

DOI: 10.11779/CJGE201808022

# 深层搅拌水泥土基底加固层的三维随机有限元分析

刘勇<sup>1,2</sup>, 李福豪<sup>2</sup>, 陈健<sup>3</sup>, 胡俊<sup>4</sup>

(1. 武汉大学水资源与水电工程科学国家重点实验室, 湖北 武汉 430072; 2. 新加坡国立大学土木与环境工程系, 新加坡 117576;

3. 华中科技大学土木工程与力学学院, 湖北 武汉 430074; 4. 海南大学土木建筑工程学院, 海南 海口 570228)

**摘要:** 在软土基坑开挖过程中, 围护结构的最大侧向位移往往出现在开挖面以下。常用的防范方法是采用深层搅拌法对设计深度以下 2~3 m 的软土层进行水泥加固处理, 形成水泥土加固层以减少围护结构的侧向位移。由于水泥土的强度具有显著的空间变异性, 工程设计中通常采用较为保守的整体强度设计值。考虑深层搅拌桩形成过程中的两种主要不确定性因素: 桩身位置不确定性和桩身内部水泥土强度不均匀性, 将水泥土加固层的强度模拟为随机场, 且将其作为材料变量结合有限元仿真模拟进行受力分析。分析结果表明水泥土加固层的设计强度可表示为钻心取样强度平均值减去  $t$  倍标准差, 对系数  $t$  进行了详细探讨, 所得结果可为今后类似工程设计提供参考依据。

**关键词:** 水泥土; 无侧限抗压强度; 空间变异性; 随机有限元; 位置不确定性; 设计值

中图分类号: TU471.8

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2018)08-1542-07

**作者简介:** 刘勇(1982-), 男, 湖南娄底人, 教授, 主要从事岩土工程及地质灾害风险管控等方面的研究工作。E-mail: liuy203@whu.edu.cn。

## Three-dimensional random finite element analysis of cement-admixed soil slab for stabilization of foundation pits

LIU Yong<sup>1,2</sup>, LEE Fook-Hou<sup>2</sup>, CHEN Elton J<sup>3</sup>, HU Jun<sup>4</sup>

(1. State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan 430072, China;

2. Department of Civil & Environmental Engineering, National University of Singapore, Singapore 117576, Singapore; 3. School of Civil

Engineering & Mechanics, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan 430074, China; 4. College of Civil Engineering and

Architecture, Hainan University, Haikou 570228, China)

**Abstract:** In a deep excavation, the maximum displacement of earth retaining structures (e.g., diaphragm wall) usually occurs below the information level. In order to reduce the displacement, the deep cement mixing technique is often used to improve the ground 2 to 3 m below the information level. Because of the high heterogeneity in the strength of cement-admixed soils, the conservative design value for strength is generally adopted in practice. In this study, two main sources for the heterogeneity in the strength of cement-admixed soils are considered, namely, the positioning error in column installation and the non-uniformity within each single column. The unconfined compressive strength of cement-admixed soils is simulated as the three-dimensional random field, and the random field serves as the input parameter in finite element analysis. Based on such kind of finite-element analysis, the design overall strength of a cement-treated slab subjected to lateral loading can be considered as the mean value minus its standard deviation multiplied by a reduction factor. The reduction factor is explored for various scenarios. The results of this study are likely to offer guidelines for comparable projects in practice.

**Key words:** cement-admixed soil; unconfined compressive strength; spatial variability; random finite-element method; positioning error; design value

## 0 引言

水泥土搅拌桩是利用水泥等材料作为固化剂, 通过特制的搅拌机械, 在地基中将软土和固化剂强制搅拌, 利用固化剂和软土之间所产生的一系列物理化学反应, 使软土硬化成具有整体性、水稳定性和一定强度的优质地基。通过深层机械搅拌, 该方法能对地表

以下较深的淤泥、砂土、淤泥质土、泥炭土和粉土进

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(51608218); 中国博士后科学基金面上项目(2015M572144); 留学人员科技活动择优资助启动类项目(人社部函[2016]176-3)

**收稿日期:** 2016-03-07

**\*通讯作者** (E-mail: eltonjchen@hust.edu.cn)

行加固处理。水泥土搅拌桩施工方法具有工程简便、工期短、振动小等优点,目前在软土地基处理中被广泛应用<sup>[1-5]</sup>。尤其在软土基坑开挖过程中,围护结构的最大侧向位移往往出现在开挖面以下。这种情况下,常用的防范方法是采用深层搅拌法在设计深度以下2~3 m的软土进行水泥土加固处理(加固形式分为裙边、抽条、裙边加抽条或满堂加固),用以增大被动土压力,减少围护结构侧向位移。本文主要研究满堂加固形式,如图1所示。

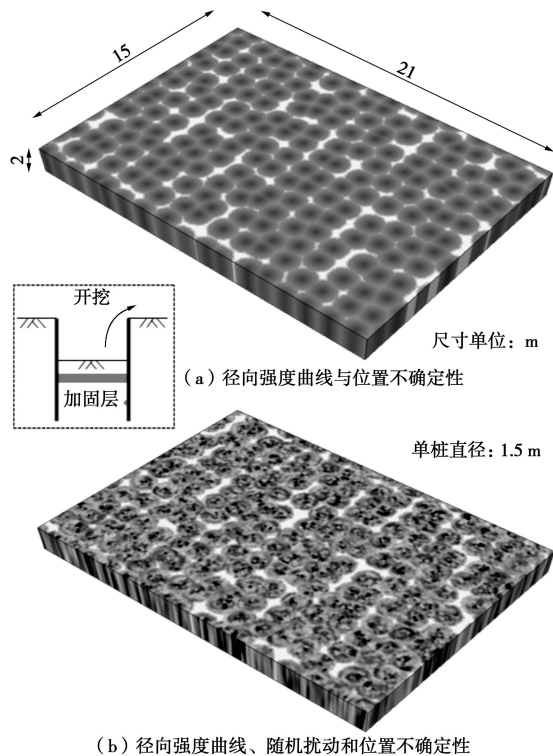


图1 考虑不同不均匀性因素的加固层的无侧限抗压强度云图  
(颜色较深区域的强度值较大)

Fig. 1 Contours of unconfined compressive strength of cement-treated slab with various sources of uncertainties (darker zones signify higher strength values)

对于水泥土搅拌桩所形成的水泥土加固层,从钻芯取样的结果可知水泥土强度呈现出较大的不均匀性<sup>[6-7]</sup>。不少学者<sup>[8-10]</sup>将水泥土加固层整体视为各向同性的随机场,以此考虑水泥土强度不均匀性对整体功能的影响。若考虑深层搅拌桩的形成过程,水泥土强度的空间不均匀性主要来自于两个方面。一方面,由于桩体搅拌过程中水泥浆分布的不均匀性导致单根水泥土桩的强度不均匀。Lee等<sup>[11]</sup>和陈健等<sup>[12]</sup>通过微缩尺度离心模型试验,模拟再现了深层搅拌桩的施工过程,探讨了单桩内水泥土空间变异性与施工工艺参数的关系,并给出了离散系数的经验公式。Namikawa等<sup>[13]</sup>针对单桩不均匀性将水泥土单桩模拟成随机场,通过随机有限元对单桩竖向承载力进行了分析,结果

表明随机场中的自相关长度对整体承载力影响较为显著,当自相关长度与单桩半径长度相似时,桩的整体平均承载力达到最小值。此外,单桩内水泥土的平均强度往往沿桩径呈现逐渐减弱的趋势(见图1(a))。

另一方面,由于搅拌深度一般在地面下20~40 m<sup>[6-8]</sup>,搅拌设备在达到这个深度的施工中,将不可避免产生位置上的偏差。《建筑地基处理技术规范》<sup>[14]</sup>对搅拌桩的垂直偏差要求是1%,因此,虽然施工设计时地表桩与桩之间的排列较为有序合理,但在实际搅拌层中(即地面下20~40 m),桩本身的位置将会有偏移。桩身的偏移会导致加固层存在未处理区域(见图1)。刘勇等<sup>[15-16]</sup>针对这种桩身位置不确定性进行了三维有限元分析,结果表明与单桩内水泥土不均匀性相比,桩身位置不确定性对加固层整体强度的影响更为显著。

对于水泥土搅拌层的数值模拟,已有文献常采用平面应变假设进行二维分析<sup>[9]</sup>。然而,当考虑到单桩内强度不均匀性以及桩身位置不确定性时,则须引入三维数值模拟。然而,目前采用三维有限元对桩身位置不确定性研究较为匮乏,并且对桩身位置不确定性的实际概率分布类型鲜有探讨。本文在原有研究<sup>[15-16]</sup>基础上,针对桩身位置不确定性进行进一步研究,并通过三维随机有限元考虑其对水泥土加固层整体加固效果的影响;同时,对不同工况所引起的桩身位置不确定性进行探讨,所得结果可为今后类似工程设计提供参考依据。

## 1 随机场生成

正态随机场常用生成方法有谱表示法<sup>[17]</sup>和Karhunen-Loeve分解法<sup>[18]</sup>。这两类方法分别将随机函数展开为 $n$ 维三角空间函数和 $n$ 维正交基函数。随着 $n$ 趋向于无穷大,展开的函数逐渐靠近目标随机函数。在三维空间,随机函数的展开包含 $n^3$ 项系数,往往导致计算速度受限制<sup>[19]</sup>。刘勇等<sup>[20]</sup>提出的修正线性估计模型中,三维随机函数的展开只涉及8(即 $2^3$ )项系数,从而显著提高了计算速度。该模型既能生成直角坐标系中的随机场,也能生成柱坐标系中的随机场。Larsson等<sup>[21]</sup>的研究表明在单根水泥土桩中(见图2),水泥土中钙离子浓度的自相关长度沿着桩径向(即 $\rho$ 方向)与沿着桩环向(即 $\alpha$ 方向)有不一样的值,因此,单桩水泥土强度的自相关结构更符合柱坐标系特征。

然而,正态随机场无法合理反演水泥土强度的空间变异性。Kingsley<sup>[22]</sup>和刘勇等<sup>[23]</sup>分别通过理论推导和实测数据对比发现Beta随机场可更好地反映岩土材料强度参数。Beta随机场可由正态随机场转换而成,

但在转换过程会引起材料参数的自相关函数发生一定变化<sup>[24]</sup>。刘勇等<sup>[25]</sup>等总结了在正态随机场转换为 beta 随机场过程中自相关长度的变化规律,从而可以生成给定自相关长度的 Beta 随机场。文献[26, 27]从理论上证明部分非正态随机场也可不通过正态随机场的转换而直接生成。

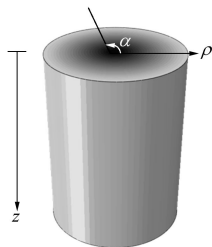


图 2 柱坐标系中的单桩示意图

Fig. 2 Single Column in the cylindrical coordinate system

本文对单桩水泥土强度分解为两部分。首先,水泥土无侧限强度的均值为一条沿桩径递减的线性函数。其次,采用 Liu 等<sup>[20, 25]</sup>的 Beta 随机场生成方法,在均值上附加柱坐标系下均值为零的三维随机场。随机场的边缘概率分布类型采用 Beta 分布,其形状参数采用刘勇等<sup>[23]</sup>的简化方法对新加坡滨海湾金融中心地基处理项目的现场数据拟合得到(见图 3)。桩身的位置偏移则通过桩中心点的坐标值控制。如图 4 所示,某一根桩的中心位置可以通过两个参数控制:位置偏移的绝对数量大小( $d_i$ )和偏移角度( $\alpha_i$ )。 $d_i$ 的变化范围为 0 到允许位置偏移值  $d_0$ 。当  $d_i = 0$  时,则没有桩身位置偏移。凭工程经验和直观理解,桩身偏移应该更符合二维正态分布(见图 4(a)),但是由于这一推测缺乏实测数据支持,采用均匀分布(见图 4(b))则应更为保守。本文对这两类分布均有考虑。由于施工过程中导致桩身位置偏移的因素(例如:人工、搅拌机械等)具有一定的连续性,临近桩之间的位置偏移也应具有一定的相关性,在数值模拟中(见图 1),这类相关性可以通过将  $d_i$  或  $\alpha_i$  视为二维随机场来近似实现。

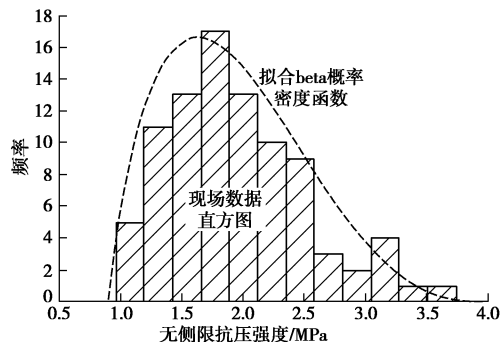


图 3 无侧限抗压强度的概率密度函数拟合

Fig. 3 Probability density function of unconfined compressive strength fitted from field data

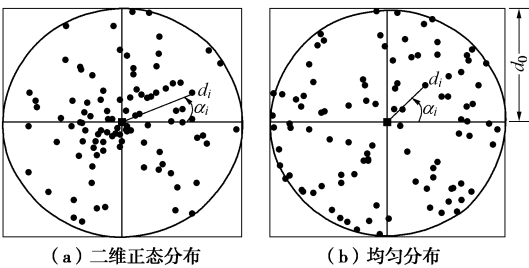


图 4 两种桩身位置不确定性的分布

Fig. 4 Two distributions of positioning error in column centres

2 随机有限元分析

如图 1 所示,水泥土加固层在围护结构之间主要承受横向荷载。为分析加固层在受横向荷载下的整体力学特性,本文选取代表性的一段进行三维有限元分析,所用软件为 ABAQUS,模型的几何尺寸、边界条件和网格大小见图 1, 5。采用修正莫尔库仑材料(见图 6)反映水泥土的应变软化特性。有限元模型中积分点的材料参数与三维 Beta 随机场匹配耦合以反映加固层水泥土无侧限强度  $q_u$  的空间变异性(见图 1(b))。随机场的统计量见表 1~3。

表 1 随机有限元模型中确定性参数

Table 1 Deterministic parameters for random finite element analyses		
参数	取值	参考文献
模型大小(长宽高)	21 m × 15 m × 2 m	
布桩形式	正方形满堂布桩	
单桩半径 R/m	1.5	[14]
桩心距离	1.7R	[14]
$E/q_u$ (处理后)	140	[28]
$E/q_u$ (未处理)	100	[29]
未处理土 $S_u$ /kPa	73	[29]
泊松比	0.49	—
土密度/(kg·m <sup>-3</sup> )	1700	—
摩擦角/(°)	0	—
剪胀角/(°)	0	—

注:  $R$  为桩半径;  $E$  为弹性模量;  $q_u$  为无侧限抗压强度;  $S_u$  为天然土剪切强度。

表 2 随机有限元模型中材料随机性参数

Table 2 Statistical parameters for random finite element analyses		
参数	取值	参考文献
均值(桩外围)/MPa	1.61	[7]
均值(桩心位置)/MPa	3.22	[7]
离散系数	0.4	[6, 7]
边缘概率分布	beta	[14]
$E$ 和 $q_u$ 协相关系数	0.85	[19]
径向自相关长度	$\pi/8$	[20]
环向自相关长度	$R/6$	[20]
竖向自相关长度	10.0R	[31]

注:  $R$  为桩半径;  $E$  为弹性模量;  $q_u$  为无侧限抗压强度。

表 3 随机有限元模型中施工随机性参数

Table 3 Statistical parameters of construction for random finite element analyses	
参数	取值
桩身位置偏差均值	0
最大允许偏差	0.5R
边缘概率分布	均匀分布
桩身位置偏移的自相关长度	
垂直于基坑受力方向	6.0R
水平于基坑受力方向	2.0R

注:  $R$  为桩半径。

图 5 显示了在水泥土强度具有空间变异性条件下, 加固层的典型失效模型。与均匀材料所产生的失效模型相比, 本文结果与现实情况应更为接近。加固层的承载力特性可通过其应力 - 应变曲线表示, 因为随机场每一次模拟均产生不同的强度分布, 所以同一个模型需要进行反复计算 (本文对每一种参数组合均计算 100 次), 以此估计加固层整体强度的统计特征。

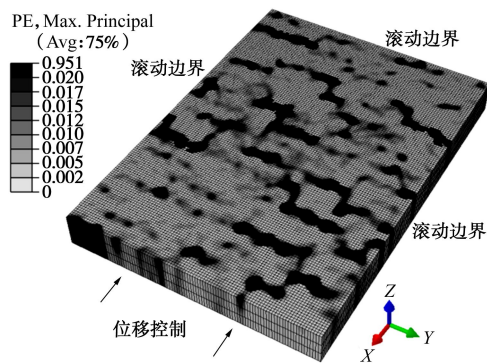


图 5 水泥土加固层的典型失效模式

Fig. 5 Typical failure model of a cement-treated slab

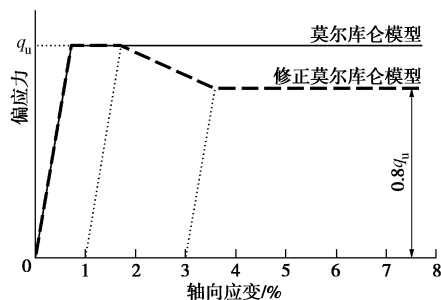


图 6 修正莫尔库仑模型

Fig. 6 Modified Mohr-Coulomb model

图 7 显示了在采用不同边缘分布模拟桩身位置不确定性的条件下, 加固层整体强度的统计特性。对图 7 (a)、7 (b) 中结果的 Kolmogorov-Smirnov 测试表明, 在整体应变为 0.8% 的水平时所对应的横向应力均服从正态分布。图 7 (c) 显示了不同概率分布类型下 100 次重复计算的经验累计分布函数。结果表面: 与二维正态分布 (见图 4 (a)) 相比, 采用均匀分布 (见

图 4 (b)) 取得的加固层整体强度较小, 结果较为保守。因此, 本文的参数分析中对桩身位置不确定性均采用均匀分布。

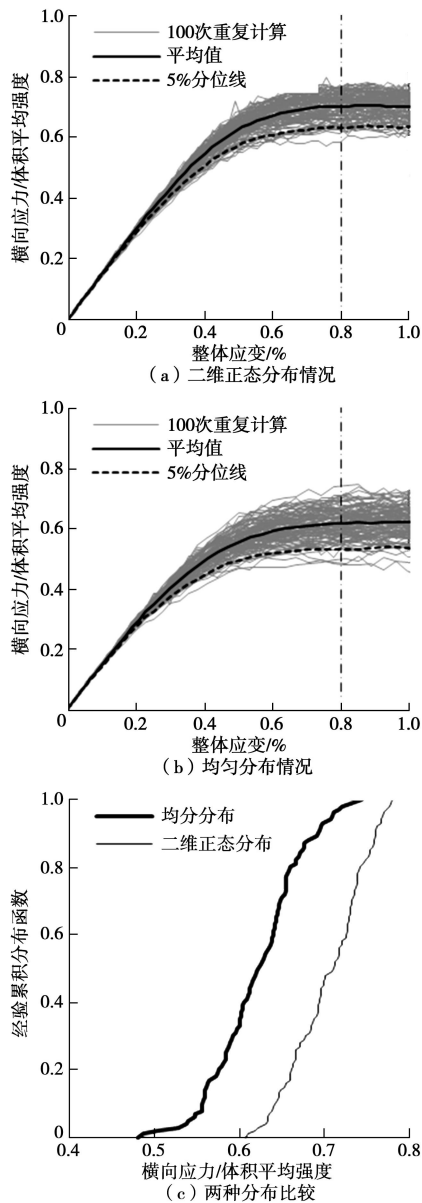


图 7 不同桩身位置偏移分布对加固层整体强度的影响

Fig. 7 Effects of different distributions in positioning error on mass strength of a cement-treated slab

根据可靠性设计思路<sup>[30]</sup>, 加固层的整体强度设计值可以确定为

$$Q_d = \bar{Q} - \beta \sigma_Q \quad (1)$$

式中,  $Q_d$  为加固层的整体强度设计值,  $\bar{Q}$  和  $\sigma_Q$  分别为加固层整体强度的计算平均值和标准差, 可通过随机有限元结果得到,  $\beta$  为目标可靠度指标。式 (1) 也可以表述为更为常见的形式:

$$Q_d = q_{u,ave} - t \sigma_{q_u} \quad (2)$$

式中  $q_{u,ave}$  和  $\sigma_{q_u}$  分别为加固层水泥土无侧限抗压强度的平均值和标准差, 可通过钻心取样得到;  $t$  为折

减系数，可通过随机有限元结果得到。

3 参数分析

本文主要针对位置不确定性对整体强度影响进行参数分析，水混凝土强度的统计参数见表 2。桩身位置不确定性一方面随着加固层深度的增加而加大；另一方面，由于施工工艺的顺序不同，比如成桩顺序，会引起不一样的自相关结构（图 8）。这种自相关结构可由位置不确定性两个方向的自相关长度来描述。因为搅拌桩一般为逐排形成，所以桩身位置的自相关性应在成桩过程中形成（即：相关性在一排以内）；排与排之间的相关性应则可以忽略。基于这种考虑，在进行参数分析时可调整一个方向的自相关长度，另一个的自相关长度方向则保持在一个桩径值。

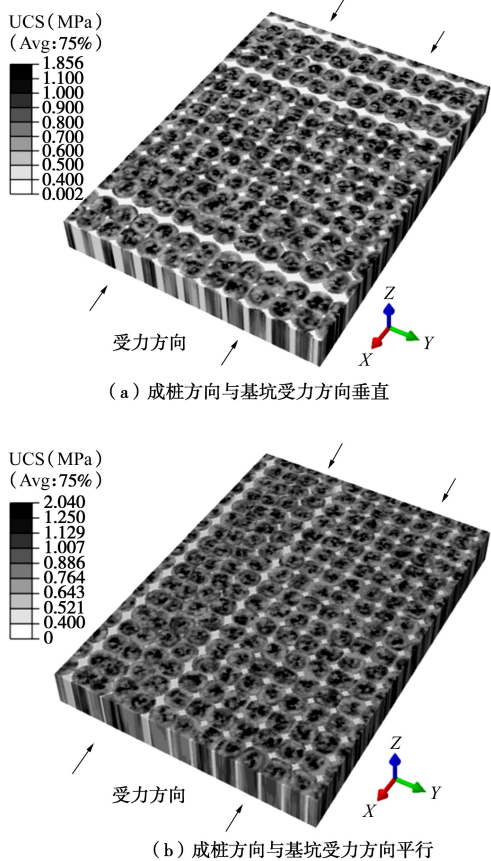


图 8 不同成桩方向下的无侧限抗压强度云图

Fig. 8 Contours of unconfined compressive strength under different correlation structures

图 8 (a)、(b) 分别显示了自相关长度的方向垂直于和平行于基坑受力方向的情况。图 9 显示了在这两种不同方向下，自相关长度对整体强度的影响。结果表面：当自相关长度垂直于基坑受力方向时，很容易形成一条贯通的欠加固带，从而减弱加固层的整体强度。当自相关长度水平于基坑受力方向时，水泥桩容易在受力面之间形成连续的“水泥墙”，从而增强了

整体强度。由此可知，搅拌桩的成桩顺序宜沿着基坑受力方向（图 8 (a)），尽量避免垂直于基坑受力方向（图 8 (b)）。基于这样的建议，加固层在表 3 的统计参数下其整体强度可较为保守地估计。

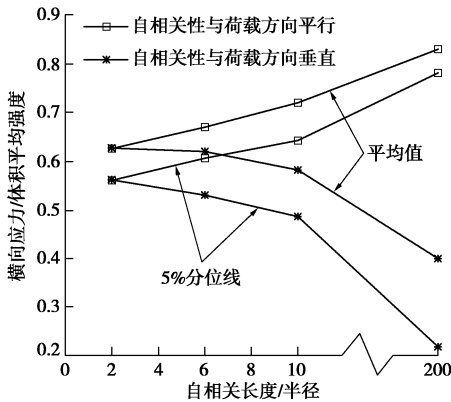


图 9 不同成桩方向对整体强度的影响

Fig. 9 Effects of different correlation structures on mass strength

然而，搅拌深度则因具体工程项目而异。基于表 2, 3 中的参数，本文对于不同搅拌深度下所允许的最大桩身偏移进行了参数分析，结果见图 10。图 11 则给出了在不同桩身偏移允许范围内，通过随机有限元

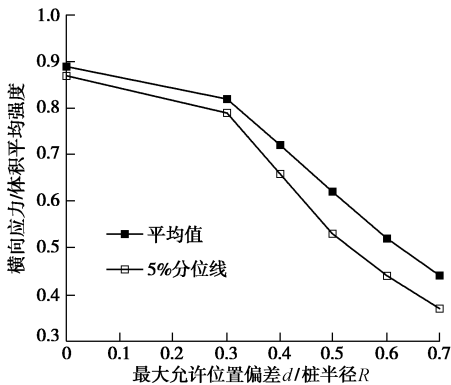


图 10 桩身最大允许桩身偏移对整体强度的影响

Fig. 10 Maximum positioning error on overall performance

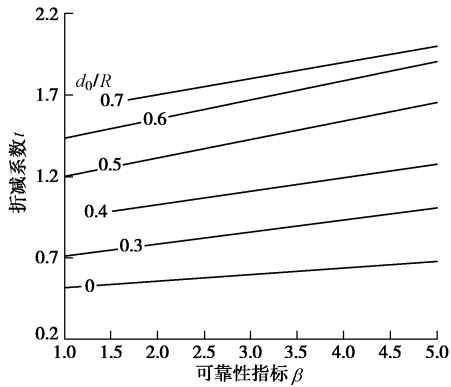


图 11 随机有限元分析得到的折减系数

Fig. 11 Reduction factor calculated from random finite-element analyses

计算得到的折减系数  $t$  (见式 (2))。在该图中, 将折减系数视为可靠性指标  $\beta$  和位置不确定性允许值  $d_0$  的函数, 以便于读者对类似工程加固层整体强度设计值的初步估计。

## 4 结 论

深层水泥土搅拌法处理的软土地基, 由于搅拌不均匀性以及搅拌机械轴的位置不确定性, 水泥土的强度往往呈现较大的空间变异性。本文采用三维随机有限元法, 对水泥土加固层整体强度进行了重点研究。

(1) 水泥土强度的不均匀性往往由多个因素引起。在考虑其不均匀性对整体强度的影响时, 建议同时考虑主要因素, 以便更真实反映实际工况。

(2) 对于深层搅拌桩的施工排列方向, 建议与基坑受力方向平行, 这样有利于提高加固层的整体承载力。相反, 如果搅拌桩排列方向与基坑受力方向垂直, 则易造成欠加固部分的贯通, 导致加固层实际整体承载力大幅折减的风险。

(3) 按照可靠性设计要求, 本文给出了水泥土加固层整体强度的设计值计算公式, 并对不同工况下计算公式中的折减系数给出了建议值, 以便读者对类似工程的设计值进行初步估计。

## 参考文献:

- [1] LEE F H, CHIN K G, XIAO H W, et al. Keynote lecture: cement-soil treatment in underground construction[C]// Indian Geotechnical Conference 2013, Indian Geotechnical Society (IGS). Roorkee, 2013: 1 - 15.
- [2] 沈水龙, 许焯霜, 常礼安. 深层搅拌桩周围土体劈裂的研究与分析[J]. 岩土力学, 2006, **27**(3): 378 - 382. (SHEN Shui-long, XU Ye-shuang, CHANG Li-an. Analysis research on soil fracturing around deep mixing column[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, **27**(3): 378 - 382. (in Chinese))
- [3] LIU Y, ZHENG J J, GUO J. Statistical evaluation for strength of pile by deep mixing method[C]// Proceedings of the Second International Conference on Geotechnical Engineering for Disaster Mitigation and Rehabilitation. Nanjing, 2008: 195 - 201.
- [4] LIU S Y, DU Y J, YI Y L, et al. Field investigations on performance of T-shaped deep mixed soil cement column-supported embankments over soft ground[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2012, **138**(6): 718 - 727.
- [5] 郑俊杰, 刘 勇, 郭 嘉, 等. 桩基检测合格率的概率分布及可靠性评估[J]. 岩土工程学报, 2009, **31**(11): 1660 - 1664. (ZHENG Jun-jie, LIU Yong, GUO Jia, et al. Probabilistic analysis and reliability assessment for acceptance rate of foundation pile testing[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, **31**(11): 1660 - 1664. (in Chinese))
- [6] CHEN J, LEE F H, NG C C. Statistical analysis for strength variation of deep mixing columns in Singapore[C]// Geo-Frontiers 2011 Advances in Geotechnical Engineering Dallas, 2011: 576 - 584.
- [7] LIU Y, JIANG Y J, LEE F H. Some issues in core strength measurement in cement-soil treatment for deep excavation - field data study[C]// The 15th Asian Regional Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering. Fukuoka, 2015: 1563 - 1566.
- [8] KASAMA K, WHITTLE A J, ZEN K. Effect of spatial variability on the bearing capacity of cement-treated ground[J]. Soils and Foundations, 2012, **52**(4): 600 - 619.
- [9] MCGINN A J. Performance of deep excavations in Boston marine clay stabilized by deep mixing methods[D]. Cornell: Cornell University, 2003.
- [10] LARSSON S, MALM R, CHARBIT B, et al. Finite element modelling of laterally loaded lime-cement columns using a damage plasticity model[J]. Computers and Geotechnics, 2012, **44**: 48 - 57.
- [11] LEE F H, LEE C H, DASARI G R. Centrifuge modelling of wet deep mixing processes in soft clays[J]. Géotechnique, 2006, **56**(10): 677 - 691.
- [12] CHEN J E, LIU Y, LEE F H. A statistical model for the unconfined compressive strength of deep mixed columns[J]. Géotechnique, 2016, **66**(5): 351 - 365.
- [13] NAMIKAWA T, KOSEKI J. Effects of spatial correlation on compression behavior of cement-treated column[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2013, **139**(8): 1346 - 1359.
- [14] JGJ 79—2012 建筑地基处理技术规范[S]. 2012. (JGJ 79—2012 Technical code for ground treatment of buildings[S]. 2012. (in Chinese))
- [15] LIU Y, LEE F H, QUEK S T, et al. Effect of spatial variation of strength and modulus on the lateral compression response of cement-admixed clay slab[J]. Géotechnique, 2015, **65**(10): 851 - 865.
- [16] LIU Y, JIANG Y, XIAO H, et al. Determination of representative strength of deep cement-mixed clay from core strength data[J]. Géotechnique, 2017, **67**(4): 350 - 364.



- [17] SHINOZUKA M, DEODATIS G. Simulation of multi-dimensional Gaussian stochastic fields by spectral representation[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1996, **49**(1): 29 – 53.
- [18] PHOON K K, HUANG H W, QUEK S T. Simulation of strongly non-Gaussian processes using Karhunen-Loeve expansion[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2005, **20**(2): 188 – 198.
- [19] CHEN E J, DING L Y, LIU Y, et al. On spectral representation method and Karhunen-Loève expansion in modelling construction materials properties[J]. *Achieves of Civil and Mechanical Engineering*, 2018, **18**: 769 – 783.
- [20] LIU Y, LEE F H, QUEK S T, et al. Modified linear estimation method for generating multi-dimensional multi-variate Gaussian field in modelling material properties[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2014, **38**: 42 – 53.
- [21] LARSSON S, STILLE H, OLSSON L. On horizontal variability in lime-cement columns in deep mixing[J]. *Géotechnique*, 2005, **55**(1): 33 – 44.
- [22] KINGSLEY H W. Probability distribution of strength parameters in uniform soils[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1986, **112**(3): 345 – 350.
- [23] 刘 勇, 郑俊杰, 郭 嘉.  $\beta$ 分布的参数确定及其在岩土工程中的应用[J]. *岩土工程技术*, 2006, **20**(5): 240 – 244. (LIU Yong, ZHENG Jun-jie, GUO Jia. Determination of parameters for beta distribution and its applications in geotechnical engineering[J]. *Geotechnical Engineering Technique*, 2005, **20**(5): 240 – 244. (in Chinese))
- [24] GRIGORIU, M. *Applied non-Gaussian processes: examples, theory, simulation, linear random vibration, and MATLAB solutions*[M]. London: Prentice-Hall International (UK) Limited, 1995.
- [25] LIU Y, QUEK S T, LEE F H. Translation random field with marginal beta distribution in modeling material properties[J]. *Structural Safety*. **61**: 57 – 66.
- [26] LIU Y, SHIELDS M D. A direct simulation method and lower-bound estimation for a class of gamma random fields with applications in modelling material properties[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2017, **47**: 16 – 25.
- [27] LIU Y, HU J, WEI H, et al. A direct simulation algorithm for a class of beta random fields in modelling material properties[J]. *Computer Methods in Applied Mechanical and Engineering*, 2017, **326**: 642 – 655.
- [28] LEE F H, LEE Y, CHEW S H, et al. Strength and modulus of marine clay-cement mixes[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2005, **131**(2): 178 – 186.
- [29] DAMES & MOORE. Singapore mass rapid transit system – detailed geotechnical study interpretative report[R]. Singapore: Prepared for Provisional Mass Rapid Transit Authority, 1983.
- [30] Joint Committee of Structural Safety (JCSS). Probabilistic model code part 1: basis of design[M]. Paris: RILEM Publications SARL, 2001.
- [31] HONJO Y. A probabilistic approach to evaluate shear strength of heterogeneous stabilized ground by deep mixing method[J]. *Soils and Foundations*, 1982, **22**(1): 23 – 38.