

DOI: 10.11779/CJGE201809001

基于非局部 Biot 理论下饱和土中深埋圆柱形衬砌 对平面弹性波的散射

徐长节^{1, 2}, 丁海滨¹, 童立红^{*1}, 杨园野¹

(1. 江西省岩土工程基础设施安全与控制重点实验室 (华东交通大学), 江西 南昌 330013; 2. 浙江大学滨海和城市岩土工程研究中心, 浙江 杭州 310058)

摘要: 基于 Biot 饱和多孔介质理论和非局部弹性理论, 构建了非局部 Biot 运动方程及本构方程。利用波函数展开法及饱和土与衬砌边界连续条件和衬砌内边界自由边界条件, 求解了饱和土体中圆柱形衬砌对平面波散射问题的解析解。并通过将该解退化为单相介质中及经典 Biot 理论下衬砌对平面 P 波散射稳态解, 验证了计算结果的正确性。研究结果表明, 衬砌内边界及外边界动应力集中因子均随非局部因子的增大而减小; 隧道内边界动应力集中因子分布曲线随非局部因子的减小而扩大; 当入射波频率大于 0.045 MHz 时, 饱和土中空隙尺寸及空隙动力的影响将不可忽略; 非局部因子一定时, 衬砌外径与内径比越大则衬砌内边界动应力集中因子越大, 且当衬砌较薄时, 衬砌内边界动应力集中因子可能产生负值。

关键词: 非局部弹性理论; Biot 理论; 饱和土; 动应力集中系数; 圆柱形衬砌; 散射

中图分类号: TU435

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2018)09-1563-08

作者简介: 徐长节(1972-), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事地下空间及隧道工程研究。E-mail: xucj@zju.edu.cn。

Scattering waves generated by cylindrical lining in saturated soil based on nonlocal Biot theory

XU Chang-jie^{1, 2}, DING Hai-bin¹, TONG Li-hong¹, YANG Yuan-ye¹

(1. Jiangxi Key Laboratory of Infrastructure Safety Control in Geotechnical Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China; 2. Research Center of Coastal and Urban Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

Abstract: Based on the Biot theory and the nonlocal elastic theory, the nonlocal Biot governing equations are proposed. The analytical solutions to the scattering wave fields generated by the cylindrical lining structure under incident plane waves are obtained utilizing the wave function expansion method under specific boundary conditions. The solutions are verified by degenerating the two-phase materials into single-phase ones and by comparing with the classical Biot theory as well. It is shown that the dynamic stress concentration factors on the inner and outer surfaces of the lining decrease with the increasing nonlocal factor. The distribution curves of dynamic stress concentration factor on the inner surface of the tunnel increase with the decrease of nonlocal factor. The influences of pore size and porosity dynamics in saturated soils cannot be ignored when the frequency of incident waves is greater than 0.045 MHz. For a certain nonlocal factor, the dynamic stress concentration factor increases with the increase of the ratio of outer radius to inner radius of the lining. The dynamic stress concentration factor may be negative on the inner surface of the lining for a thin lining.

Key words: nonlocal elasticity theory; Biot theory; saturated soil; dynamic stress concentration factor; cylindrical lining; scattering

0 引言

随着地下空间开发规模的持续扩大, 地下结构的安全性问题日益受到重视。地下隧道及各类管道等重要地下结构常会受到弹性波作用(如地震波), 波对地下结构的动力作用将影响其使用安全, 甚至会引起结构破坏。确定弹性波所引起的地下结构动力响应是地球物理学及土木工程领域中一个重要的工程问题。

针对地下空间圆形衬砌对弹性波的散射问题, 国

内外已有许多学者做了相关研究。Pao 等^[1]采用波函数展开法开创性地研究了无限空间中的圆形洞室在弹性波入射下的动应力集中问题; 随后 Lee 等^[2-3]运用复

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(“973”计划)项目(2015CB057801); 海底盾构隧道关键设计理论与工程对策项目(51338009); 江西省青年科学基金项目(20171BAB216047)

收稿日期: 2017-02-27

***通讯作者** (E-mail: lhtong@ecjtu.edu.cn)

变函数法推导出了半无限空间中洞室对 P 波和 SV 波散射问题的解析解; Karinski 等^[4]研究了全空间中平面波对饱和土体中衬砌结构动应力集中因子的影响; 李伟华等^[5-6]基于 Biot 理论, 首次建立了求解饱和土中圆柱形孔洞对平面 P 波散射问题的波函数展开法, 并采用 Laplace 变换和波函数展开法研究了深埋圆柱形隧道衬砌对瞬态平面 P 波和 SV 波散射问题; 胡亚元等^[7]考虑了土颗粒压缩和固液两相的黏滞作用, 推导出饱和土中平面波在圆柱体上的散射及折射的理论解; Catmiri 等^[8]提出了无限空间中各向同性弹性多孔材料中圆柱形孔洞对弹性波散射理论解; 周香莲等^[9]基于 Biot 理论, 采用复变函数法, 研究了衬砌结构对无限空间弹性稳态波散射问题的数值解。丁亚光等^[10]引入与实际工程更相符的半透水边界条件, 得出半空间饱和土中半渗透柱形壳体对平面 P 波的级数解答。

以往的研究都是基于经典 Biot 理论^[11-12], 虽然 Biot 理论在工程中得到了广泛的应用, 但其推导是建立在假设饱和土中的波长远大于孔隙尺寸, 而忽略了孔隙尺寸效应对波传播特性的影响。Lee 等^[13]通过实验发现波的频率在 0.3~1.0 MHz 范围内时有很显著的负色散关系, 而 Biot 理论的预测在此频率范围内并不存在色散现象。实际上在高频情况下 Biot 理论假设的波长远大于孔隙尺寸已不再成立, 此时孔隙介质中孔隙尺寸的大小对波的特性影响较为显著; 此外, 波的传播会引起孔隙介质中孔隙大小的改变, 倘若此变形是周期性变化, 则会在孔隙介质中产生一个惯性力, 称为孔隙动力^[14], 显然, 此惯性力随频率的增加而增大; 而 Biot 理论中没有考虑孔隙尺寸及孔隙动力对波传播特性的影响。关于此类问题已有学者做了相关研究, 为考虑到孔隙尺寸及孔隙动力的影响, Eringen^[15]采用非局部本构关系替代了 Biot 理论中经典的线弹性本构关系; Chakraborty^[16]为预测负散射波, 通过结合非局部理论^[15]和 Biot 理论, 提出了非局部孔隙弹性理论, 但是由于其考虑了流体中的非局部效应, 对 Biot 本构关系产生了“过修正”现象^[17]; Tong 等^[17]丢弃流体中的非局部效应, 重新推导了非局部-Biot 模型, 详细分析了非局部因子对波速的影响, 得出非局部因子可表示为孔隙尺寸影响因子和惯性力影响因子之和。

本文将利用非局部-Biot 理论, 运用波函数展开法, 通过引入势函数, 根据饱和土体与衬砌结构交界面的连续条件及衬砌内边界自由边界条件求解出势函数表达式, 推导出深埋衬砌对平面 P 波散射场的解析解。以期能为工程中深埋衬砌设计提供借鉴。

1 计算模型及入射波场

将饱和土中深埋圆柱形衬砌洞室视为无限长圆柱形洞室, 因此, 可将问题简化为平面问题, 如图 1 所

示。衬砌外径为 R_1 , 内径为 R_2 , 衬砌外为饱和土。

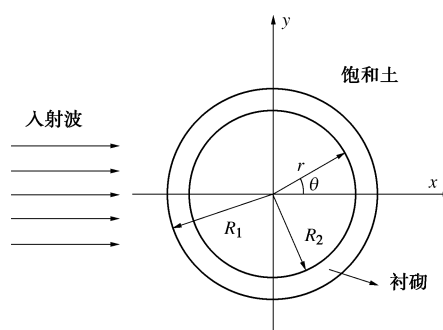


图 1 计算模型

Fig. 1 Computational model

假设入射的平面 P(SV)波沿 x 正方向传播并入射到衬砌外边界上, 入射波势函数为

$$\varphi^{(i)} = \varphi_0 e^{i(k_1 x - \omega t)} \quad (1)$$

式中, k_1 为入射波波数, φ_0 为入射波振幅, ω 为入射波圆频率。

为求解方便, 将入射波势函数展开为柱坐标系下的级数形式^[1]:

$$\varphi^{(i)} = \varphi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(k_1 r) \cos n\theta e^{-i\omega t} \quad (2)$$

式中, $J_n(kr)$ 为第一类 n 阶 Bessel 函数。当 $n=0$ 时, $\varepsilon_n=1$; 当 $n \geq 1$ 时, $\varepsilon_n=2$ 。

2 饱和土中的波场求解

2.1 非局部弹性理论

根据非局部弹性理论, 若影响 P 点应力的应变场区域半径为 r (如图 2 所示), 则 P 点受到以 P 为圆心, r 为半径范围内所有质点对其作用, 若忽略体力作用, 则线性、可变形、各向同性非局部弹性固体的基本方程为^[17]

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = \int_V \alpha(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|, \tau) C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dV(\mathbf{r}') \quad (3)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4)$$

式中 C_{ijkl} 为各向同性弹性模量张量; σ_{ij} 和 ε_{ij} 分别为应力和应变张量; $\alpha(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|, \tau)$ 为非局部模量; $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ 为空间距离; τ 为非局部因子, 体现了饱和土中孔隙尺寸和孔隙动应力的影响^[17]。

2.2 饱和土中散射波场的求解

入射波入射到衬砌外边界后, 在饱和土中产生向外传播的散射波。衬砌外饱和土为两相饱和和多孔介质, 考虑非局部弹性理论 (不考虑液体的非局部影响) 下:

直角坐标系下饱和土体的本构关系为^[17]

$$(1 - \tau^2 \nabla^2) \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^L \quad (5a)$$

$$\sigma_{ij}^L = 2\mu \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} (\lambda_c \varepsilon - \alpha M \zeta) \quad (5b)$$

$$P_t = -\alpha M \psi + M \zeta \quad (5c)$$

$$\varepsilon = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \zeta = -\nabla \cdot \mathbf{w} \quad (5d)$$

式中 σ_{ij}^t 为 Biot 理论中饱和土体总应力; σ_{ij} 为考虑非局部理论下饱和土体中总应力; ∇^2 为 Laplace 算子; ε_{ij} , ε 分别为土骨架的应变和体应变; P_f 为孔隙水压力; μ , λ_c 为土骨架的 Lamé 常数; δ_{ij} 为 Kronecker 符号, 当 $i=j$ 时, $\delta_{ij}=1$, $i \neq j$ 时, $\delta_{ij}=0$; ζ 为单位体积中流体体积变化量; α , M 为 Biot 参数。

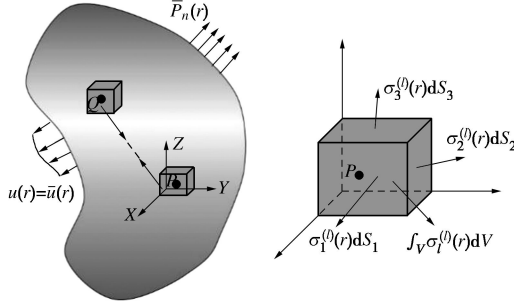


图2 非局部弹性理论示意图

Fig. 2 Schematic of nonlocal elasticity theory
饱和土中土骨架和流体的运动方程为^[17]

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \alpha^2 M + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \alpha M \nabla \nabla \cdot \mathbf{w} = (1 - \tau^2 \nabla^2)(\rho \ddot{\mathbf{u}} + \rho_f \ddot{\mathbf{w}}) \quad (6a)$$

$$\alpha M \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + M \nabla \nabla \cdot \mathbf{w} = \rho_f \ddot{\mathbf{u}} + \frac{\rho_f}{n_0} \ddot{\mathbf{w}} + \frac{\eta}{k} F(\xi) \dot{\mathbf{w}} \quad (6b)$$

式中 \mathbf{u} , \mathbf{w} 分别为土骨架位移和流体相对于土骨架位移; $\rho = (1 - n_0)\rho_s + \rho_f$, ρ 为饱和土平均密度, ρ_s 为土颗粒密度, ρ_f 为流体密度, n_0 为孔隙率; η 为空隙间流体的黏滞系数; k 为渗透系数; $F(\xi)$ 为黏性修正系数; ω 为入射波圆频率。

根据 Biot 高频理论^[11], 黏性修正系数 $F(\xi)$ 表达式为

$$F(\xi) = \frac{\zeta T(\zeta)}{4(1 + 2iT(\zeta)/\zeta)} \quad (7)$$

式中 $\zeta = \delta \sqrt{f/f_c}$, 圆孔状孔隙时, $\delta = \sqrt{8\xi}$; 裂缝状孔隙时, $\delta = \sqrt{16\xi/3}$, ξ 为弯曲因子; $T(\zeta) = \frac{\text{ber}'(\zeta) + i\text{bei}'(\zeta)}{\text{ber}(\zeta) + i\text{bei}(\zeta)}$, ber 和 bei 分别为第一类零阶开尔文函数的实部和虚部。

为简化饱和土中的运动方程, 引入两个土骨架部分的标量势函数和矢量势函数 φ_{s1} 和 $\boldsymbol{\psi}_{s1}$, 及两个流体部分的标量势函数和矢量势函数 φ_{s2} 和 $\boldsymbol{\psi}_{s2}$ 。根据 Helmholtz 矢量分解定理有

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi_{s1} + \nabla \times \boldsymbol{\psi}_{s1}, \quad \mathbf{w} = \nabla \varphi_{s2} + \nabla \times \boldsymbol{\psi}_{s2} \quad (8)$$

将式 (8) 代入式 (6), 并均略去时间因子 $e^{-i\omega t}$, 得

$$\begin{cases} (\lambda + \alpha^2 M + 2\mu - \rho \omega^2 \tau^2) \nabla^2 \varphi_{s1} - (\alpha M + \rho_f \omega^2 \tau^2) \nabla^2 \varphi_{s2} = -\rho \omega^2 \varphi_{s1} - \rho_f \omega^2 \varphi_{s2}, \\ \alpha M \nabla^2 \varphi_{s1} - M \nabla^2 \varphi_{s2} = -\rho_f \omega^2 \varphi_{s1} - \left(\frac{\rho_f}{n_0} \omega^2 + \frac{i\omega\eta}{k} F(\xi) \right) \varphi_{s2}, \end{cases}$$

$$(9a)$$

$$\begin{cases} (\mu - \rho \tau^2 \omega^2) \nabla^2 \boldsymbol{\psi}_{s1} - \rho_f \tau^2 \omega^2 \nabla^2 \boldsymbol{\psi}_{s2} = -\rho \omega^2 \boldsymbol{\psi}_{s1} - \rho_f \omega^2 \boldsymbol{\psi}_{s2}, \\ \rho_f \omega^2 \boldsymbol{\psi}_{s1} + \left(\frac{\rho_f}{n_0} \omega^2 + \frac{i\omega\eta}{k} F(\xi) \right) \boldsymbol{\psi}_{s2} = 0. \end{cases} \quad (9b)$$

由式 (9a)、(9b) 可得

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_{s1a} + k_1^2 \varphi_{s1a} = 0, \\ \nabla^2 \varphi_{s1b} + k_2^2 \varphi_{s1b} = 0, \\ \nabla^2 \boldsymbol{\psi}_{s1} + k_3^2 \boldsymbol{\psi}_{s1} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

式中 φ_{s1a} , φ_{s1b} 分别为土骨架中快波势函数和慢波势函数, 土骨架中标量势函数为 $\varphi_{s1} = \varphi_{s1a} + \varphi_{s1b}$; $\boldsymbol{\psi}_{s1}$ 土骨架中剪切波势函数。 k_1 , k_2 为饱和土中压缩波波数, k_3 为饱和土中剪切波波数。

$$k_j^2 = \frac{\lambda_1 \pm \sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda_2}}{2}, \quad (11a)$$

$$k_3^2 = \frac{\beta_4^2 - \beta_3\beta_7}{\beta_7\beta_8 - \beta_4\beta_9}, \quad (11b)$$

式中,

$$\lambda_1 = \frac{-\beta_1\beta_7 - \beta_3\beta_6 + \beta_2\beta_4 + \beta_4\beta_5}{\beta_1\beta_6 - \beta_2\beta_5}, \quad \lambda_2 = \frac{\beta_3\beta_7 - \beta_4^2}{\beta_1\beta_6 - \beta_2\beta_5}, \quad \beta_1 = (\lambda + \alpha^2 M + 2\mu - \rho \omega^2 \tau^2), \quad \beta_2 = \alpha M - \rho_f \omega^2 \tau^2, \quad \beta_3 = -\rho \omega^2, \quad \beta_4 = -\rho_f \omega^2, \quad \beta_5 = \alpha M, \quad \beta_6 = M, \quad \beta_7 = -\left(\frac{\rho_f}{n_0} \omega^2 + \frac{i\omega\eta}{k} F(\xi) \right), \quad \beta_8 = \mu - \rho \tau^2 \omega^2, \quad \beta_9 = -\rho_f \tau^2 \omega^2.$$

由式 (10) 可知, 势函数满足 Helmholtz 方程, 由分离变量法可求出势函数在极坐标下的通解, 通解具体表达式见文献[6]。

流体部分势函数与土骨架势函数的幅值为固定的比值, 因此可确定流体部分势函数为

$$\varphi_{s2} = \varepsilon_1 \varphi_{s1a} + \varepsilon_2 \varphi_{s1b}, \quad (12a)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{s2} = \varepsilon_3 \boldsymbol{\psi}_{s1}, \quad (12b)$$

式中,

$$\varepsilon_j = \frac{\beta_2\beta_4 - \beta_3\beta_6 + (\beta_5\beta_2 - \beta_1\beta_6)k_j^2}{\beta_4\beta_6 - \beta_2\beta_7} \quad (j=1, 2), \quad (13a)$$

$$\varepsilon_3 = -\beta_4 / \beta_7. \quad (13b)$$

2.3 饱和土中总波场

饱和土中总波场是由入射波场和饱和土中散射波场组成。

(1) 入射波为 P 波时:

$$\varphi_1 = \varphi_{s1a} + \varphi_{s1b} + \varphi^{(i)}, \quad (14a)$$

$$\boldsymbol{\psi}_1 = \boldsymbol{\psi}_{s1}, \quad (14b)$$

$$\varphi_2 = \varepsilon_1(\varphi_{s1a} + \varphi^{(i)}) + \varepsilon_2 \varphi_{s1b}, \quad (14c)$$

$$\psi_2 = \varepsilon_3 \psi_1 \quad (14d)$$

(2) 入射波为 SV 波时:

$$\varphi_1 = \varphi_{s1a} + \varphi_{s1b} \quad (15a)$$

$$\psi_1 = \psi_{s1} + \varphi^{(i)} \quad (15b)$$

$$\varphi_2 = \varepsilon_1 \varphi_{s1a} + \varepsilon_2 \varphi_{s1b} \quad (15c)$$

$$\psi_2 = \varepsilon_3 (\psi_1 + \varphi^{(i)}) \quad (15d)$$

式中 φ_1, ψ_1 为饱和土中土骨架部分总波场的标量势函数和矢量势函数; φ_2, ψ_2 为饱和土中流体部分总波场的标量势函数和矢量势函数。

限于篇幅, 本文仅考虑入射波为 P 波的情况。

3 衬砌的波场求解

衬砌为单相固体介质, 将衬砌视为弹性均匀介质, 因此衬砌内存在两种波, 即压缩波和剪切波。在直角坐标系下, 其运动方程及本构关系为

$$\mu_2 \nabla^2 \mathbf{u}_s + (\lambda_2 + \mu_2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_s = \rho_{sd} \ddot{\mathbf{u}}_s \quad (16a)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu_2 \varepsilon_{ij} + \lambda_2 \delta_{ij} \varepsilon \quad (16b)$$

式中, \mathbf{u}_s 为衬砌介质位移, ρ_{sd} 为衬砌的密度, λ_2, μ_2 为衬砌结构的拉梅常数。

衬砌内存在与饱和土交界面引起的折射波和衬砌内表面产生的散射波。求解衬砌内波场的方法与求解饱和土中波场方法相同, 引入与饱和土交界面引起的折射波标量势函数 Φ_{sd}^1 和矢量势函数 Ψ_{sd}^1 , 及内表面产生的标量势函数 Φ_{sd}^2 和矢量势函数 Ψ_{sd}^2 。衬砌内势函数表达式及波数表达式见文献[6]。

4 边界条件及待定系数求解

利用边界条件求解上述势函数中的待定系数。考虑饱和土体与衬砌交界面的连续条件可得当 $r = R_1$ 时,

$$\left. \begin{aligned} u_r &= u_{sr} \\ u_\theta &= u_{s\theta} \\ \sigma_{rr} + P_f &= \sigma_{sr} \\ \sigma_{r\theta} &= \sigma_{sr\theta} \end{aligned} \right\} \quad (17a)$$

假设饱和土体与衬砌交界面为不透水边界, 即在边界处孔隙水压力在 r 方向的水力梯度为零^[18], 由此可知: 当 $r = R_1$ 时,

$$\frac{\partial P_f}{\partial r} = 0 \quad (17b)$$

衬砌内表面自由边界条件为: 当 $r = R_2$ 时,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{sr} &= 0 \\ \sigma_{sr\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17c)$$

式中 u_r, u_{sr} 分别为饱和土土骨架和衬砌结构的径向位移; $u_\theta, u_{s\theta}$ 分别为饱和土土骨架和衬砌结构切向

位移; σ_{rr}, σ_{sr} 分别为饱和土土骨架和衬砌结构的法向应力; $\sigma_{r\theta}, \sigma_{sr\theta}$ 分别为饱和土土骨架和衬砌结构的切向应力。

由式 5 (a) 可知, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^L + \tau^2 \nabla^2 \sigma_{ij}^L + \tau^4 \nabla^4 \sigma_{ij}^L$, 由于 τ 为很小的量, 因此可将高阶小量 $\tau^4 \nabla^4 \sigma_{ij}^L$ 略去, 由此可得考虑非局部理论下总应力表达式为

$$\sigma_{ij} = (1 + \tau^2 \nabla^2) [2\mu \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} (\lambda_c \varepsilon - \alpha M \zeta)] \quad (18)$$

因此, 由式 (5)、(8) 及式 (18) 可得在柱坐标下饱和土中位移、应力与势函数的关系如下:

$$u_r = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \quad (19a)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \quad (19b)$$

$$w_r = \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \quad (19c)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = 2\mu & \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial \theta} \right) + \lambda_c \nabla^2 \varphi_1 + \lambda_c \tau^2 \nabla^4 \varphi_1 + \\ & 2\mu \tau^2 \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial \theta} \right) + \alpha M \nabla^2 \varphi_2 + \alpha M \tau^2 \nabla^4 \varphi_2, \end{aligned} \quad (19d)$$

$$P_f = -\alpha M \nabla^2 \varphi_1 - M \nabla^2 \varphi_2 \quad (19e)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = 2\mu & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta^2} \right) - 2\mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial \theta} \right) + \\ & \lambda_c \nabla^2 \varphi_1 + \lambda_c \tau^2 \nabla^4 \varphi_1 + 2\mu \tau^2 \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta^2} + \right. \\ & \left. \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial \theta} \right) + \alpha M \nabla^2 \varphi_2 + \alpha M \tau^2 \nabla^4 \varphi_2, \end{aligned} \quad (19f)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} = 2\mu & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \right) + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} \right) + \\ & \mu \tau^2 \nabla^2 \left(-\frac{2}{r^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} \right). \end{aligned} \quad (19g)$$

由式 (16b) 及势函数可得衬砌中应力、位移与势函数在柱坐标下关系为

$$u_{sr} = \frac{\partial \Phi_{sd}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{sd}}{\partial \theta} \quad (20a)$$

$$u_{s\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{sd}}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi_{sd}}{\partial r} \quad (20b)$$

$$\sigma_{sr} = \lambda_2 \nabla^2 \Phi_{sd} + 2\mu_2 \left(\frac{\partial^2 \Phi_{sd}}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_{sd}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi_{sd}}{\partial r \partial \theta} \right) \quad (20c)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{s\theta} = \lambda_2 \nabla^2 \Phi_{sd} + \frac{2\mu_2}{r} & \left(\frac{\partial \Phi_{sd}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_{sd}}{\partial \theta^2} \right) + \\ & \frac{2\mu_2}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{sd}}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi_{sd}}{\partial r \partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (20d)$$

$$\sigma_{sr\theta} = 2\mu_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_{sd}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_{sd}}{\partial \theta} \right) +$$

$$\mu_2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_{sd}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{sd}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Psi_{sd}}{\partial r^2} \right). \quad (20e)$$

将饱和土及衬砌内势函数表达式, 代入式 (19)、(20) 中, 并利用式 (17) 的边界条件, 可求出势函数中各待定系数, 待定系数系数矩阵如下:

$$\begin{bmatrix} N_{31} & N_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -G_{11} & -G_{12} & -G_{13} & G_{14}^{(2)} & G_{15}^{(1)} & G_{15}^{(2)} & G_{15}^{(1)} \\ -L_{21} & -L_{22} & -L_{23} & L_{24}^{(2)} & L_{24}^{(1)} & L_{25}^{(2)} & L_{25}^{(1)} \\ -P_{41} & -P_{42} & -P_{43} & P_{44}^{(2)} & P_{44}^{(1)} & P_{45}^{(2)} & P_{45}^{(1)} \\ -Q_{51} & -Q_{52} & -Q_{53} & Q_{54}^{(2)} & Q_{54}^{(1)} & Q_{55}^{(2)} & Q_{55}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & S_{64}^{(2)} & S_{64}^{(1)} & S_{65}^{(2)} & S_{65}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & T_{74}^{(2)} & T_{74}^{(1)} & T_{75}^{(2)} & T_{75}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_{n1} \\ D_{n2} \\ E_{n1} \\ E_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_4 \\ M_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

式中, $A_n, B_n, C_n, D_{n1}, D_{n2}, E_{n1}, E_{n2}$ 为势函数中待定系数, 系数矩阵中参数表达式参见附录。将式 (21) 求出的待定系数, 代入应力及位移表达式中即可求出饱和土和衬砌内应力及位移值。

5 结果验算与算例分析

在工程实际中, 人们所关心的是饱和土与衬砌交界面或者衬砌内侧边界的动应力集中因子, 即界面上切向应力与入射应力最大幅值的比值^[1]。

$$\sigma_{s\theta}^* = \sigma_{s\theta} / \sigma_0, \quad (22)$$

式中, 饱和土介质中, $\sigma_0 = -(\lambda + 2\mu)k_1^2\varphi_0$, 衬砌介质中, $\sigma_0 = -(\lambda_2 + 2\mu_2)k_\alpha^2\varphi_0$ 。

5.1 结果验算

(1) 与文献[1]计算结果对比

为验算本文计算的正确性, 将本文计算结果与文献[1]结果进行对比, 为此将本文求得的饱和土中深埋圆柱形衬砌对平面 P 波散射解退化为单相介质中衬砌对平面 P 波散射的稳态解, 即取 $\tau = 0, M = 0, \rho_f = 0, \eta = 0$ 。令衬砌内外径之比 $R_1/R_2 = 1.1$, 介质与衬砌剪切模量之比为 2.9, P 波在土介质及衬砌中波速之比为 1.5, $k_1 R_2 = 0.2$ (k_1 为入射 P 波波数, R_2 为衬砌外径)。计算所得衬砌内侧动应力集中因子 $\sigma_{s\theta}^*$ 沿着衬砌内径分布图, 见图 3 所示。图 3 动应力集中因子分布曲线与 Pao 等^[1]研究结果 (图 4.6a) 一致, 说明了本文公式推导结果的正确性。

(2) 与文献[9]计算结果对比

将本文基于非局部 Biot 理论求得的饱和土中深埋圆柱形衬砌对平面 P 波散射的解, 退化为基于 Biot 理论的解, 即取 $\tau = 0, F(\xi) = 1$ 。饱和土及衬砌的物理力学参数与文献[9]中参数一致^[9], 计算所得衬砌外边界动应力集中因子沿衬砌外径分布曲线如图 4 所示, 由图 4 可知动应力集中因子分布曲线与文献[9]中图 2 研究结果一致, 由此说明了本文推导的正确性。

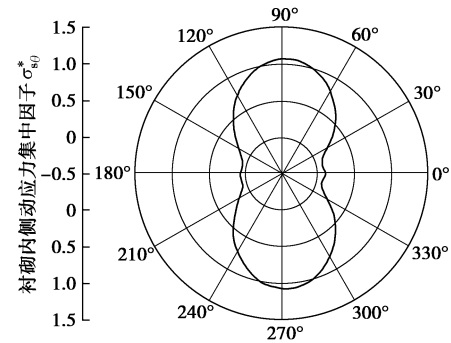


图 3 本文退化为单相介质与文献[1]结果比较

Fig. 3 Comparison of results of degenerated solutions to single-phase medium by proposed method and Ref. [1]

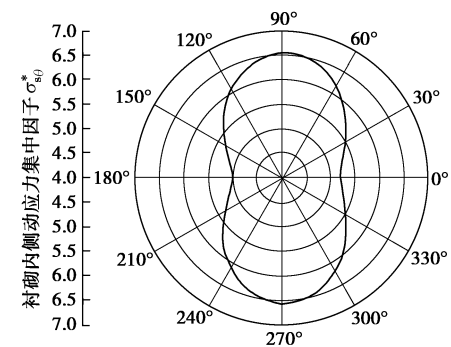


图 4 本文退化解与文献[9]结果比较

Fig. 4 Comparison of results of degenerated solutions by proposed present method and Ref. [9]

5.2 算例分析

饱和土介质参数如下: 土骨架密度 $\rho_s = 2650 \text{ kg/m}^3$, 流体密度 $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$, 孔隙率 $n = 0.308$, 泊松比 $\nu = 0.3$, 剪切模量 $\mu = 24.9 \times 10^6 \text{ Pa}$, 拉梅常数 $\lambda = 6.464 \times 10^8 \text{ Pa}$, 流体黏滞系数 $\eta = 1.0 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, 黏滞力修正系数 $F(\xi) = 1.1886$, 渗透系数 $k = 1.0 \times 10^{-8} \text{ m}^2$, Biot 参数 $\alpha = 0.982$, $M = 5.745 \times 10^9 \text{ Pa}$ 。

衬砌结构参数如下: 材料密度 $\rho_{sd} = 2700 \text{ kg/m}^3$, 剪切模量 $\mu_2 = 44.9 \times 10^6 \text{ Pa}$, 拉梅常数 $\lambda_2 = 1.225 \times 10^9 \text{ Pa}$ 。为便于分析, 衬砌外径取 $R_1 = 3.0 \text{ m}$, 分别取 $R_1/R_2 = 1.05, 1.1, 1.15$; 入射波幅值 $\varphi_0 = 1$ 。

图 5, 6 给出了 $R_1/R_2 = 1.1$ 时, P 波入射情况下, 衬砌内边界及外边界在角度为 π 和 $\pi/2$ 时, 动应力集中因子随非局部因子的变化曲线。由图可知, 衬砌内边界及外边界动应力集中因子均随非局部因子 τ 的增加而降低, 且在角度为 $\pi/2$ 处, 入射波所引起动应力集中因子大于角度为 π 处。由此可知, 采用经典 Biot 理论的计算结果大于非局部-Biot 理论下的计算结果。

图 7, 8 分别为角度在 $\theta = \pi, \pi/2$ 处, 非局部 Biot 理论及经典 Biot 理论下衬砌内边界动应力集中因子随入射波频率变化曲线。由图可知, 在频率小于 0.045

MHz 时非局部 Biot 理论计算结果与 Biot 理论计算结果变化规律及数值大小基本一致, 频率范围在 0.045~0.08 MHz 内时, 非局部 Biot 理论计算结果波动幅度较大, 而 Biot 理论计算结果在此范围内波动很小, 入射频率大于 0.08 MHz 后, 非局部 Biot 理论下动应力集中因子已基本趋向于 0, 而 Biot 理论下动应力集中因子不为 0, 且存在较小的波动。由此可知, 当入射波频率大于 0.045 MHz 时, 饱和土中空隙尺寸及空隙动应力的影响将不能忽略。

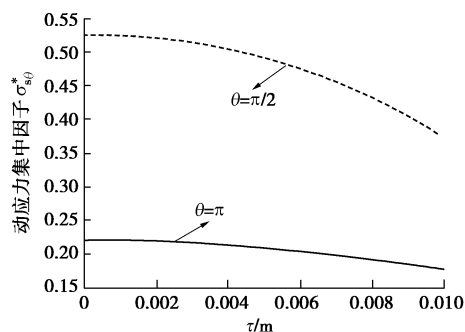


图 5 衬砌内边界动应力集中因子与非局部因子 τ 关系曲线 ($R_1/R_2=1.1$)

Fig. 5 Relationship between dynamic stress concentration factor on inner face of lining and nonlocal factor ($R_1/R_2=1.1$)

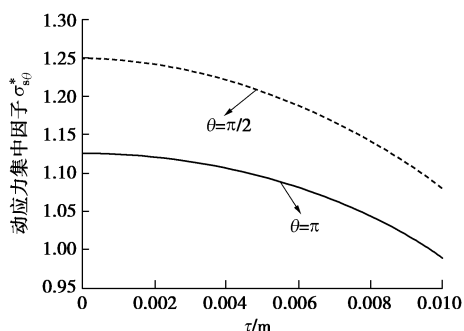


图 6 衬砌外边界动应力集中因子与非局部因子 τ 关系曲线 ($R_1/R_2=1.1$)

Fig. 6 Relationship between dynamic stress concentration factor on outer face of lining and nonlocal factor ($R_1/R_2=1.1$)

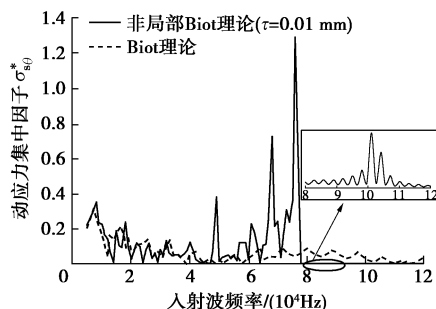


图 7 $\theta=\pi$ 处衬砌内边界动应力集中因子随入射波频率的变化曲线

Fig. 7 Curves of dynamic stress concentration factor on inner face of lining with frequency of incident waves at $\theta=\pi$

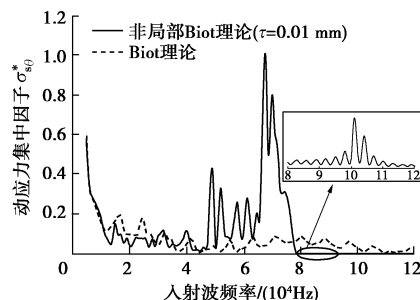


图 8 $\theta=\pi/2$ 处衬砌内边界动应力集中因子随入射波频率的变化曲线

Fig. 8 Curves of dynamic stress concentration factor on inner face of lining with frequency of incident waves at $\theta=\pi/2$

图 9 给出了 $R_1/R_2=1.1$ 时, 非局部因子 $\tau=0.000$, 0.005, 0.010 时衬砌内边界动应力集中系数沿衬砌内边界的分布曲线。由图可知, 非局部因子越大, 则动应力集中因子越小, 且在 $90^\circ \sim 150^\circ$ (或 $210^\circ \sim 270^\circ$) 范围内动应力集中因子随非局部因子变化较为明显, 而其他部位变化较小, 由此可知, 不考虑空隙尺寸的大小情况下得到动应力集中因子偏大。

图 10 为非局部因子 $\tau=0.010$ 时, 衬砌半径比为 $R_1/R_2=1.05$, 1.1, 1.15 时, 衬砌内侧动应力集中因子沿衬砌内边界分布曲线。由图可知, 衬砌越厚则内边界动应力集中系数越大, 这与 Pao 等^[1]的研究结果一致。从图中还可以看出, 在衬砌厚度较小时, 衬砌内边界的动应力集中系数可能为负值, 即衬砌内侧实际应力值与入射波应力符号相反。

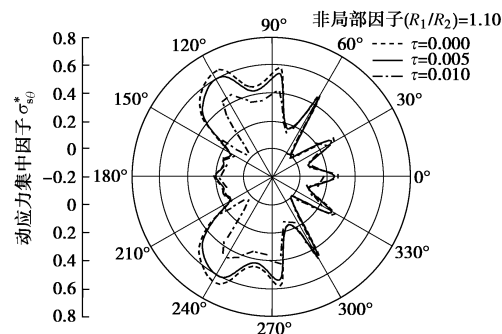


图 9 不同非局部因子时衬砌内边界动应力集中因子分布曲线
Fig. 9 Distribution curves of dynamic stress concentration factor on inner surface of lining with different nonlocal factors

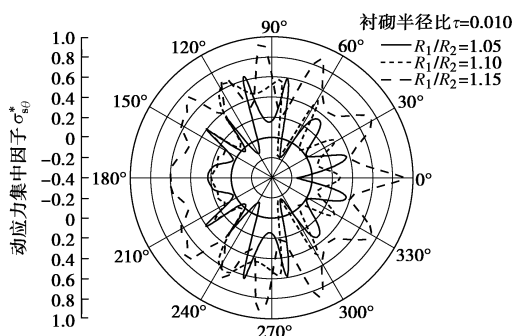


图 10 不同半径比时衬砌内侧动应力集中因子分布曲线
Fig. 10 Distribution curves of dynamic stress concentration factor on inner surface of lining with different radius ratios

6 结 论

基于非局部 Biot 理论, 利用波函数展开法, 求解 P 波入射条件下, 饱和土介质中圆柱形衬砌动应力响应问题。将求得的饱和土中衬砌对平面 P 波散射解退化为单相介质及饱和土中衬砌对平面 P 波的稳态解, 并将计算结果与文献[1]和文献[9]结果比较, 结果一致。此外, 本文还分析了非局部因子对动应力集中因子的影响、入射波频率对动应力集中因子变化的影响及衬砌直径比对动应力集中因子的影响, 得出如下结论:

(1) 衬砌内外边界动力集中因子均随非局部因子的增加而降低。且在角度为 $\pi/2$ 处, 入射波所引起动应力集中因子大于角度为 π 处。

(2) 随入射波频率增加, 非局部 Biot 理论与经典 Biot 理论计算结果在频率小于 0.045 MHz 时, 两种理论计算结果变化规律及数值大小基本一致, 在频率范围为 0.045~0.08 MHz 时, 非局部 Biot 理论下的计算结果波动幅度很大, 在频率大于 0.08 MHz 时, 非局部 Biot 理论计算结果基本为 0, 而经典 Biot 理论计算结果仍有较小的波动。由此可知, 当入射波频率大于 0.045 MHz 时, 饱和土中孔隙尺寸及孔隙动应力的影响将不能忽略。

(3) 衬砌内外径比一定时, 非局部因子越大, 则动应力集中因子越小, 且在 $90^\circ \sim 150^\circ$ (或 $210^\circ \sim 270^\circ$) 范围内动应力集中因子随非局部因子变化较为明显, 而其他部位变化较小。

(4) 非局部因子一定时, 衬砌越厚则内边界动应力集中系数越大, 且衬砌厚度较小时, 衬砌内边界的动应力集中系数可能为负值。

参考文献:

- [1] PAO Y H, MOW C C, ACHENBACH J D. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations[M]. New York: Crane and Russak, 1973.
- [2] LEE V W. Response of tunnels to incident SH waves[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1979, **105**(4): 643 - 659.
- [3] LEE V W, KARL J. On deformation near a circular underground cavity subjected to incident plane P waves[J]. European Earthquake Engineering, 1993, **7**(1): 29 - 41.
- [4] KARINSKI Y S, SHERSHNEV V V, YANKELEVSKY D Z. Analytical solution of the harmonic waves diffraction by a cylindrical lined cavity in poroelastic saturated medium[J]. International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics, 2007, **31**(5): 667 - 689.
- [5] 李伟华, 赵成刚. 饱和土半空间中圆柱形孔洞对平面 P 波的散射[J]. 岩土力学, 2004, **25**(12): 1867 - 1872. (LI Wei-hua, ZHAO Cheng-gang. An analytical solution for diffraction of plane P-waves by cylindrical cavity in a fluid-saturated porous media semi-space[J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, **25**(12): 667 - 689. (in Chinese))
- [6] 李伟华, 张 钊. 饱和土中深埋圆柱形衬砌洞室对瞬态平面波的散射[J]. 地球物理学报, 2013, **56**(1): 325 - 334. (LI Wei-hua, ZHANG Zhao. Scattering of transient plane waves by deep buried cylindrical lining cavity in saturated soil[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2013, **56**(1): 325 - 334. (in Chinese))
- [7] 胡亚元, 王立忠, 陈云敏, 等. 饱和土中平面应变波在圆柱体上的散射和折射[J]. 地震学报, 1998(3): 300 - 307. (HU Ya-yuan, WANG Li-zhong, CHEN Yun-min, et al. Scattering and refraction of plane strain waves on a cylinder in saturated soil[J]. Acta Seismologica Sinica, 1998(3): 300 - 307. (in Chinese))
- [8] GATMIRI B, ESLAMI H. Scattering of harmonic waves by a circular cavity in a porous medium: complex functions theory approach[J]. International Journal of Geomechanics, 2007, **7**(5): 371 - 381.
- [9] 周香莲, 周光明, 王建华. 饱和土中圆形衬砌结构对弹性波的散射[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, **24**(9): 1572 - 1576. (ZHOU Xiang-lian, ZHOU Guang-ming, WANG Jian-hua. Scattering of elastic wave by circular cavity with lining in saturated soil[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, **24**(9): 1572 - 1576. (in Chinese))
- [10] 丁光亚, 蔡袁强, 徐长节. 半空间饱和土中圆形壳结构对平面 P 波的散射[J]. 工程力学, 2008, **25**(12): 35 - 41. (DING Guang-ya, CAI Yuan-qiang, XU Chang-jie. Scattering of P waves by a cylindrical shell in a saturated half-space[J]. Engineering Mechanics, 2008, **25**(12): 35 - 41. (in Chinese))
- [11] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid: 2 higher frequency range[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1956, **28**(2): 179 - 191.
- [12] BIOT M A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media[J]. Journal of Applied Physics, 1962, **33**(4): 1482 - 1498.
- [13] LEE K I, HUMPHREY V F, KIM B N, et al. Frequency dependencies of phase velocity and attenuation coefficient in a water-saturated sandy sediment from 0.3 to 1.0 MHz[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2007, **121**(1): 2553 - 2560.
- [14] SAHAY P N. Biot constitutive relation and porosity

perturbation equation[J]. Geophysics, 2013, **78**(5): 57 - 67.

- [15] ERINGEN A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves[J]. Journal of Applied Physics, 1983, **54**(9): 4703 - 4710.
- [16] CHAKRABORTY A. Prediction of negative dispersion by a nonlocal poroelastic theory[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2008, **123**(1): 56.

附录

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \varphi_0 \varepsilon_n i^n [k_1 R_1 J_{n-1}(k_1 R_1) - n J_n(k_1 R_1)], \\
 G_{1j} &= k_j R_1 H_{n-1}^{(1)}(k_j R_1) - n H_n^{(1)}(k_j R_1), \quad G_{13} = n H_n^{(1)}(k_3 R_1), \\
 G_{14}^{(i)} &= k_a R_1 H_{n-1}^{(i)}(k_a R_1) - n H_n^{(i)}(k_a R_1); \quad G_{15}^{(i)} = n H_n^{(i)}(k_\beta R_1), \\
 M_2 &= n \varphi_0 \varepsilon_n i^n J_n(k_1 R_1), \quad L_{2j} = n H_n^{(1)}(k_j R_1), \\
 L_{23} &= [k_3 R_1 H_{n-1}^{(1)}(k_3 R_1) - n H_n^{(1)}(k_3 R_1)], \\
 L_{24}^{(i)} &= n H_n^{(i)}(k_a R_1), \quad L_{25}^{(i)} = [k_\beta R_1 H_{n-1}^{(i)}(k_\beta R_1) - n H_n^{(i)}(k_\beta R_1)], \\
 M_3 &= e^{\frac{i\pi}{2}} (\varepsilon_1 + \alpha) \varepsilon_n \varphi_0 [(-4n(n-1)(n-2) + k_1^2 R_1^2 (3n-4)) \cdot \\
 &\quad J_{n-2}(k_1 R_1) - k_1 R_1 (-2n(n-1) + k_1^2 R_1^2) J_{n-3}(k_1 R_1)], \\
 N_{3j} &= -(\varepsilon_j + \alpha) \{[-2n(n-1) + k_j^2 R_1^2] k_j R_1 H_{n-3}^{(1)}(k_j R_1) + \\
 &\quad [4n(n-1)(n-2) + k_j^2 R_1^2 (4-3n)] H_{n-2}^{(1)}(k_j R_1)\}, \\
 M_4 &= \frac{1}{k_1^2 R_1^4} e^{\frac{i\pi}{2}} \varepsilon_n \varphi_0 \{[-k_1^6 R_1^6 (\lambda_c + 2\mu + \alpha M \varepsilon_1) \tau^2 + 8\mu(n-2) \cdot \\
 &\quad (n-1)n(n+1)[R_1^2 + 4(n+1)\tau^2] + 2(n-1)k_1^2 R_1^2 \{R_1^2 [4\lambda_c - \\
 &\quad 2n\lambda_c + 4\mu - 5n\mu - 2M(n-2)(-\alpha + (-1+\alpha)\varepsilon_1]) - 4\mu n \cdot \\
 &\quad (n+1)^2 \tau^2\} + k_1^4 R_1^4 [R_1^2 \cdot (-\alpha M + \lambda_c + 2\mu + M(-1+\alpha)\varepsilon_1) + \\
 &\quad 2(2(n-2) \cdot (n-1)\lambda_c + [6 + \mu n(-9+5n)] + 2\alpha M \varepsilon_1 (n-2) \cdot \\
 &\quad (n-1)\tau^2] \cdot J_{n-2}(k_1 R_1)\} \\
 &\quad - 2k_1 R_1 \{k_1^4 R_1^4 [(n-1)\lambda_c + (2n-1)\mu + (n-1)\alpha M \varepsilon_1] \tau^2 + \\
 &\quad 2\mu n(n+1)(n-1) \cdot [R_1^2 + 4(n+1)\tau^2] + k_1^2 R_1^2 [R_1^2 (\lambda_c + \\
 &\quad \mu - n(\lambda_c + 2\mu) - (n-1)M(\alpha(\varepsilon_1 - 1) - \varepsilon_1)] - \\
 &\quad (2\mu n(n+1)^2 \tau^2)] J_{n-3}(k_1 R_1)\}, \\
 P_{43} &= \frac{1}{R_1^4} \left\{ \frac{2\mu n}{k_3^2} [-16(n-2)(n-1)(n+1)^2 \tau^2 + k_3^2 R_1^4 \cdot \right. \\
 &\quad (3(n-1) + k_3^2 (1-3n)\tau^2) + 4(n^2-1)R_1^2 (2-n+k_3^2 \cdot \\
 &\quad (1+n)\tau^2)] H_{n-2}^{(1)}(k_3 R_1) + \frac{2\mu n R_1}{k_3} (-2+2n^2-k_3^2 R_1^2) \cdot \\
 &\quad \left. (R_1^2 + (4+4n-k_3^2 R_1^2)\tau^2) H_{n-3}^{(1)}(k_3 R_1) \pi \right\}, \\
 P_{44}^{(i)} &= [(2n(n+1)\mu_{sd} - k_a^2 R_1^2 (\lambda_{sd} + 2\mu_{sd})) H_n^{(i)}(k_a R_1) - 2 \\
 &\quad \mu_{sd} k_a R_1 H_{n-1}^{(i)}(k_a R_1)], \\
 P_{45}^{(i)} &= [2n\mu_{sd} k_\beta R_1 H_{n-1}^{(i)}(k_\beta R_1) - 2n(n+1)\mu_{sd} H_n^{(i)}(k_\beta R_1)],
 \end{aligned}$$

- [17] TONG L H, YU Y, HU W T, et al. On wave propagation characteristics in fluid saturated porous materials by a nonlocal Biot theory[J]. Journal of Sound & Vibration, 2016, **379**: 106 - 118.
- [18] 宫全美. 轨道交通线路动力学[M]. 北京: 人民交通出版社股份有限公司, 2015. (GONG Quan-mei. Dynamics of rail transit engineering[M]. Beijing: China Communications Press, 2015. (in Chinese))

$$\begin{aligned}
 M_5 &= \frac{\mu}{R_1^4} \left\{ \frac{2n\varphi_0 \varepsilon_n i^n}{k_1^2} [-k_1 R_1 (-2+2n^2-k_1^2 R_1^2)(R_1^2 + (4+ \right. \\
 &\quad 4n-k_1^2 R_1^2)\tau^2) J_{n-3}(k_1 R_1) + (16(n-2)(n-1)(n+1)^2 \tau^2 - \\
 &\quad 4R_1^2 (n^2-1)(2-n+k_1^2 (n+1)\tau^2) + k_1^2 R_1^4 (3-3n+k_1^2 \\
 &\quad (3n-1)\tau^2)] J_{n-2}(k_1 R_1) \left. \right\}, \\
 Q_{5j} &= \frac{\mu}{R_1^4} \left\{ -\frac{2nR_1}{k_j} (-2+2n^2-k_j^2 R_1^2)[R_1^2 + (4+4n-k_j^2 R_1^2)\tau^2] \cdot \right. \\
 &\quad H_{n-3}^{(1)}(k_j R_1) + \frac{2n}{k_j^2} [16(n-1)(n-2)(n+1)^2 \tau^2 - \\
 &\quad 4R_1^2 (n^2-1)[2-n+k_j^2 (n+1)\tau^2] + k_j^2 R_1^4 (3-3n+k_j^2 \\
 &\quad (3n-1)\tau^2)] H_{n-2}^{(1)}(k_j R_1) \left. \right\}, \\
 Q_{53} &= \frac{\mu}{R_1^4} \left\{ \frac{2nr}{k_3} (-2+2n^2-k_3^2 r^2)(r^2 + (4+4n-k_3^2 r^2)\tau^2) \cdot \right. \\
 &\quad H_{n-3}^{(1)}(k_3 r) - \frac{1}{k_3^2} [8(n-2)(n-1)n(n+1)r^2 - 6k_3^2 r^4 n \cdot \\
 &\quad (n-1) + k_3^4 r^6 + [32(n-2)(n-1)n(n+1)^2 - \\
 &\quad 8k_3^2 r^2 (n-1)n(n+1)^2 + (2k_3^4 r^4 (2+3n(n-1)) - k_3^6 r^6)\tau^2] \\
 &\quad \left. H_{n-2}^{(1)}(k_3 r) \right\}, \\
 Q_{54}^{(i)} &= u_{sd} [2n(n+1)H_n^{(i)}(k_a R_1) - 2nk_a R_1 H_{n-1}^{(i)}(k_a R_1)], \\
 Q_{55}^{(i)} &= u_{sd} [(-2n(n+1) + k_\beta^2 R_1^2) H_n^{(i)}(k_\beta R_1) + 2k_\beta R_1 H_{n-1}^{(i)}(k_\beta R_1)], \\
 S_{64}^{(i)} &= [(2n(n+1)\mu_{sd} - k_a^2 R_2^2 (\lambda_{sd} + 2\mu_{sd}))], \\
 H_n^{(i)}(k_a R_2) &- 2\mu_{sd} k_a R_2 H_{n-1}^{(i)}(k_a R_2)], \\
 S_{65}^{(i)} &= [2n\mu_{sd} k_\beta R_2 H_{n-1}^{(i)}(k_\beta R_2) - 2n(n+1)\mu_{sd} H_n^{(i)}(k_\beta R_2)], \\
 T_{74}^{(i)} &= [2n(n+1)H_n^{(i)}(k_a r) - 2nk_a r H_{n-1}^{(i)}(k_a r)], \\
 T_{75}^{(i)} &= [2k_\beta r H_{n-1}^{(i)}(k_\beta r) + (-2n(n+1) + k_\beta^2 r^2) H_n^{(i)}(k_\beta r)], \\
 \text{式中, 下标 } j &= 1, 2, \text{ 当 } j=1 \text{ 时为快波波数 } k_1, \text{ 当 } j=2 \\
 &\text{ 时为慢波波数 } k_2; \text{ 上标 } i=1, 2, \text{ 当 } i=1 \text{ 为第一类 Hankel} \\
 &\text{ 函数, 当 } i=2 \text{ 时为第二类 Hankel 函数。}
 \end{aligned}$$