

DOI: 10.11779/CJGE201809011

# 水力-力学耦合的超固结非饱和土本构模型的 隐式积分算法及其应用

李吴刚<sup>1, 2</sup>, 杨 庆<sup>\*1</sup>

(1. 大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024; 2. 江南大学环境与土木工程学院, 江苏 无锡 214000)

**摘要:** 超固结非饱和土经常出现于工程实践中, 表现出复杂的力学性质。从已有的非饱和土水力-力学耦合的本构模型出发, 将超固结的影响加入到了模型中, 使模型可以考虑超固结对非饱和土力学性质的影响。超固结非饱和土本构方程的求解是一个复杂的非线性问题, 给出了该超固结非饱和土水力-力学耦合模型的隐式积分算法和本构模型的一致切线模量, 并对该算法进行验证, 证明了该算法的正确性, 最后采用该算法对某非饱和土质边坡在地下水位上升的情况下进行有限元分析。

**关键词:** 非饱和土; 超固结; 本构模型; 隐式积分算法; 数值模拟

**中图分类号:** TU432      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-4548(2018)09-1652-07

**作者简介:** 李吴刚(1988-), 男, 博士研究生, 主要从事非饱和土本构关系的研究工作。E-mail: lwgn@mail.dlut.edu.cn。

## Implicit integration algorithm of hydro-mechanical constitutive model for overconsolidated unsaturated soils and its application

LI Wu-gang<sup>1, 2</sup>, YANG Qing<sup>1</sup>

(1. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China; 2. School of Environment and Civil Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214000, China)

**Abstract:** The overconsolidated unsaturated soils emerge in many engineering projects. The constitutive models for unsaturated soils are very complicated due to the complex mechanical behaviour of overconsolidated unsaturated soils. A modified constitutive model is given considering the effect of overconsolidation. The constitutive models for the overconsolidated unsaturated soils are used to solve complicated non-linear problems. The implicit integration algorithm of a hydro-mechanical constitutive model for overconsolidated unsaturated soils is given. The consistent tangent modulus is also given. The implicit integration algorithm is validated by the experimental data available in the literatures. The algorithm is applied to the finite element method to analyze an unsaturated soil slope.

**Key words:** unsaturated soil; overconsolidation; constitutive model; implicit integration algorithm; numerical simulation

## 0 引言

随着国内经济的快速发展, 近年来国家兴建了大规模的基础设施, 公路铁路路基、机场跑道、土坝等基础设施的变形特性和非饱和土的力学性质息息相关, 超固结非饱和土经常出现于工程实践中, 非饱和土相对于饱和土表现出复杂的力学特性: 土体中基质吸力的变化使正常固结非饱和土压缩曲线的斜率发生变化; 对于湿陷性黄土在净应力不变的条件下因基质吸力卸载可能发生的湿陷现象。而由于先期应力历史影响产生的超固结现象无疑使得非饱和土的力学性质更加复杂。Alonso 等<sup>[1]</sup>在 1990 年提出了 BBM 模型, BBM 模型首次提出了非饱和土加载湿陷(LC)屈服面的概念。自从 Alonso 建立 BBM 模型以来, 非饱和

土本构模型的发展有了质的飞跃。虽然 BBM 模型取得了巨大的成功, 但是 BBM 模型也存在一些缺陷, 比如, 该模型尚未考虑水力-力学耦合对非饱和土的物理力学性质的影响。Wheeler 等<sup>[2]</sup>明确指出, 在基质吸力和净应力都相同的情况下, 饱和度改变会对非饱和土的力学性质有显著的影响。随着对非饱和土的研究的深入, 刘艳等<sup>[3]</sup>在连续土力学的本构模型框架内采用广义有效应力、修正吸力和气体压力作为模型的应力状态变量, 建立了三轴应力状态下非饱和土的本构

**基金项目:** 国家自然科学基金重点项目(51639002); 国家自然科学基金项目(41572252); 辽宁省博士科研启动基金项目(201601055)

**收稿日期:** 2017-06-29

**\*通讯作者** (E-mail: qyang@dlut.edu.cn)

模型, Zhou 等<sup>[4]</sup>提出了和初始密度相关的水力-力学耦合的非饱和土本构模型, 该模型和以往本构模型的显著区别是将非饱和土的有效饱和度与有效应力作为非饱和土本构模型的变量, 能够较好描述水力-力学耦合对非饱和土力学性质的影响。

将水力-力学耦合的超固结非饱和土本构模型应用于实际工程问题时, 本构方程求解是一个复杂的非线性问题, 一般只能通过数值算法得到解答, 非饱和土本构算法可以分为两类: 显式的本构积分算法和隐式的本构积分算法, 不同的积分算法直接影响最终数值结果的精确性。显式的本构积分算法采用向前的欧拉积分方法, 求解下一步的应力增量。由于超固结非饱和土本构方程的非线性, 在采用显式的本构积分算法时, 会使得当前的应力状态漂移至屈服面之外, 导致局部误差, 影响最终数值计算结果的精确性。隐式积分算法由 Krieg 等<sup>[5]</sup>提出, Simo 等<sup>[6]</sup>对隐式积分算法进行了改进, 提出了基于一致切线模型的返回映射隐式积分算法。隐式积分算法通过弹性预测和塑性修正解决了显式积分算法应力从屈服面漂移的问题。Vaunat 等<sup>[7]</sup>、Zhang 等<sup>[8]</sup>、Borja 等<sup>[9]</sup>与 Hoyos 等<sup>[10]</sup>将隐式积分算法应用于非饱和土本构模型, 取得了理想的效果, 刘艳等<sup>[11]</sup>将隐式算法推广至水力-力学耦合的非饱和土本构模型, 较好地预测了非饱和土的水力-力学耦合的特性, 但未考虑超固结对非饱和土的影响。为了描述前期应力历史对后期土体变形的影响, 需在本构模型中引入能够考虑应力历史的对土体变形影响的方程, 如姚仰平等<sup>[12]</sup>在统一硬化模型中引入下负荷面模型, 使得超固结非饱和土水力-力学耦合的本构模型更加复杂, 增加了应用隐式算法的难度, 本文从已有的非饱和土水力-力学耦合的本构模型出发, 将其扩展至超固结非饱和土, 随后给出水力-力学耦合的超固结非饱和土的隐式积分算法, 并给出超固结非饱和土水力-力学耦合的本构模型的一致切线模型, 最后对该数值算法进行验证, 并将该算法运用于某非饱和土质边坡的有限元分析中。

## 1 超固结非饱和土的本构模型

李吴刚等<sup>[13]</sup>根据以往非饱和土文献中的试验结果经整理和分析后, 提出了非饱和土的硬化效应  $\xi$ , 如图 1 所示, 其物理意义为正常固结条件下, 非饱和土试样和饱和土试样在相同孔隙比时正常固结曲线之间的水平距离, 为一个无量纲的量, 通过整理文献中的试验数据发现非饱和土的硬化效应  $\xi$  是关于饱和度的函数, 可用下式描述:

$$\xi(S_r) = \langle a \ln S_r + b \rangle, \quad (1)$$

式中,  $a$  和  $b$  为材料参数。

通过引入非饱和土的硬化效应, 给出了正常固结非饱和土的体变方程:

$$e = N - \lambda \ln \frac{p'}{p'_r} + \lambda \xi(S_r), \quad (2)$$

式中,  $\lambda$  为饱和土正常固结曲线的斜率,  $p'_r$  为参考应力,  $N$  为饱和土的正常固结曲线与孔隙比轴的交点。

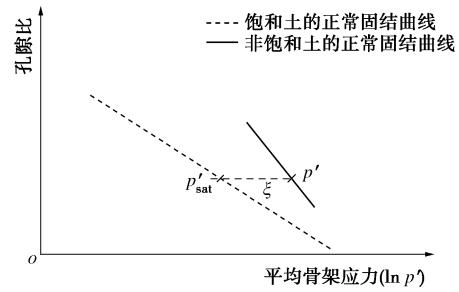


图 1 非饱和土硬化参数  $\xi$  定义

Fig. 1 Definition of hardening effect  $\xi$  of unsaturated soils

该体变方程认为非饱和土的体积变化由骨架应力改变引起的体积变化和饱和度改变引起的体积变化两部分组成。在该模型框架内, 加载湿陷屈服面 (LC 屈服面) 可表示为

$$p'_x = p'_c e^{\frac{\lambda}{\lambda-\kappa} \xi(S_r)}, \quad (3)$$

式中,  $p'_c$  为饱和土的先期固结压力,  $p'_x$  为非饱和土的屈服应力。将体变方程扩展至三轴应力状态, 根据修正的剑桥模型, 可以得到非饱和土的屈服面和塑性势面方程:

$$f = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \ln \frac{p'}{p'_x} + \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \ln \left( 1 + \frac{q^2}{M^2 p'^2} \right) = 0, \quad (4)$$

式中,  $e_0$  为初始孔隙比,  $q$  为偏应力,  $\kappa$  为弹性系数,  $\varepsilon_v^p$  为塑性体应变。

式 (3) 只适用于正常固结土, 对于超固结非饱和土, 可采用 Hashiguchi<sup>[14]</sup>提出的下负荷面理论, 将式 (3) 扩展至超固结非饱和土。下负荷面模型由下负荷屈服面和正常屈服面组成, 如图 2 所示, 下负荷面穿过当前的应力状态, 由下负荷面和正常屈服面之间的相似性可得如下关系:

$$\frac{q}{\bar{q}} = \frac{p'}{\bar{p}'}, \quad (5)$$

$$\frac{\bar{p}'}{p'} = \frac{\bar{p}'_x}{p'_N}. \quad (6)$$

对于图 2 中的正常屈服面, 根据式 (4) 可表示为

$$f = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \ln \frac{\bar{p}'}{\bar{p}'_x} + \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \ln \left( 1 + \frac{\bar{q}^2}{M^2 \bar{p}'^2} \right) = 0. \quad (7)$$

将式 (4)、(5) 代入式 (7) 中, 得到超固结非饱和土的屈服面和塑性势面方程:

$$f = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \ln \frac{p'}{p'_0} + \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \ln \left( 1 + \frac{q^2}{M^2 p'^2} \right) -$$

$$\frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \ln R - \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \ln \frac{p'_N}{p'_0} = 0 \quad , \quad (8)$$

式中,  $R$  为超固结比的倒数, 其发展准则采用如下形式:

$$dR = -\frac{\theta M(\lambda - \kappa)}{1 + e_0} \left( \frac{p'}{p'_r} \right)^2 \ln R \| d\varepsilon_{ij}^p \| \quad . \quad (9)$$

式中,  $\theta$  为材料参数, 控制着超固结的发展速率, 若  $\theta$  越小, 则超固结土在外荷载作用下需发生较多的塑性变形才可发展为正常固结土; 反之, 若  $\theta$  较大, 则超固结土在外荷载作用下只需发生较少的塑性变形即可发展为正常固结土。参数  $\theta$  可通过超固结试样的剪切或压缩试验的结果校核得到。

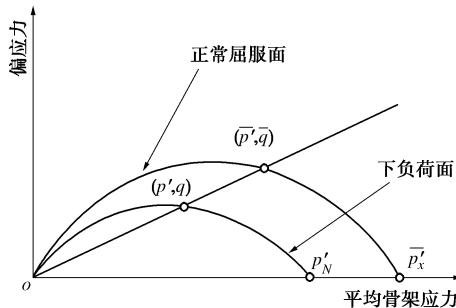


图 2 超固结非饱和土的正常屈服面和下负荷面

Fig. 2 Extension of subloading concept to unsaturated soils

对某击实试样, 假设该试样的初始平均净应力、初始基质吸力、初始孔隙比和初始饱和度分别为  $p_0$ ,  $s_0$ ,  $e_0$  和  $S_{r0}$ , 则初始状态时超固结比的倒数值可为

$$R_0 = \frac{p'_{N0}}{p'_{x0}} = (p_0 + S_{r0}s_0) \cdot \exp \left[ -\frac{N - \lambda \xi(S_{r0}) - e_0 + \lambda \ln p'_r - \kappa \ln(p_0 + S_{r0}s_0)}{\lambda - \kappa} \right] . \quad (10)$$

若初始超固结参数  $R_0$  越接近 1, 说明试样的初始应力越接近于应力历史上受到的最大先期应力, 则超固结试样的压缩曲线在初始阶段越与正常固结曲线越相似; 反之, 若初始超固结参数  $R_0$  越小, 则超固结试样的压缩曲线在初始阶段越接近弹性关系。为描述非饱和土的水力特性, 将饱和度的增量分为两部分: 由基质吸力改变引起的饱和度变化和孔隙比改变引起的饱和度变化<sup>[15]</sup>, 饱和度的增量方程可表示为

$$dS_r = -\lambda_{s_r} de + \frac{\partial S_r}{\partial s} ds \quad , \quad (11)$$

式中,  $\lambda_{s_r}$  为相同基质吸力条件下, 饱和度和孔隙比关系曲线的斜率,  $\frac{\partial S_r}{\partial s}$  为饱和度对基质吸力的偏导数。

本文中饱和度对基质吸力的偏导数采用 Van Genuchten 模型<sup>[16]</sup>描述:

$$\frac{S_r^d - S_r^{\text{res}}}{S_r^0 - S_r^{\text{res}}} = \left[ 1 + \left( \frac{s}{a_d} \right)^{m_d} \right]^{-n_d} , \quad (12)$$

$$\frac{S_r^w - S_r^{\text{res}}}{S_r^0 - S_r^{\text{res}}} = \left[ 1 + \left( \frac{s}{a_w} \right)^{m_w} \right]^{-n_w} , \quad (13)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial s} = \begin{cases} -n_d S_r^0 \left[ 1 + \left( \frac{s}{a_d} \right)^{m_d} \right]^{-n_d-1} \left( \frac{m_d}{a_d} \right) \left( \frac{s}{a_d} \right)^{m_d-1} & (\text{主脱湿曲线}), \\ -n_w S_r^0 \left[ 1 + \left( \frac{s}{a_w} \right)^{m_w} \right]^{-n_w-1} \left( \frac{m_w}{a_w} \right) \left( \frac{s}{a_w} \right)^{m_w-1} & (\text{主吸湿曲线}) . \end{cases} \quad (14)$$

式中  $S_r^{\text{res}}$  为残余饱和度;  $S_r^0$  为基质吸力为 0 时的饱和度;  $a_d$ ,  $m_d$ ,  $n_d$ ,  $a_w$ ,  $m_w$  和  $n_w$  为模型参数, 下标 d 和 w 分别表示脱湿和吸湿。

若当前的饱和度和基质吸力位于土水特征曲线主干线上, 则采用 Li<sup>[17]</sup> 提出的边界扫描准则:

$$\frac{\partial S_r}{\partial s} = \left[ \frac{|\bar{s} - \alpha|^\beta + |s - \alpha|^\beta (H-1)}{H |\bar{s} - \alpha|^\beta} \right] \frac{\partial S_r}{\partial \bar{s}} , \quad (15)$$

式中  $\beta$  和  $H$  为模型参数,  $\alpha$  为投影中心点, 它表示最近一次由脱湿变为吸湿或由吸湿变为脱湿变换处的基质吸力值,  $\bar{s}$  为映射点的基质吸力, 通过将当前的饱和度代入土水特征曲线的主干线上得到。

## 2 本构的隐式积分算法

本构的显式积分算法采用向前的欧拉积分算法, 由于上一步的变量不满足当前步的屈服条件, 所以会使得求解得到的应力增量从当前屈服面漂移, 影响计算精度。隐式的积分算法在求解时, 通过迭代不断更新当前的应力变量和内变量, 解决了应力变量从屈服面上漂移的问题, 提高了本构积分算法的精确性。非饱和土本构方程的隐式积分算法主要由弹性预测和塑性修正这两步组成, 由于本文中的模型采用下负荷面描述超固结现象, 使得当前的应力状态始终位于下负荷屈服面之上, 所以本文中的模型可以跳过弹性预测直接进行塑性修正, 简化了隐式积分算法的流程。

在  $[t_n, t_{n+1}]$  时刻内, 总应变增量为  $\Delta\varepsilon$ , 弹性试探应变与总应变相等, 根据相关联的流动法则, 在  $t_{n+1}$  时刻的弹性应变增量可表示为

$$\Delta\varepsilon_{n+1}^e = \Delta\varepsilon^{\text{tr}} - \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} , \quad (16)$$

式中,  $\Delta\varepsilon^{\text{tr}}$  为弹性试探应变,  $\Lambda$  为塑性乘子。在  $[t_n, t_{n+1}]$  时刻内的塑性体应变增量由式 (2) 可表示为

$$\Delta\varepsilon_v^p = -\frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \frac{\Delta p_x}{p_x} + \frac{\lambda}{1 + e_0} \frac{a}{S_r} \Delta S_r , \quad (17)$$

将式 (11) 代入式 (17), 经整理可得在  $[t_n, t_{n+1}]$  时刻内  $\bar{p}_x'$  的增量形式:

$$\begin{aligned}\Delta \bar{p}'_x &= -\frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \bar{p}'_x (\Delta \varepsilon_v^{\text{tr}} - \Delta \varepsilon_v^e) - \\ &\quad \frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \lambda \lambda_{S_r} \frac{a}{S_r} p_x \Delta \varepsilon_v^{\text{tr}} + \frac{\lambda}{\lambda-\kappa} \frac{a}{S_r} \bar{p}'_x \frac{\partial S_r}{\partial s} \Delta s, \quad (18)\end{aligned}$$

则在  $t_{n+1}$  时刻,  $\bar{p}'_x$  可表示为

$$\bar{p}'_{x(n+1)} = \bar{p}'_{x(n)} + \Delta \bar{p}'_x (\Delta \varepsilon_v^e, \bar{p}'_x) \quad . \quad (19)$$

由变量  $R$  的发展准则式 (9) 可得在  $t_{n+1}$  时刻  $R$  的表达式

$$R_{(n+1)} = R_n + \Delta R(\Delta \varepsilon^e, R) \quad , \quad (20)$$

把  $\Delta \varepsilon^e$ ,  $\bar{p}'_{x(n+1)}$ ,  $R_{(n+1)}$  和  $\Lambda$  设为未知量, 将式 (8)、(16)、(19)、(20) 联立求解, 为了书写方便, 以下将下标  $n+1$  省略, 可得

$$\left. \begin{array}{l} r_1 = \Delta \varepsilon^e - \Delta \varepsilon^{\text{re}} + \Lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = r_1(\Delta \varepsilon^e, \bar{p}'_x, R, \Lambda) = 0, \\ r_2 = \bar{p}'_x - \bar{p}'_{x(n)} - \Delta \bar{p}'_x (\Delta \varepsilon^e, \bar{p}'_x) = 0, \\ r_3 = R - R_n - \Delta R(\Delta \varepsilon^e, R) = 0, \\ r_4 = f(\Delta \varepsilon^e, \bar{p}'_x, R) = 0. \end{array} \right\} \quad (21)$$

对式 (21) 线性化后得到

$$\left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{I} + \Lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \varepsilon^e} & 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ -\frac{\partial \Delta \bar{p}'_x^e}{\partial \varepsilon^e} & 1 - \frac{\partial \Delta \bar{p}'_x}{\partial \bar{p}'_x} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial \Delta R}{\partial \varepsilon^e} & 0 & 1 - \frac{\partial \Delta R}{\partial R} & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \varepsilon^e} & \frac{\partial f}{\partial \bar{p}'_x} & \frac{\partial f}{\partial R} & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon^e \\ \Delta \bar{p}'_x \\ \Delta R \\ \Lambda \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1^{(k)} \\ \mathbf{r}_2^{(k)} \\ \mathbf{r}_3^{(k)} \\ \mathbf{r}_4^{(k)} \end{Bmatrix} \quad . \quad (22)$$

式中,  $\mathbf{I}$  为四阶对称单位张量,  $\mathbf{r}_1^{(k)}$ ,  $\mathbf{r}_2^{(k)}$ ,  $\mathbf{r}_3^{(k)}$  和  $\mathbf{r}_4^{(k)}$  分别为方程组迭代  $k$  次后的残值。对方程组 (22) 求解, 可以求得未知量的第  $k$  迭代步的增量, 再对未知量进行更新:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \varepsilon^e = \Delta \varepsilon^{e(k)} + \delta \Delta \varepsilon^e, \\ \bar{p}'_x = \bar{p}'_x^{(k)} + \delta \bar{p}'_x, \\ R = R^{(k)} + \delta R, \\ \Lambda = \Lambda^{(k)} + \delta \Lambda, \end{array} \right\} \quad (23)$$

将更新后的值代入式 (22) 中继续迭代计算, 直至残值小于容许误差后停止计算。

### 3 一致切线模量

隐式积分算法采用一致切线模量代替显式积分算法的连续弹塑性模量, 对于非饱和土, 其一致切线模量根据定义可表示为

$$\mathbf{D}^{\text{ep}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon^e} : \frac{\partial \Delta \varepsilon^e}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} = \mathbf{D}^e : \frac{\partial \Delta \varepsilon^e}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} \quad , \quad (24)$$

$$\mathbf{W}^{\text{ep}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial s} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon^e} : \frac{\partial \Delta \varepsilon^e}{\partial s} = \mathbf{D}^e : \frac{\partial \Delta \varepsilon^e}{\partial s} \quad . \quad (25)$$

对于式 (24) 可由式 (16) 对  $\Delta \varepsilon^{\text{tr}}$  求偏微分得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta \varepsilon^e}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} &= \mathbf{I} - \Lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \frac{\partial \Lambda}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} \\ &= \mathbf{I} - \Lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{D}^e : \frac{\partial \Delta \varepsilon^e}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \frac{\partial \Lambda}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} \quad . \end{aligned} \quad (26)$$

将式 (26) 整理后可得

$$\frac{\partial \Delta \varepsilon^e}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} = \mathbf{A}^{-1} : \left( \mathbf{I} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \frac{\partial \Lambda}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} \right) \quad , \quad (27)$$

其中  $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \Lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{D}^e$ , 对式 (19)、(20) 分别

求关于  $\Delta \varepsilon^{\text{tr}}$  的偏微分, 可得

$$\frac{\partial \bar{p}'_x}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} = \frac{\partial \Delta \bar{p}'_x}{\partial \Delta \varepsilon^e} : \frac{\partial \Delta \varepsilon^e}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} + \frac{\partial \Delta \bar{p}'_x}{\partial \bar{p}'_x} \frac{\partial \bar{p}'_x}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} + \frac{\partial \Delta \bar{p}'_x}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} \quad , \quad (28)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} &= \frac{\partial \Delta R}{\partial \Delta \varepsilon^e} : \frac{\partial \Delta \varepsilon^e}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} + \frac{\partial \Delta R}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} + \\ &\quad \frac{\partial \Delta R}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon^e} : \frac{\partial \Delta \varepsilon^e}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} + \frac{\partial \Delta R}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} \quad . \end{aligned} \quad (29)$$

对式 (28)、(29) 整理后可得

$$\frac{\partial \bar{p}'_x}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} = a^{-1} \left( \frac{\partial \Delta \bar{p}'_x}{\partial \Delta \varepsilon^e} : \frac{\partial \Delta \varepsilon^e}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} + \frac{\partial \Delta \bar{p}'_x}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} \right) \quad , \quad (30)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} = b^{-1} \left[ \left( \frac{\partial \Delta R}{\partial \Delta \varepsilon^e} + \frac{\partial \Delta R}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon^e} \right) : \frac{\partial \Delta \varepsilon^e}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} + \frac{\partial \Delta R}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} \right], \quad (31)$$

式中  $a = 1 - \frac{\partial \Delta \bar{p}'_x}{\partial \bar{p}'_x}$ ,  $b = 1 - \frac{\partial \Delta R}{\partial R}$ 。对式 (8) 求对  $\Delta \varepsilon^{\text{tr}}$  的偏微分, 可得

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon^e} : \frac{\partial \Delta \varepsilon^e}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{p}'_x} \frac{\partial \bar{p}'_x}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} + \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} = 0 \quad . \quad (32)$$

将式 (30)、(31) 代入式 (32) 经整理可得

$$\mathbf{a} : \frac{\partial \Delta \varepsilon^e}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} + \mathbf{b} = 0 \quad , \quad (33)$$

式中,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon^e} + a^{-1} \frac{\partial f}{\partial \bar{p}'_x} \frac{\partial \Delta \bar{p}'_x}{\partial \Delta \varepsilon^e} + \\ &\quad b^{-1} \frac{\partial f}{\partial R} \left( \frac{\partial \Delta R}{\partial \Delta \varepsilon^e} + \frac{\partial \Delta R}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{D}^e \right) \quad , \end{aligned} \quad (34)$$

$$\boldsymbol{\beta} = a^{-1} \frac{\partial f}{\partial \bar{p}'_x} \frac{\partial \Delta \bar{p}'_x}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} + b^{-1} \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial \Delta R}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} \quad . \quad (35)$$

将式 (27) 代入式 (33) 可得

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \Delta \varepsilon^{\text{tr}}} = c^{-1} (\mathbf{a} : \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{b}) \quad , \quad (36)$$

其中  $c = \mathbf{a} : \mathbf{A}^{-1} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ 。对于式 (25) 可由式 (16) 对  $\Delta \varepsilon^{\text{tr}}$

求偏微分得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e}{\partial s} &= \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{tr}}{\partial s} - A \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial s} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \frac{\partial A}{\partial s} \\ &= -A \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} : D^e : \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \frac{\partial A}{\partial s} .\end{aligned}\quad (37)$$

将式(37)整理后可得

$$\frac{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e}{\partial s} = -A^{-1} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial A}{\partial s} .\quad (38)$$

对式(19)、(20)分别求关于s的偏微分, 可得

$$\frac{\partial p'_x}{\partial s} = \frac{\partial \Delta p'_x}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e}{\partial s} + \frac{\partial \Delta p'_x}{\partial p'_x} \frac{\partial p'_x}{\partial s} + \frac{\partial \Delta p'_x}{\partial s} ,\quad (39)$$

$$\frac{\partial R}{\partial s} = \frac{\partial \Delta R}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e}{\partial s} + \frac{\partial \Delta R}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial s} + \frac{\partial \Delta R}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e}{\partial s} .\quad (40)$$

将式(39)、(40)整理后可得

$$\frac{\partial p'_x}{\partial s} = a^{-1} \left( \frac{\partial \Delta p'_x}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e}{\partial s} + \frac{\partial \Delta p'_x}{\partial s} \right) ,\quad (41)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e} = b^{-1} \left( \frac{\partial \Delta R}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e} + \frac{\partial \Delta R}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e}{\partial s} .\quad (42)$$

对式(8)求对 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{tr}$ 的偏导, 可得

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial p'_x} \frac{\partial p'_x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial s} = 0 ,\quad (43)$$

将式(30)、(31)代入式(32)经整理可得

$$a : \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e}{\partial s} + d = 0 ,\quad (44)$$

式中,  $d = a^{-1} \frac{\partial f}{\partial p'_x} \frac{\partial \Delta p'_x}{\partial s}$ 。

将式(38)代入式(33)经整理可得

$$\frac{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e}{\partial s} = c^{-1} d ,\quad (45)$$

将式(27)、(36)、(38)、(45)分别代入式(24)、(25), 经整理得到非饱和土的一致切线模量:

$$D^{ep} = D^e : A^{-1} : \left[ I - c^{-1} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes (a : A^{-1} + b) \right] ,\quad (46)$$

$$W^{ep} = -D^e : A^{-1} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} c^{-1} d .\quad (47)$$

## 4 算例分析

### 4.1 算法验证

前文推导了超固结非饱和土水力-力学耦合的本构模型的隐式积分算法, 在进行有限元数值分析前, 应先对数值算法的有效性进行验证。本节选用 Sun 等<sup>[18]</sup>对非饱和珍珠黏土进行的不排水条件下的压缩试验数据来确定模型参数, 选用 Sun 等<sup>[19]</sup>对非饱和珍珠黏土基质吸力恒定的压缩试验数据来验证算法的正确性。模型中的材料参数 $a$ 和 $b$ 可从压缩试验的结果得到。Sun 等<sup>[18]</sup>对不排水条件下珍珠土压缩试验过程中的饱

和度与基质吸力进行了监测, 珍珠土试样的初始孔隙比、基质吸力和饱和度分别为 1.33, 120 kPa 和 0.525, 平均净应力从 20 kPa 加载至 600 kPa, 试验结果重新绘制于图 3, 根据硬化效应 $\xi$ 的定义可得不同饱和度下的 $\xi$ 值, 将 $\xi$ 和饱和度 $S_r$ 绘制于 $\xi$ 和饱和度 $S_r$ 的半对数坐标系中, 如图 4 所示, 可得控制非饱和土硬化效应发展的参数 $a$ 和 $b$ , 其值分别为-4.29 和-1.1。参数 $\theta$ 控制超固结的发展速率可由压缩试验结果校核得到, 分别选取不同 $\theta$ 值(0.1, 0.55, 1.0)预测图 3 中的压缩试验结果, 由图 3 可知, 当 $\theta$ 取 0.55 时, 模型的预测结果(图 3 中的实曲线)与试验结果最接近, 故 $\theta$ 值取 0.55。材料参数 $\lambda_{S_r}$ 可由基质吸力恒定的压缩试验得到, 测定压缩过程中不同孔隙比时的饱和度, 得到饱和度和孔隙比关系曲线的斜率 $\lambda_{S_r}$ , Sun 等<sup>[19]</sup>已给出了珍珠土的材料参数 $\lambda_{S_r}$ , 其值为 0.35。土水特征曲线的模型参数可由土水特征曲线试验结果拟合得到。本节预测 Sun 等<sup>[19]</sup>中基质吸力恒定的压缩试验, 故土水特征曲线模型参数不再给出。模型中需要的其余模型参数可为:  $\lambda = 0.13$ ,  $\kappa = 0.03$ ,  $M = 1.15$ ,  $a = -4.29$ ,  $b = -1.1$ ,  $v = 0.3$ ,  $\lambda_{S_r} = 0.35$ ,  $\theta = 0.55$ 。

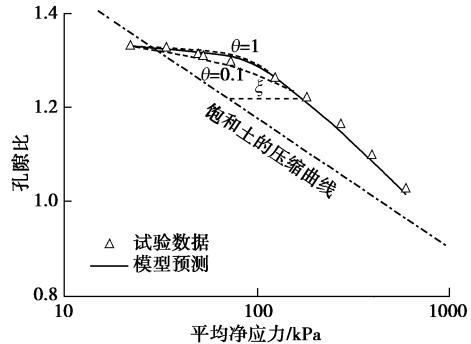


Fig. 3 Relationship between net mean stress and void ratio

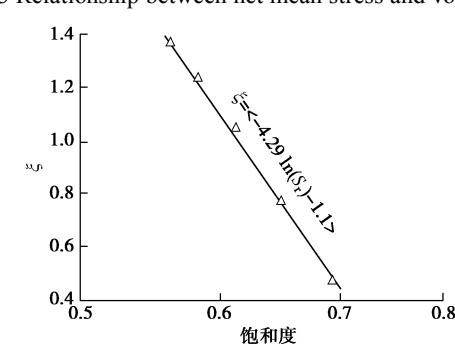


Fig. 4 Relationship between hardening effect and degree of saturation

Sun 等<sup>[19]</sup>对不同初始密实度条件下的非饱和珍珠黏土进行了各向同性的压缩试验, 3 个非饱和试样的初始孔隙比分别为 1.39, 1.28 和 1.17, 其超固结比分别为 1.48, 1.69 和 3.67。3 个试样从 20 kPa 初始平均净应力加载至 600 kPa 平均净应力, 在加载过程中基

质吸力保持 147 kPa 恒定。图 5, 6 分别给出了孔隙比和饱和度的试验结果和模型预测结果, 在加载过程中, 模型能够模拟连续平滑变化的弹塑性应力应变关系曲线, 也能够预测在加载过程中饱和度随着净应力的变大而升高的现象, 模型的预测结果与试验结果较吻合, 验证了本文提出的隐式应力积分算法的正确性。

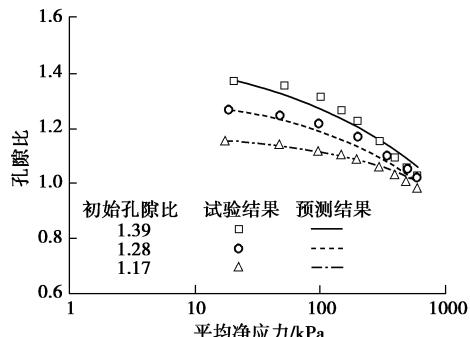


图 5 孔隙比预测值和实际值对比

Fig. 5 Comparison of void ratios between experimental data and predictions

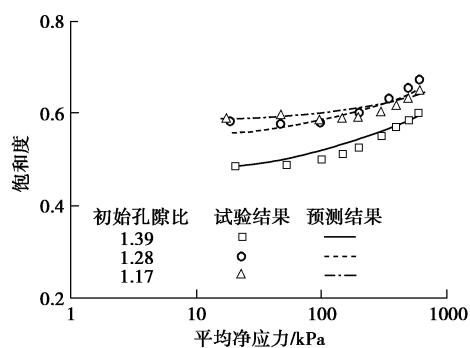


图 6 饱和度预测值和实际值对比

Fig. 6 Comparison of degrees of saturation between experimental data and predictions

#### 4.2 水力-力学耦合本构模型的数值分析应用

本节将上文所述算法用 FORTRAN 语言编程并嵌入有限元计算程序, 利用有限元程序分析地下水位上升对土质边坡的影响。有限元分析的模型尺寸及边界条件由图 7 给出, 模型采用的力学部分材料参数:  $\lambda = 0.025$ ,  $\kappa = 0.012$ ,  $M = 1.0$ ,  $a = -4.5$ ,  $b = 0.0$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\theta = 0.55$ ,  $R = 1.0$ ; 水力部分材料参数:  $a_w = 10.0$ ,  $m_w = 1.0$ ,  $n_w = 2.0$ ,  $S_r^0 = 1.0$ ,  $S_r^{\text{res}} = 0.2$ ,  $\beta = 0.0$ ,  $H = +\infty$ ,  $\lambda_{S_r} = 0.0$ 。分析地下水位由-5 m 上升至 0 m 对土质边坡的影响, 在数值分析中, 土骨架采用八节点等参单元, 孔隙流体采用四节点等参单元, 模型共划分为 823 个单元, 建立了 2600 个节点。在有限元分析时建立两个分析步分析水位变化对土质边坡的影响: 第一步, 地应力平衡, 获得初始条件的应力分布; 第二步, 水位上升分析步。在水位上升分析步中, 设定非饱和土质边坡的初始超固结比为 1.0, 即边坡处于正常固结状态。在水位上升分析步计算结

束后, 采用 Femap 软件对计算结果后处理, 图 8, 9 分别为水位上升至坡脚处时  $x$  和  $y$  方向的位移云图, 随着地下水位的上升, 坡脚下方 0~5 m 深度范围内的孔隙水压力由初始的负孔隙水压力变为正孔隙水压力, 坡脚上方 0~5 m 高度范围内的基质吸力减小, 并且由于地下水位的上升, 整个土质边坡的饱和度都呈现上升趋势, 土体单元中的基质吸力降低, 使得土体单元的骨架应力降低。由于骨架应力的降低, 则土体单元中的骨架应力会小于应力历史上的最大应力, 所以在地下水位上升的过程中, 土质边坡中的土体单元有可能会处于超固结状态。若土质边坡在地下水位上升的过程中由正常固结状态变为超固结状态, 则土体单元经历的应力路径为应力卸载, 则土质边坡会发生弹性回弹。由图 8 可知, 在坡脚下方约-3 m 处, 土体发生弹性回弹, 说明该部分土体受到地下水位上升的影响, 变为超固结状态, 而坡脚上方土体由于饱和度的降低使得土体的屈服应力也降低, 虽然土体中有有效应力降低了, 但是并不会变成超固结土, 所以该部分土体发生湿陷, 如图 8, 9 所示, 边坡的最大沉降发生在坡顶处, 而最大水平位移发生在土坡中部位置, 边坡最大的水平位移达到 21 cm, 表明地下水位的上升会对土质边坡的稳定性产生一定的影响。

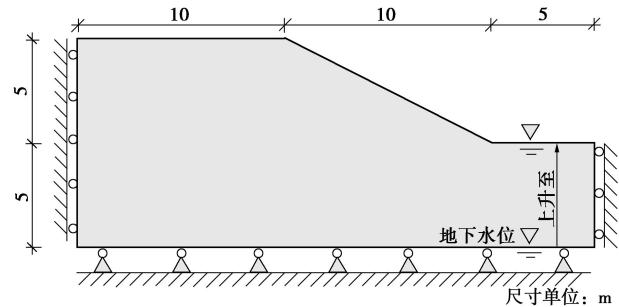


图 7 土质边坡模型

Fig. 7 Model of soil slope

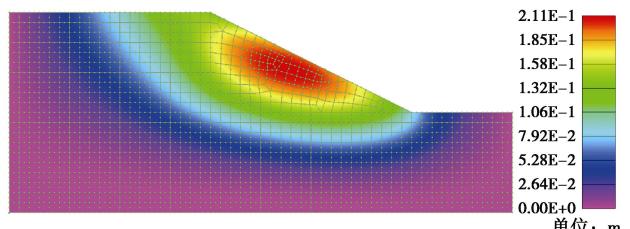


图 8  $x$  方向位移云图

Fig. 8 Displacement contours in direction of  $x$

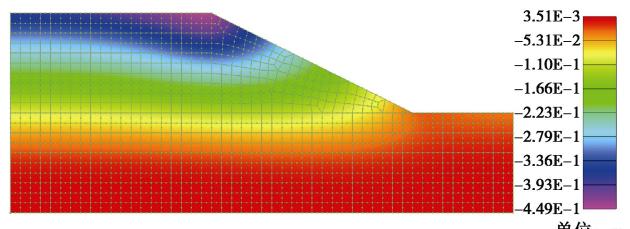


图 9  $y$  方向位移云图

Fig. 9 Displacement contours in direction of  $y$

## 5 结语

本构模型的隐式积分算法能够较好地解决本构模型显示积分算法应力从屈服面上漂移的问题, 提高数值计算结果的精度, 本文对文献中已有的水力–力学耦合的非饱和土模型进行研究, 推导了超固结非饱和土水力–力学耦合的本构模型的隐式积分算法, 并给出本构模型的一致切线模量, 最后对文献中不同初始孔隙比条件下非饱和土样的压缩试验结果进行预测, 通过预测结果和文献中给出的试验数据对比得出, 本文给出的水力–力学耦合的超固结非饱和土本构模型能够较好地预测超固结土在加载过程中连续平滑的应力应变关系, 证明了本文所推导的隐式应力积分算法的正确性, 最后采用该积分算法对某非饱和土质边坡在地下水位上升的情况下进行分析, 计算结果表明地下水位上升时边坡会发生较大变形, 对边坡的稳定性产生影响。

## 参考文献:

- [1] ALONSO E E, GENS A, JOSA A. A constitutive model for partially saturated soils[J]. *Géotechnique*, 1990, **40**(3): 405 – 430.
- [2] WHEELER S, SHARMA R, BUISSON M. Coupling of hydraulic hysteresis and stress-strain behaviour in unsaturated soils[J]. *Géotechnique*, 2003, **53**(1): 41 – 54.
- [3] 刘艳, 赵成刚, 蔡国庆, 等. 考虑气相压力变化和偏应力影响的非饱和土本构模型[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(5): 754 – 761. (LIU Yan, ZHAO Cheng-gang, CAI Guo-qing, et al. New model for unsaturated soils considering variation of gas pressure and shear stress[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2011, **33**(5): 754 – 761. (in Chinese))
- [4] ZHOU A N, SHENG D. An advanced hydro-mechanical constitutive model for unsaturated soils with different initial densities[J]. *Computers and Geotechnics*, 2015, **63**: 46 – 56.
- [5] KRIEG R D, KRIEG D B. Accuracies of numerical solutionmethods for the elastic-perfectly plastic model[J]. ASME, Pressure Vessel Technol, 1977, **99**(4): 510 – 515.
- [6] SIMO J C, TAYLOR R L. Consistent tangent operators for rate independent elastoplasticity[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1985, **48**(1): 101 – 118.
- [7] VAUNAT J. A stress point algorithm for an elastoplastic model in unsaturated soils[J]. *International Journal of Plasticity*, 2000, **16**: 121 – 141.
- [8] ZHANG H W. Implicit integration of a generalized plasticity constitutive model for partially saturated soil[J]. *Engineering Computations*, 2001, **18**(1/2): 314 – 336.
- [9] BORJA R I. Cam-clay plasticity, part V: a mathematical framework for three phase deformation and strain localization analysis of partially saturated porous media[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, **193**: 5301 – 5338.
- [10] HOYOS L R, ARDUINO P. Implicit algorithms in modeling unsaturated soil response in three-invariant stress space[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2008, **8**: 266 – 273.
- [11] 刘艳, 韦昌富, 房倩, 等. 非饱和土水–力学耦合模型及其隐式积分算法[J]. 岩土力学, 2014, **35**(2): 365 – 370. (LIU Yan, WEI Chang-fu, FANG Qian, et al. Implicit integration algorithm of a hydro-mechanical coupling constitutive model for unsaturated soils[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2014, **35**(2): 365 – 370. (in Chinese))
- [12] 姚仰平, 牛雷, 崔文杰, 等. 超固结非饱和土的本构关系[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(6): 833 – 839. (YAO Yang-ping, NIU Lei, CUI Wen-jie, et al. UH model for unsaturated soils[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2011, **33**(6): 833 – 839. (in Chinese))
- [13] LI W G, YANG Q, WANG Y, et al. A new approach to interpret the mechanical behaviour of unsaturated soil using effective stress and degree of saturation[J/OL]. European Journal of Environmental and Civil Engineering. DOI: 10.1080/19648189.2017.1344143.
- [14] HASHIGUCHI K. Subloading surface model in unconventional plasticity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1989, **25**(8): 917 – 945.
- [15] 孙德安. 非饱和土的水力和力学特性及其弹塑性描述[J]. 岩土工程学报, 2009, **30**(11): 3217 – 3231. (SUN De-an. Hydro-mechanical behaviours of unsaturated soils and their elastoplastic modelling[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2009, **30**(11): 3217 – 3231. (in Chinese))
- [16] VAN GENUCHTEN M T. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils[J]. *Soil Science Society of America Journal*, 1980, **44**(5): 892 – 898.
- [17] LI X S. Modelling of hysteresis response for arbitrary wetting/drying paths[J]. *Computers and Geotechnics*, 2005, **32**(2): 133 – 137.
- [18] SUN D A, SHENG D, XIANG L, et al. Elastoplastic prediction of hydro-mechanical behaviour of unsaturated soils under undrained conditions[J]. *Computers and Geotechnics*, 2008, **35**(6): 845 – 852.
- [19] SUN D A, SHENG D, CUI H B, et al. A density dependent elastoplastic hydro mechanical model for unsaturated compacted soils[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2007, **31**(11): 1257 – 1279.