T'_{Sn36} & T'_{Sn38} \\ T'_{Sn41} & T'_{Sn42} & T'_{Sn44} & T'_{Sn45} & T'_{Sn46} & T'_{Sn48} \\ T'_{Sn51} & T'_{Sn52} & T'_{Sn54} & T'_{Sn55} & T'_{Sn56} & T'_{Sn58} \\ T'_{Sn61} & T'_{Sn62} & T'_{Sn64} & T'_{Sn65} & T'_{Sn66} & T'_{Sn68} \\ T'_{Sn71} & T'_{Sn72} & T'_{Sn74} & T'_{Sn75} & T'_{Sn76} & T'_{Sn78} \end{bmatrix}_{z=h_{n-1}} \cdot \quad (34)$$

饱和土层与非饱和土层间的波幅系数关系可以由式(16)退化得到, 见式(34)。联立式(31)、(32)和(34)可以求解得到基岩、饱和土层及各层非饱和土层中待求的波幅系数, 从而确定问题的解。同理可以得到基岩-成层饱和土-成层非饱和土场地波动问题的解, 此处不再赘述。

## 4 验证及应用

### 4.1 验证

为验证本文求解过程的正确性, 设图 1 中非饱和土层数为 2, 两层土取相同材料参数, 相同厚度, 此时模型与文献[16]的“基岩上覆单一非饱和土层”模型一致。取与文献[16]相同的土层及基岩的材料参数, 土层材料参数见表 1; 土水特征曲线参数为  $S_{rw} = 0.1$ ,  $S_{rn} = 0.95$ ,  $p_d = 50$  kPa,  $\lambda = 1.5$ , 饱和度为 0.8, 两层土的厚度  $h_1 = h_2 = 20$  m, 基岩材料参数见表 2。

表 1 非饱和土层材料参数<sup>[16]</sup>

Table 1 Material parameters of unsaturated soils<sup>[16]</sup>

材料参数	符号	值	单位
孔隙率	$n_0$	0.23	
土颗粒密度	$\rho^s$	2650	kg/m <sup>3</sup>
液相密度	$\rho^w$	997	kg/m <sup>3</sup>
气相密度	$\rho^n$	1.1	kg/m <sup>3</sup>
土颗粒体积模量	$K^s$	$3.5 \times 10^{10}$	Pa
液相体积模量	$K^w$	$2.25 \times 10^9$	Pa
气相体积模量	$K^n$	$0.11 \times 10^6$	Pa
液相黏度	$\nu^w$	$1.0 \times 10^{-3}$	Pa·s
气相黏度	$\nu^n$	$1.8 \times 10^{-5}$	Pa·s
渗透率	$k$	$2.5 \times 10^{-12}$	m <sup>2</sup>
土骨架体积模量	$K$	$1.02 \times 10^9$	Pa
土骨架剪切模量	$G$	$1.44 \times 10^9$	Pa

表 2 基岩层材料参数

Table 2 Material parameters of bedrock

材料参数	符号	值	单位
拉梅常数	$\lambda^r$	$12.0 \times 10^9$	Pa
拉梅常数	$\mu^r$	$8.0 \times 10^9$	Pa
密度	$\rho^r$	2700	kg/m <sup>3</sup>

图 2 给出了 P 波以  $\theta = 20^\circ$  入射时, 第 1 层非饱和土顶面(即自由地表)的水平和竖向位移放大系数与入射波相对频率的关系。其中  $\omega_1 = \pi c_{ss} / 2(h_1 + h_2)$ ,

$c_{ss}$ 为上覆土层完全饱和时的剪切波波速。图中给出了相同条件下文献[16]的计算结果。从图中可以看出, 二者吻合, 说明本文的解是正确的。

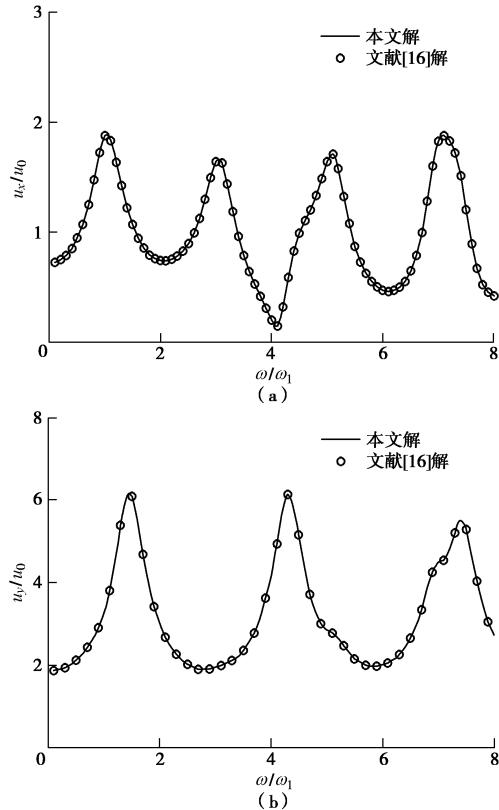


图 2 本文解与文献[16]解的对比图

Fig. 2 Comparison between solutions in this paper and Ref. [16]

#### 4.2 地下水位变化对地震地面运动影响分析

当前关于地下水位变化对地震地面运动的影响研究甚少, 李伟华等<sup>[18]</sup>以 Biot 流体饱和多孔介质波动理论为基础, 把地下水位以下的土层看做水饱和, 地下水位以上土层视为气饱和, 即干土, 通过研究入射平面简谐波在成层地基中的传播, 分析了地下水位变化对地震地面运动的影响。该研究与工程实际中, 地下水位以上为饱和度变化的非饱和土层的情况不符。

为了更加合理地体现地下水位以上为饱和度变化的非饱和土层这一实际土层分布情况, 本节将本文的解用于地下水位变化对地震地面运动的影响分析。建立如图 3 所示的分析模型。设基岩上覆土层为饱和度不同的同一种土, 土层和基岩的材料参数分别见表 1, 2。地下水位以下为饱和土, 地下水位以上土层的饱和度沿深度呈如下指数变化<sup>[19]</sup>

$$S_r(z) = S_r(0) + [S_r(H-h) - S_r(0)] \left( \frac{z}{H-h} \right)^\gamma, \quad (35)$$

式中,  $S_r(z)$  为地表以下  $z$  处土层的饱和度,  $S_r(0)$  为地表土层饱和度,  $S_r(H-h)$  为紧邻地下水位土层的饱和度;  $H$  为基岩上覆土层总厚度, 取为 100 m,  $H-h$  为地下水埋深,  $\gamma$  为梯度因子, 取为 10。分析中, 为反

映饱和度沿深度的梯度变化, 地下水位以上土层分为 4 层, 每层的饱和度自上而下分别为 0.3, 0.5, 0.7 和 0.9, 根据式 (35) 可以得到各非饱和土层的厚度比例为  $h_1 : h_2 : h_3 : h_4 = 8 : 2 : 1 : 1$ 。

分析中仍采用无量纲频率  $\omega / \omega_0$ ,  $\omega_0 = \pi c_{ss} / 2H$  为上覆土层完全饱和时的固有频率,  $c_{ss}$  为上覆土层完全饱和时的剪切波波速。

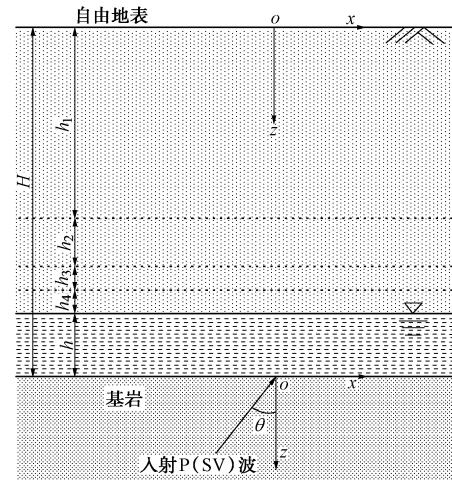


图 3 地下水位变化分析模型

Fig. 3 Analysis model for change of underground water table

#### (1) P 波入射时地下水位变化的影响

图 4, 5 分别给出入射角度为  $0^\circ$  和  $30^\circ$  时, P 波入射下地表水平、竖向位移放大系数 (地表水平、竖向位移幅值与入射波产生的位移幅值的比值, 下同) 频率响应曲线。为反映地下水位的影响, 饱和土厚度  $h$  分别取为  $0.1H$ ,  $0.2H$ ,  $0.3H$ ,  $0.4H$ ,  $0.5H$ ,  $h$  增加表示地下水位上升。

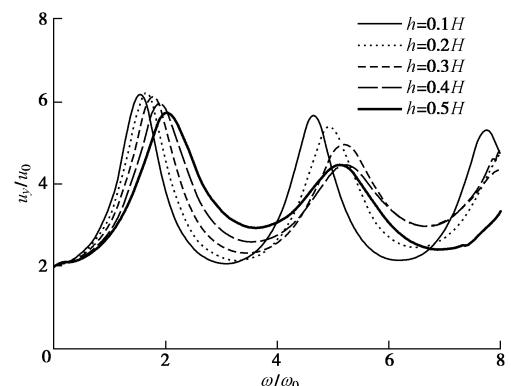


图 4 P 波  $0^\circ$  入射时地表位移随相对频率变化关系曲线

Fig. 4 Surface displacement amplitudes versus relative frequencies under P-wave incidence with  $\theta = 0^\circ$

从图 5, 6 中可以看到, 地下水位的变化对地面运动的共振峰值和频率均有显著的影响。当 P 波垂直入射 ( $\theta = 0^\circ$ ) 时, 随着地下水位的上升, 地面运动共振峰值逐渐减小, 峰值频率逐渐增大, 这与文献[18]所得规律一致。当 P 波斜入射 ( $\theta = 30^\circ$ ) 时, 地下水位的变化对水平位移的峰值及峰值频率影响相对较

小, 对竖向位移的峰值及峰值频率则影响较大, 随着地下水位的上升, 竖向位移峰值逐渐减小, 峰值频率逐渐增加。与垂直入射相比, 斜入射时地下水位变化对竖向位移的峰值及峰值频率的影响更大。

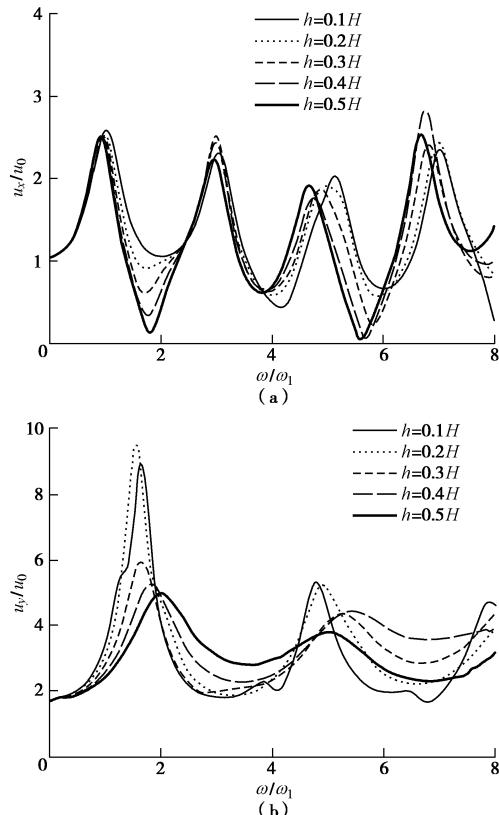


图 5 P 波  $30^\circ$  入射时地表位移随相对频率变化关系曲线

Fig. 5 Surface displacement amplitudes versus relative frequencies under P-wave incidence with  $\theta = 30^\circ$

图 6 给出了  $\omega / \omega_0 = 1.0$ , 不同地下水位条件下, P 波入射时地表水平、竖向位移放大系数随入射角变化的关系曲线。从图 6 中可以看出, 水平位移随着入射角的增加先增大后减小, 当  $\theta = 0^\circ$  和  $\theta = 90^\circ$  时为 0, 达到最大值时的入射角度与地下水位有关, 随着地下水位上升, 达到最大值时的入射角度增加。当  $\theta = 0^\circ$  时, 竖向位移最大, 随着入射角增加逐渐减小, 到达一定入射角时, 竖向位移随入射角的变化曲线出现明显转折点, 当入射角大于该转折点时, 竖向位移急剧下降, 当  $\theta = 90^\circ$  时竖向位移为 0。随着地下水位上升, 曲线出现转折点对应的入射角越大。从图 6 中还可以看出, 当  $\omega / \omega_0 = 1.0$  时, 地下水位对水平位移的影响随着入射角增加先增加再减小, 相同入射角下, 随着地下水位上升, 水平位移放大系数减小; 当入射角度不大时, 地下水位对竖向位移的影响较大, 随着地下水位上升, 水平位移放大系数减小。

## (2) SV 波入射时地下水位变化的影响

图 7, 8 分别给出入射角度为  $0^\circ$  和  $30^\circ$  时, SV 波入射下位移放大系数频率响应曲线。从图 7, 8 中可

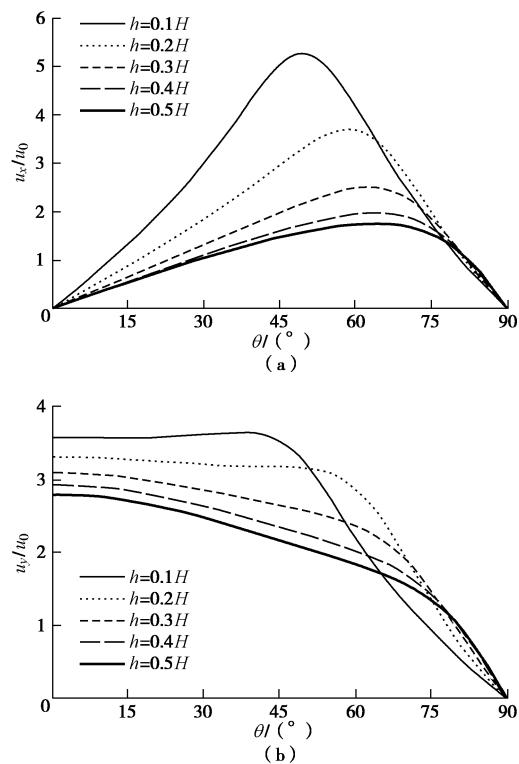


图 6  $\omega / \omega_0 = 1.0$  时 P 波入射下地表位移随入射角变化关系曲线

Fig. 6 Surface displacement amplitudes versus incident angle  $\theta$  under P-wave incidence with  $\omega / \omega_0 = 1.0$

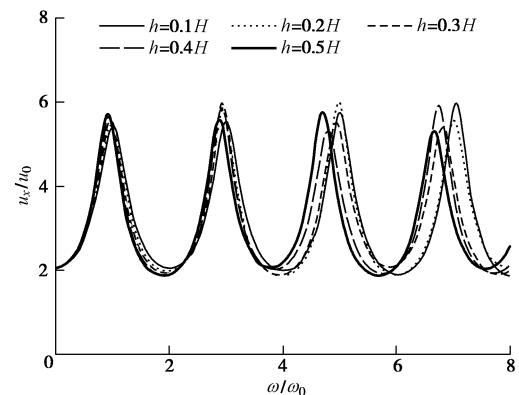
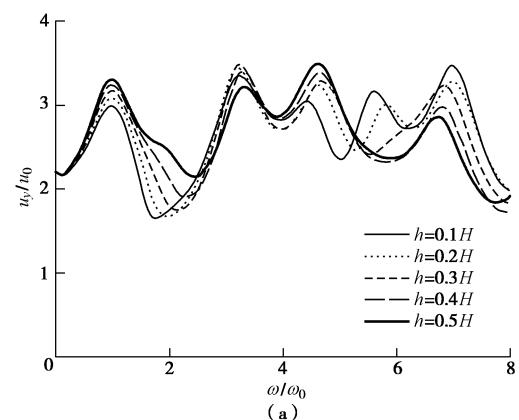


图 7 SV 波  $0^\circ$  入射时地表位移随相对频率变化关系曲线

Fig. 7 Surface displacement amplitudes versus relative frequencies under SV-wave incidence with  $\theta = 0^\circ$



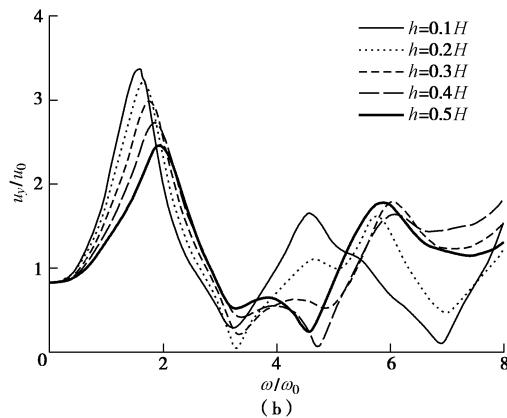


图 8 SV 波  $30^\circ$  入射时地表位移随相对频率变化关系曲线  
Fig. 8 Surface displacement amplitudes versus relative frequencies under SV-wave incidence with  $\theta = 30^\circ$

以看出。SV 波入射时地下水位变化对地表位移放大系数影响也较大, 这种影响同样与入射波频率和入射角有关。当 SV 波垂直入射 ( $\theta = 0^\circ$ ) 时, 随着地下水位的上升, 地面运动共振峰值有所增加, 峰值频率减小, 但变化不明显。当 SV 波斜入射 ( $\theta = 30^\circ$ ) 时, 地下水位的变化对水平位移的峰值频率影响较小, 在场地特征频率下, 随着地下水位上升, 水平位移峰值有增大趋势; 地下水位的变化对竖向位移的峰值及峰值频率影响较大, 随着地下水位的上升, 竖向位移峰值逐渐减小, 峰值频率逐渐增加。

## 5 结语

本文在现有非饱和多孔介质波动理论的基础上, 采用传递矩阵法, 分别推导了平面 P 波和 SV 波入射下, 基岩上覆成层非饱和土层复杂场地波动问题的解析解, 并将该解进一步推广到基岩-饱和土-成层非饱和土层的情况。通过退化, 与已有的基岩上覆单一非饱和土层波动问题的解进行对比, 验证了本文方法的正确性。

利用该解答初步分析了非饱和土层的饱和度呈梯度变化时, 地下水水位变化对地面运动的影响。得到了一些初步结论: 地下水位变化对地面运动的影响与入射波频率和入射角有关。相同频率下, 当入射角较小时, 地下水位变化对地表竖向位移的影响较大; 地下水位变化对水平位移的影响随着入射角增加先增加后减小。相同入射角下, 随着地下水位上升, 地表竖向位移的峰值减小, 峰值频率增加, 而地表水平位移的峰值及峰值频率变化不大。

上述应用也进一步说明, 本文所建立的解答为不仅可以为非饱和土地震自由场提供波动输入, 还可以用于非均匀场地波动问题分析中。

需要说明的是, 本文结果仅限于现有的非饱和多孔介质波动理论, 分析中饱和度指初始饱和度, 没有考虑地基经过波动后, 吸力或饱和度变化而引起的材

料参数变化, 有一定局限性, 对此在后续工作中将进一步深入探究。

## 附录:

矩阵  $\mathbf{T}_{Si}$  中各分量  $T_{Sij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 8$ ) 的表达式为:

$$T_{Si1} = -k_{ip1}^2 (\delta_{i1}^N M_{NNi} + M_{SNi} + \delta_{i1}^W M_{WNi}) \exp(ik_{ip1z} z),$$

$$T_{Si12} = -k_{ip2}^2 (\delta_{i2}^N M_{NNi} + M_{SNi} + \delta_{i2}^W M_{WNi}) \exp(ik_{ip2z} z),$$

$$T_{Si13} = -k_{ip3}^2 (\delta_{i3}^N M_{NNi} + M_{SNi} + \delta_{i3}^W M_{WNi}) \exp(ik_{ip3z} z),$$

$$T_{Si14} = 0,$$

$$T_{Si15} = -k_{ip1}^2 (\delta_{i1}^N M_{NNi} + M_{SNi} + \delta_{i1}^W M_{WNi}) \exp(-ik_{ip1z} z),$$

$$T_{Si16} = -k_{ip2}^2 (\delta_{i2}^N M_{NNi} + M_{SNi} + \delta_{i2}^W M_{WNi}) \exp(-ik_{ip2z} z),$$

$$T_{Si17} = -k_{ip3}^2 (\delta_{i3}^N M_{NNi} + M_{SNi} + \delta_{i3}^W M_{WNi}) \exp(-ik_{ip3z} z),$$

$$T_{Si18} = 0;$$

$$T_{Si21} = -k_{ip1}^2 (M_{SWi} + \delta_{i1}^W M_{WWi} + \delta_{i1}^N M_{WNi}) \exp(ik_{ip1z} z),$$

$$T_{Si22} = -k_{ip2}^2 (M_{SWi} + \delta_{i2}^W M_{WWi} + \delta_{i2}^N M_{WNi}) \exp(ik_{ip2z} z),$$

$$T_{Si23} = -k_{ip3}^2 (M_{SWi} + \delta_{i3}^W M_{WWi} + \delta_{i3}^N M_{WNi}) \exp(ik_{ip3z} z),$$

$$T_{Si24} = 0;$$

$$T_{Si25} = -k_{ip1}^2 (M_{SWi} + \delta_{i1}^W M_{WWi} + \delta_{i1}^N M_{WNi}) \exp(-ik_{ip1z} z),$$

$$T_{Si26} = -k_{ip2}^2 (M_{SWi} + \delta_{i2}^W M_{WWi} + \delta_{i2}^N M_{WNi}) \exp(-ik_{ip2z} z),$$

$$T_{Si27} = -k_{ip3}^2 (M_{SWi} + \delta_{i3}^W M_{WWi} + \delta_{i3}^N M_{WNi}) \exp(-ik_{ip3z} z),$$

$$T_{Si28} = 0;$$

$$T_{Si31} = -[k_{ip1}^2 (M_{SSi} + \delta_{i1}^W M_{SWi} + \delta_{i1}^N M_{SNi}) + 2G_i k_{ip1z}^2] \exp(ik_{ip1z} z),$$

$$T_{Si32} = -[k_{ip2}^2 (M_{SSi} + \delta_{i2}^W M_{SWi} + \delta_{i2}^N M_{SNi}) + 2G_i k_{ip2z}^2] \exp(ik_{ip2z} z),$$

$$T_{Si33} = -[k_{ip3}^2 (M_{SSi} + \delta_{i3}^W M_{SWi} + \delta_{i3}^N M_{SNi}) + 2G_i k_{ip3z}^2] \exp(ik_{ip3z} z),$$

$$T_{Si34} = -2G_i k_{isx} k_{isz} \exp(ik_{isz} z),$$

$$T_{Si35} = -[k_{ip1}^2 (M_{SSi} + \delta_{i1}^W M_{SWi} + \delta_{i1}^N M_{SNi}) + 2G_i k_{ip1z}^2] \exp(-ik_{ip1z} z),$$

$$T_{Si36} = -[k_{ip2}^2 (M_{SSi} + \delta_{i2}^W M_{SWi} + \delta_{i2}^N M_{SNi}) + 2G_i k_{ip2z}^2] \exp(-ik_{ip2z} z),$$

$$T_{Si37} = -[k_{ip3}^2 (M_{SSi} + \delta_{i3}^W M_{SWi} + \delta_{i3}^N M_{SNi}) + 2G_i k_{ip3z}^2] \exp(-ik_{ip3z} z),$$

$$T_{Si38} = 2G_i k_{isx} k_{isz} \exp(-ik_{isz} z);$$

$$T_{Si41} = 2G_i k_{ip1x} k_{ip1z} \exp(ik_{ip1z} z), \quad T_{Si42} = 2G_i k_{ip2x} k_{ip3z} \exp(ik_{ip3z} z),$$

$$T_{Si43} = 2G_i k_{ip3x} k_{ip3z} \exp(ik_{ip3z} z), \quad T_{Si44} = G_i (k_{isx}^2 - k_{isz}^2) \exp(ik_{isz} z),$$

$$T_{Si45} = -2G_i k_{ip1x} k_{ip1z} \exp(-ik_{ip1z} z),$$

$$T_{Si46} = -2G_i k_{ip2x} k_{ip3z} \exp(-ik_{ip3z} z),$$

$$T_{Si47} = -2G_i k_{ip3x} k_{ip3z} \exp(-ik_{ip3z} z),$$

$$T_{Si48} = G_i (k_{isx}^2 - k_{isz}^2) \exp(-ik_{isz} z);$$

$$T_{Si51} = -ik_{ip1x} \exp(ik_{ip1z} z), \quad T_{Si52} = -ik_{ip2x} \exp(ik_{ip2z} z),$$

$$T_{Si53} = -ik_{ip3x} \exp(ik_{ip3z} z), \quad T_{Si54} = ik_{isz} \exp(ik_{isz} z),$$

$$T_{Si55} = -ik_{ip1x} \exp(-ik_{ip1z} z), \quad T_{Si56} = -ik_{ip2x} \exp(-ik_{ip2z} z),$$

$$T_{Si57} = -ik_{ip3x} \exp(-ik_{ip3z} z), \quad T_{Si58} = -ik_{isz} \exp(-ik_{isz} z),$$

$$T_{Si61} = ik_{ip1z} \exp(ik_{ip1z} z), \quad T_{Si62} = ik_{ip2z} \exp(ik_{ip2z} z),$$

$$T_{Si63} = ik_{ip3z} \exp(ik_{ip3z} z), \quad T_{Si64} = ik_{isx} \exp(ik_{isz} z),$$

$$T_{Si65} = -ik_{ip1z} \exp(-ik_{ip1z} z), \quad T_{Si66} = -ik_{ip2z} \exp(-ik_{ip2z} z),$$

$$T_{Si67} = -ik_{ip3z} \exp(-ik_{ip3z} z), \quad T_{Si68} = ik_{isx} \exp(-ik_{isz} z);$$

$$T_{Si71} = ik_{ip1z} \exp(ik_{ip1z} z) \delta_{i1}^W, \quad T_{Si72} = ik_{ip2z} \exp(ik_{ip2z} z) \delta_{i2}^W,$$

$$T_{Si73} = ik_{ip3z} \exp(ik_{ip3z} z) \delta_{i3}^W, \quad T_{Si74} = ik_{isx} \exp(ik_{isz} z) \delta_{is}^W,$$

$$T_{Si75} = -ik_{ip1z} \exp(-ik_{ip1z} z) \delta_{i1}^W,$$

$$\begin{aligned}
 T_{Si76} &= -ik_{ip2z} \exp(-ik_{ip2z} z) \delta_{i2}^W, \\
 T_{Si77} &= -ik_{ip3z} \exp(-ik_{ip3z} z) \delta_{i3}^W, \quad T_{Si78} = ik_{isx} \exp(-ik_{isx} z) \delta_{is}^W; \\
 T_{Si81} &= ik_{ip1z} \exp(ik_{ip1z} z) \delta_{i1}^N, \quad T_{Si82} = ik_{ip2z} \exp(ik_{ip2z} z) \delta_{i2}^N, \\
 T_{Si83} &= ik_{ip3z} \exp(ik_{ip3z} z) \delta_{i3}^N, \quad T_{Si84} = ik_{isx} \exp(ik_{isx} z) \delta_{is}^N, \\
 T_{Si85} &= -ik_{ip1z} \exp(-ik_{ip1z} z) \delta_{i1}^N, \\
 T_{Si86} &= -ik_{ip2z} \exp(-ik_{ip2z} z) \delta_{i2}^N, \\
 T_{Si87} &= -ik_{ip3z} \exp(-ik_{ip3z} z) \delta_{i3}^N, \quad T_{Si88} = ik_{isx} \exp(-ik_{isx} z) \delta_{is}^N.
 \end{aligned}$$

矩阵  $T_s^R$  中各分量  $T_{Sij}^R$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ) 的表达式为

$$\begin{aligned}
 T_{S11}^R &= -(\lambda^R k_p^2 + 2\mu^R k_{pz}^2) \exp(ik_{pz} z), \quad T_{S12}^R = -2\mu^R k_{sx} k_{sz} \exp(ik_{sz} z), \\
 T_{S13}^R &= -(\lambda^R k_p^2 + 2\mu^R k_{pz}^2) \exp(-ik_{pz} z), \quad T_{S14}^R = 2\mu^R k_{sx} k_{sz} \exp(-ik_{sz} z); \\
 T_{S21}^R &= 2\mu^R k_{px} k_{pz} \exp(ik_{pz} z), \quad T_{S22}^R = \mu^R (k_{sx}^2 - k_{sz}^2) \exp(ik_{sz} z), \\
 T_{S23}^R &= -2\mu^R k_{px} k_{pz} \exp(-ik_{pz} z), \quad T_{S24}^R = \mu^R (k_{sx}^2 - k_{sz}^2) \exp(-ik_{sz} z); \\
 T_{S31}^R &= -ik_{px} \exp(ik_{pz} z), \quad T_{S32}^R = ik_{sz} \exp(ik_{sz} z), \quad T_{S31}^R = -ik_{px} \exp(-ik_{pz} z), \\
 T_{S34}^R &= -ik_{sz} \exp(-ik_{sz} z); \quad T_{S41}^R = ik_{pz} \exp(ik_{pz} z), \quad T_{S32}^R = ik_{sx} \exp(ik_{sz} z), \\
 T_{S31}^R &= -ik_{pz} \exp(-ik_{pz} z), \quad T_{S34}^R = ik_{sx} \exp(-ik_{sz} z).
 \end{aligned}$$

## 参考文献:

- [1] SCHANZ M. Poroelastodynamics: linear models, analytical solutions, and numerical methods[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2009, **62**(3): 030803-1-030803-15.
- [2] VARDOULAKIS I, BESKOS D E. Dynamic behavior of nearly saturated porous media[J]. *Mechanics of Materials*, 1986, **5**(1): 87 - 108.
- [3] SANTOS J E, DOUGLAS J, CORBERO J, et al. A model for wave-propagation in a porous-medium saturated by a 2-phase fluid[J]. *Journal of Acoustical Society of America*, 1990, **87**(4): 1439 - 1448.
- [4] TUNCAY K, CORAPCIOGLU M Y. Body waves in poroelastic media saturated by two immiscible fluids[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1996, **101**(B11): 25149 - 25159.
- [5] WEI C F, MURALEETHARAN K K. A continuum theory of porous media saturated by multiple immiscible fluids: I Linear poroelasticity[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2002, **40**(16): 1807 - 1833.
- [6] LO W C, MAJER E, SPOSITO G. Wave propagation through elastic porous media containing two immiscible fluids[J]. *Water Resources Research*, 2005, **41**(2): 1 - 20.
- [7] LU J F, HANYGA A. Linear dynamic model for porous media saturated by two immiscible fluids[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, **42**(9/10): 2689 - 2709.
- [8] 蔡袁强, 李保忠, 徐长节. 两种不混溶流体饱和岩石中弹性波的传播[J]. *岩石力学与工程学报*, 2006, **25**(10): 2009 - 2016. (CAI Yuan-qiang, LI Bao-zhong, XU Chang-jie. Analysis of elastic wave propagation in sandstone saturated by two immiscible fluids[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2006, **25**(10): 2009 - 2016. (in Chinese))
- [9] ALBERS B. Analysis of the propagation of sound waves in partially saturated soils by means of a macroscopic linear poroelastic model[J]. *Transport in Porous Media*, 2009, **80**(1): 173 - 192.
- [10] 蔡袁强, 李保忠. 饱和度变化对弹性波在非饱和砂岩表面反射和透射的影响[J]. *岩石力学与工程学报*, 2006, **25**(3): 520 - 527. (CAI Yuan-qiang, LI Bao-zhong. Effect of water saturation on reflection and transmission of elastic waves at interface of partially saturated sandstone[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2006, **25**(3): 520 - 527. (in Chinese))
- [11] LO W C. Propagation and attenuation of Rayleigh waves in a semi-infinite unsaturated poroelastic medium[J]. *Advances in Water Resources*, 2008, **31**(10): 1399 - 1410.
- [12] CHEN W Y, XIA T D, HU W T. A mixture theory analysis for the surface-wave propagation in an unsaturated porous medium[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, **48**(16): 2402 - 2412.
- [13] CHEN W Y, XIA T D, CHEN W, et al. Propagation of plane P-waves at interface between elastic solid and unsaturated poroelastic medium[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2012, **33**(7): 829 - 844.
- [14] TOMAR S K, ASHISH ARORA. Reflection and transmission of elastic waves at an elastic/porous solid saturated by two immiscible fluids[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, **43**(7): 1991 - 2013.
- [15] KUMAR R, MIGLANI A, KUMAR S. Reflection and transmission of plane waves between two different fluid saturated porous half spaces[J]. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences - Technical Science*, 2011, **59**(2): 227 - 234.
- [16] 李伟华, 郑洁. 饱和度对平面 P 波入射下自由场地地震响应的影响分析[J]. *岩土工程学报*, 2017, **39**(3): 427 - 435. (LI Wei-hua, ZHENG Jie. Effects of saturation on free-field responses of site due to plane P-wave incidence[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2017, **39**(3): 427 - 435. (in Chinese))
- [17] BIOT M A. Theory of propagation of elastic wave in fluid-saturated porous soil[J]. *Journal of Acoustical Society of America*, 1956, **28**(2): 168 - 178.
- [18] 李伟华, 赵成刚. 地下水位变化对地震地面运动的影响[J]. *地震学报*, 2015, **37**(3): 482 - 492. (LI Wei-hua, ZHAO Cheng-gang. Effects of the groundwater level variation on earthquake ground motions[J]. *Acta Seismologica Sinica*, 2015, **37**(3): 482 - 492. (in Chinese))
- [19] ZHOU F X, LAI Y M, SONG R X. Propagation of plane wave in non-homogeneously saturated soils[J]. *Science China Technological Sciences*, 2013, **56**(2): 430 - 440.