

DOI: 10.11779/CJGE201808021

分数阶塑性力学及其砂土本构模型

孙逸飞¹, 高玉峰¹, 鞠 雯²

(1. 河海大学教育部岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 江苏 南京 210098; 2. 中国核工业建设集团华兴建筑公司, 江苏 南京 210019)

摘要: 砂土的剪胀以及应力-应变关系通常依赖于其物质状态; 其塑性流动方向不再与加载方向重合, 而是随其状态改变而改变。为了描述这一非关联特性, 传统的岩土塑性理论通常需要额外假定一个独立于屈服面的塑性势面, 并人为地将塑性势面相关的参数与状态参数唯像地关联在一起。从而, 使得模型参数增多、部分参数缺乏物理意义。不同于传统塑性力学, 分数阶塑性力学基于非局域性的微分算子和梯度, 其在某一应力点的微分方向不仅与该点的应力状态有关, 还与到达该应力点的加载历史、过程相关; 从而, 无需额外假定塑性势面(或屈服面), 仅需要对已有屈服面(或塑性势面)进行分数阶微分求解, 便可以建立砂土的状态依赖分数阶弹塑性力学模型。最后, 通过模拟几种不同砂土的三轴排水与不排水试验结果, 发现: 所提出的模型可以较好地描述砂土在不同初始状态及加载条件下的应力应变行为。

关键词: 分数阶微积分; 分数阶塑性力学; 本构模型; 状态参数; 砂土

中图分类号: TU43 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2018)08-1535-07

作者简介: 孙逸飞(1988-), 男, 副教授, 主要研究分数阶塑性力学与粗粒土本构模型。E-mail: sunny@hhu.edu.cn。

Fractional plasticity and its application in constitutive model for sands

SUN Yi-fei¹, GAO Yu-feng¹, JU Wen²

(1. Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and Embankment Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China;

2. China Nuclear Industry Huaxing Construction Company Limited, Nanjing 210019, China)

Abstract: It has been recognized that the stress-dilatancy and stress-strain relationship of sand depend on the material state. The plastic flow direction does not usually coincide with the corresponding loading direction but evolves with the material state. To consider such non-associativity, an additional plastic potential surface that is independent of the yielding surface is usually assumed. A state parameter is then incorporated into the material constants of the plastic potential surface, which brings more model parameters where some of them even have no physical meanings. Unlike the traditional plasticity theory, the fractional plasticity is established on non-local fractional operators and gradients where the derivatives of a stress point are determined not only by the state of the stress point of interest but also by the loading history before reaching this point. Therefore, without the necessity of assuming an additional plastic potential (yielding) surface, a state-dependent non-associated fractional plasticity model for sands can be easily developed by conducting fractional order derivatives on the yielding (plastic potential) surface. To validate the proposed model, a series of drained and undrained triaxial compression test results of different sands are simulated and then compared. A good agreement between the model simulations and the corresponding test results can be observed.

Key words: fractional calculus; fractional plasticity; constitutive model; state parameter; sand

0 引言

砂土由于其材料构成中的散粒特性, 常常表现出较复杂的剪胀以及应力应变关系^[1-5]。由大量的试验和理论研究^[4-9]表明, 砂土的变形呈现非关联流动特性, 其应变增量方向不再垂直于屈服面, 而是与应力增量方向存在一个夹角。Been等^[5]的研究表明, 砂土的塑性流动依赖于其本身的物质状态, 并提出了一个适合于描述粗粒土剪胀变形的状态参数 ψ 。在此后的数十

年里, 许多学者^[10-16]基于此状态参数, 提出了一系列的砂土、堆石料、道砟等粗粒土的本构模型。比如, Li等^[10]考虑到砂土剪胀和硬化对其状态参数的依赖, 将状态参数引入剑桥模型, 在广义塑性力学框架^[17]

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(41630638); 国家重点基础研究发展计划(“973”计划)项目(2015CB057901); 中央高校基本科研业务费项目(2017B05214)

收稿日期: 2017-07-19

内建立了一个适用于砂土的本构模型。Russell 等^[11]考虑到颗粒破碎对临界状态线的影响,结合状态依赖的塑性势面,在边界塑性力学^[18]框架内提出了适用于中高压固结条件下的砂土本构模型。类似的,还有Xiao 等^[12-13]、Dafalias 等^[16]提出的状态依赖的粗粒土本构模型,这里不再赘述。可以发现,为了描述砂土等粗粒土的状态依赖的非关联流动,以上模型无一例外地引用了材料屈服面与塑性势面不一致的假定,将土体的状态参数引入塑性势面的中。这就使得模型参数增多,模型变得复杂,从而不适合工程应用。并且,部分模型参数没有物理意义,只是为了更好地唯像描述土体在不同加载条件下的变形特性。因此,导致了目前工程中应用的较多的还是一些简单传统的经验或理论模型,比如邓肯-张模型、莫尔库仑模型等。Sumelka^[19]对各向异性金属材料的研究同样支撑了这些观点。由于需要考虑金属材料非关联流动对材料强度和变形的影响,往往需要增加建模参数。这就会使得模型变得复杂。

为了解决这一问题,笔者等^[8-9, 15]通过分析岩土材料的三轴试验特性,结合 Sumelka^[19]的研究成果,提出了岩土材料的分数阶塑性力学模型。Sumelka^[19]的研究主要针对各向异性材料。虽然都是采用分数阶微分来进行建模,但是 Sumelka^[19]是考虑物质点周围应力状态对该点强度和变形的影响,从而建立分数阶的各向异性塑性力学模型。然而,笔者的研究是考虑土体某点的强度和变形受加载初始到当前应力状态的影响,从而建立土体的分数阶塑性力学模型。不同于传统塑性力学,分数阶塑性力学基于非局域性的分数阶微分算子和梯度,其在某一应力点的微分不仅与该点的应力状态有关,还与到达该点的加载历史相关。因此,在已知屈服面条件的情况下,无需额外假定塑性势面,仅需要对已有屈服面进行分数阶微分求解,并联系已有弹性力学理论,便可以建立砂土的状态依赖分数阶弹塑性力学模型。同样,在仅已知塑性势面的条件下,比如清华模型^[20],也可以运用分数阶微分理论进行求解、建模。然而,目前的分数阶弹塑性力学模型并没有考虑砂土的状态依赖非关联特性。因此,为了更好地描述砂土的变形特性,有必要建立非关联的状态依赖分数阶本构模型。

本文首先介绍分数阶微分的基本理论和砂土的状态参数;然后,对砂土的分数阶弹塑性力学本构关系进行推导;接着,基于修正剑桥屈服面,结合分数阶塑性力学,建立砂土的状态依赖非关联分数阶本构模型;最后,对几种不同砂土的排水和不排水试验结果进行拟合,验证模型。

1 分数阶微分和状态参数

目前的分数阶本构模型多基于分数阶数 α 在 0 到 1 之间来定义,比如殷德顺等^[21]。由于砂土塑性流动的状态依赖特性,导致了 α 变化范围可能会超过 1。因此,本文选取广义的 Caputo 分数阶微分定义^[22]如下:

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{\alpha+1-n}} \quad (x > a) \quad (1)$$

式中 $D = \partial / \partial x$ 表示微分; a 为积分下限; x 为应力自变量; f 为屈服函数; $n \geq 1$, 为正整数; 分数阶数 $\alpha \in (n-1, n]$ 。由式(1)可知,分数阶的微分基于积分定义,其在应力点 x 的微分、以及因此得到的矢量受从 a 到 x 的加载历史影响;从而使得分数阶力学模型从理论定义上就包含对加载历史的记忆。需要指出的是,常规的分数阶微分定义有 3 种形式,这里选择 Caputo 定义是因为其形式简单,对常数的导数为 0,更加适用于土体变形等实际物理现象的建模,其他两种定义(Grünwald-Letnikov 定义和 Riemann-Liouville 定义),形式稍微复杂,偏适用于数学分析。

Been 等^[5]通过分析砂土的大量试验结果,提出一个用于描述砂土应力及密度依赖特性的量纲为 1 的参数 ψ :

$$\psi = e - e_c \quad , \quad (2)$$

式中, e 为试样当前孔隙比, e_c 为试样的临界状态孔隙比,定义为

$$e_c = e_T - \lambda \left(\frac{p'}{p_a} \right)^\xi \quad , \quad (3)$$

其中, e_T , λ 以及 ξ 是砂土在 $e-p'$ 平面上的临界状态参数^[23]。 $p_a = 100$ kPa, 为大气压强。由式(3)可知, ψ 的正负与试样孔隙比所处临界状态线的位置有关。

2 分数阶弹塑性本构关系

首先需要指出的是,本文所推导本构关系基于以下假定:①土体是均匀的;②土体是各项同性的;③土体受压应力、压应变为正,拉伸应力、拉伸应变为负;④土体受单调荷载作用;⑤土体变形分为弹性部分和塑性部分。

2.1 弹性应力应变关系

根据弹性力学理论,材料的弹性应变增量 $\dot{\varepsilon}^e$ 和应力增量 $\dot{\sigma}$ 有如下关系:

$$\dot{\varepsilon}^e = C^e : \dot{\sigma} \quad , \quad (4)$$

这里,上标 e 表示本构关系中的弹性部分,上标 \cdot 表示增量。弹性应变 $\dot{\varepsilon}^e = [\varepsilon_v^e, \varepsilon_s^e]^T$; 其中,弹性体积应变 $\varepsilon_v^e = \varepsilon_1^e + 2\varepsilon_3^e$; 弹性剪切应变 $\varepsilon_s^e = 2(\varepsilon_1^e - \varepsilon_3^e)/3$ 。 ε_1^e 和

ε_3^e 分别为第一和第三弹性主应变。此外, $\sigma = [p', q]^T$ 为有效应力张量, $p' = (\sigma'_1 + 2\sigma'_3)/3$ 为平均有效主应力, $q = \sigma'_1 - \sigma'_3$ 为偏剪应力。 σ'_1 和 σ'_3 为第一和第三有效主应力。 C^e 是弹性柔度矩阵, 可以表示为

$$C^e = \begin{bmatrix} 1/K & \\ & 1/(3G) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其中, G 为剪切模量, 表示为

$$G = G_0 p_a \frac{(2.97 - e)^2}{1 + e} \sqrt{\frac{p'}{p_a}}, \quad (6)$$

其中, G_0 为初始剪切模量。 K 为体积模量, 定义为

$$K = \frac{(2 + 2\nu)}{3(1 - 2\nu)} G. \quad (7)$$

式中, ν 为泊松比。

2.2 分数阶塑性应力应变关系

在传统塑性力学中, 塑性应变增量由以下关系式得到

$$\dot{\varepsilon}^p = \Lambda D^1 g(\sigma), \quad (8)$$

式中, 上标 p 表示本构关系中的塑性部分。塑性应变 $\dot{\varepsilon}^p = [\dot{\varepsilon}_v^p, \dot{\varepsilon}_s^p]^T$; 其中, 塑性体积应变 $\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\varepsilon}_1^p + 2\dot{\varepsilon}_3^p$; 塑性剪切应变 $\dot{\varepsilon}_s^p = 2(\dot{\varepsilon}_1^p - \dot{\varepsilon}_3^p)/3$ 。 $\dot{\varepsilon}_1^p$ 和 $\dot{\varepsilon}_3^p$ 分别为第一和第三塑性主应变。 Λ 为塑性乘子, 可以由屈服面上的变形协调方程推导得出^[8]; g 为塑性势面或者屈服面函数, 其具体形式取决于材料所用的流动法则。需要指出的是, 由于一阶导数是局部算子, 与全局加载历史无关; 因此, 为了简化表达式, 式(1)中的积分上下限在这里省去了。分析式(8)可知, 材料的塑性应变增量方向垂直于 g 平面, 如图 1 所示, 即 $\alpha = 1$ 时的流动方向。

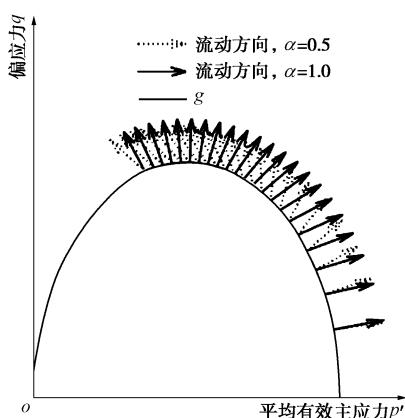


图 1 一阶和分数阶塑性流动方向

Fig. 1 1-order and fractional-order plastic flow directions

然而, 在分数阶塑性力学中, 塑性应变增量由以下分数阶应力应变关系得到

$$\dot{\varepsilon}^p = \Lambda_0 D_\sigma^\alpha g(\sigma). \quad (9)$$

由于式(9)考虑了土体对加载过程的记忆, 其所得塑性流动方向不再垂直于 g 面, 如图 1 所示,

$\alpha = 0.5$ 时的塑性流动方向。因此, 如果将 g 面认定为屈服面 f , 对其进行一阶求导, 那么, 便可以得到传统塑性力学里面的加载方向 m ; 同时, 对其进行分数阶求导, 便可以得到与加载方向存在一个夹角的塑性流动方向 n 。从而, 在不需要额外假定塑性势面函数的情况下, 得到土体的塑性流动方向。同样, 如果已知土体的塑性势面, 比如著名的清华模型^[20]; 运用式(9)对 g 求一阶导数得到塑性流动方向, 对 g 求分数阶导数得到相应的加载方向。为了简化分析, 本文选择修正剑桥屈服面^[24]来进行建模, 即

$$f = (2p' - p'_0)^2 + \left(\frac{2q}{M_c} \right)^2 - p'^2_0 = 0. \quad (10)$$

式中, 参数 p'_0 控制了屈服面函数的大小, M_c 为临界状态摩擦系数, 可以表达为

$$M_c = \frac{6 \sin \phi_c}{3 - \sin \phi_c}, \quad (11)$$

其中, ϕ_c 为土体的临界状态摩擦角。进一步假定砂土的硬化是各向同性的, 并且屈服面上符合变形协调关系, 得到

$$[D^1 f(\sigma)]^T \dot{\sigma} + D^1 f(H)[D^1 H(\dot{\varepsilon}^p)]^T \dot{\varepsilon}^p = 0. \quad (12)$$

至此, 将式(9)代入式(12), 可以求得塑性乘子的表达式为

$$\Lambda = \frac{[D^1 f(\sigma)]^T \dot{\sigma}}{D^1 f(p'_0) [D^1 p'_0(\dot{\varepsilon}^p)]^T D_\sigma^\alpha f(\sigma)}. \quad (13)$$

由式(13)可知, 分数阶塑性力学中, 塑性乘子的大小受到分数阶数 α 的影响。为了方便应用, 进一步将式(13)代入式(9), 得出以下简化表达式:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{1}{\Pi} m^T n \dot{\sigma}. \quad (14)$$

式中, Π 为塑性模量, m 和 n 分别为塑性加载张量和塑性流动张量。至此, 联系式(4)、(14), 可得分阶的弹塑性应力应变关系式:

$$\dot{\varepsilon} = \left[C^e + \frac{1}{\Pi} m \otimes n \right] \cdot \dot{\sigma}. \quad (15)$$

3 加载方向与流动方向

3.1 加载方向

加载方向(m)的表达式为

$$m = [m_v, m_s]^T, \quad (16)$$

这里, 压缩相关的加载方向(m_v)定义为

$$m_v = \frac{4(p'^2 - q^2/M_c^2)}{p' \|D^1 f(\sigma)\|}, \quad (17)$$

剪切相关的加载方向(m_s)定义为

$$m_s = \frac{8q}{M_c^2 \|D^1 f(\sigma)\|}. \quad (18)$$

式中, $\|D^1 f(\sigma)\|$ 为梯度, 定义为

$$\|D^1 f(\sigma)\| = \sqrt{[D^1 f(\sigma)]^T D^1 f(\sigma)} \quad (19)$$

3.2 塑性流动方向

此外, 塑性流动方向 n 表达式为

$$n = [n_v, n_s]^T \quad (20)$$

这里, 压缩相关的流动方向 (n_v) 定义为

$$n_v = \frac{8(p')^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha) \|D^\alpha f(\sigma)\|} \left[\frac{\alpha p'}{2} - \frac{(2-\alpha)}{2p'} \left(\frac{q}{M_c} \right)^2 \right], \quad (21)$$

剪切相关的流动方向 (n_s) 定义为

$$n_s = \frac{8q^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha) M_c^2 \|D^\alpha f(\sigma)\|} \quad (22)$$

$\|D^\alpha f(\sigma)\|$ 为分数阶梯度, 定义为

$$\|D^\alpha f(\sigma)\| = \sqrt{[D^\alpha f(\sigma)]^T D^\alpha f(\sigma)} \quad (23)$$

由于砂土加载过程中, 塑性流动方向随着状态参数变化而变化, α 因此与 ψ 关联如下:

$$\alpha = e^{\beta\psi}, \quad (24)$$

其中, β 为材料常数, 其表征了土体的塑性流动向, 其大小决定了土体非关联流动的程度。在传统塑性力学中, 这一物理特性是由额外假定塑性势面完成; 而这里, 是通过参数 β 来完成。

4 塑性模量

塑性模量 Π 可以定义为^[10]

$$\Pi = hG \frac{\eta - \eta_p}{\eta} e^{k\psi}, \quad (25)$$

式中, $\eta = q/p'$ 为当前应力比, k 为材料常数, h 为硬化参数,

$$h = h_1 - h_2\psi_0, \quad (26)$$

其中, ψ_0 初始状态参数,

$$\psi_0 = e_0 - e_c, \quad (27)$$

η_p 为峰值应力比,

$$\eta_p = M_c e^{-k\psi} \quad (28)$$

需要指出的是, 所提出塑性模量只适应于静力加载条件, 对于土体的动力行为建模, 需要额外假定卸载再加载的硬化模量, 来使得模型可以描述卸载再加载时的硬化软化行为。

5 模型参数与验证

5.1 模型参数

本文模型总共有 10 个参数 ($M_c, \lambda, e_r, \xi, \beta, h_1, h_2, k, G_0, \nu$), 其中 9 个参数均来自传统弹塑性模型, 仅有一个额外参数 β 用来描述砂土状态依赖的分数阶塑性流动。这些参数均可以通过常规三轴试验获得。具体确定方法和顺序如下:

(1) 首先, 4 个临界状态参数 (M_c, λ, e_r, ξ) 可以通过拟合试样在不同围压和孔隙比条件下的临界状态点来确定。 M_c 由临界状态线在 $p'-q$ 平面上的斜率确定; λ, e_r 以及 ξ 由临界状态线在平面的斜率和坐标轴截距得到。具体的步骤可以参见文献[8, 23]。

(2) 然后, 分数阶参数 β 可以由砂土在状态转换点的应力和状态参数值确定:

$$\beta = \frac{1}{\psi_d} \ln \frac{2}{1 + (M_c/\eta_d)^2}, \quad (29)$$

式中, ψ_d 和 η_d 分别为状态转换点时的状态参数和应力比。其次, 也可通过以更好的模型预测为目标的试算来确定。

(3) 接着, 材料参数 k 可以通过试样的峰值应力点来确定。在峰值应力点时, 塑性模量 $\Pi = 0$, 因此, 由式 (25) 可得^[10]

$$k = \frac{1}{\psi_p} \ln \frac{M_c}{\eta_p}, \quad (30)$$

式中, ψ_p 为试样峰值应力点时刻的状态参数。

(4) 此外, 弹性常数 G_0 可以通过分析试样在轴向应变 $\varepsilon_l < 0.2\%$ 时的应力应变关系, 联系式 (6) 可得^[13]

$$G_0 = \frac{(1+e)G}{(2.97-e)^2 \sqrt{p'p_a}} \quad (31)$$

(5) 其次, 泊松比 ν 描述土体的侧向变形能力, 可以通过分析三轴试验的剪应变和体积应变数据, 由下式确定^[12]:

$$\nu \approx \frac{3\varepsilon_s - 2\varepsilon_v}{6\varepsilon_s + 2\varepsilon_v} \quad (32)$$

(6) 最后, 硬化参数 h_1 和 h_2 可以通过拟合试样在不同初始状态下的 $\varepsilon_l - q$ 关系曲线得到。首先运用 h 对不同 ψ_0 条件下的应力应变曲线进行拟合, 然后通过线性拟合 h 和 ψ_0 的关系来确定 h_1 和 h_2 。详细过程可以参见文献[8]。

5.2 模型验证

为了验证本文所提出模型, 选取 3 种不同砂土的三轴试验结果进行拟合和对比, 如图 2~7 所示。需要指出的是: 图中试验结果采用离散的点来表示, 而模型预测采用连续的线来描述。此外, 所有模型参数均根据上述过程确定, 具体参见表 1。

图 2 所示为 Sacramento 河砂^[1]的三轴排水试验结果, 试样的特性和制备过程参见文献[1], 这里不再赘述。试样在不同的 σ'_3 和 e_0 条件下进行固结、剪切。其中, 模型在预测 $\sigma'_3 = 92, 196, 442$ kPa 时 e_0 为 0.87, $\sigma'_3 = 1241$ kPa 时的 e_0 为 0.85。由图可知, 模型可以较好地预测 Sacramento 河砂在不同 σ'_3 和 e_0 条件下的排水应力应变行为; 试样在低 σ'_3 下的剪胀和高 σ'_3 下的剪缩均可以较好地模拟。

表1 模型参数

Table 1 Model parameters

砂土	G_0	ν	M_c	λ	e_r	ξ	β	k	h_1	h_2
Sacramento 河砂 ^[1]	120	0.30	1.40	0.012	0.911	0.7	0.08	3.45	0.65	15.74
Toyoura 砂 ^[2]	125	0.05	1.25	0.019	0.934	0.7	0.41	20	0.17	1.27
Fuji 河砂 ^[3]	90	0.30	1.48	0.033	0.810	0.7	0.05	3.91	0.60	1.20

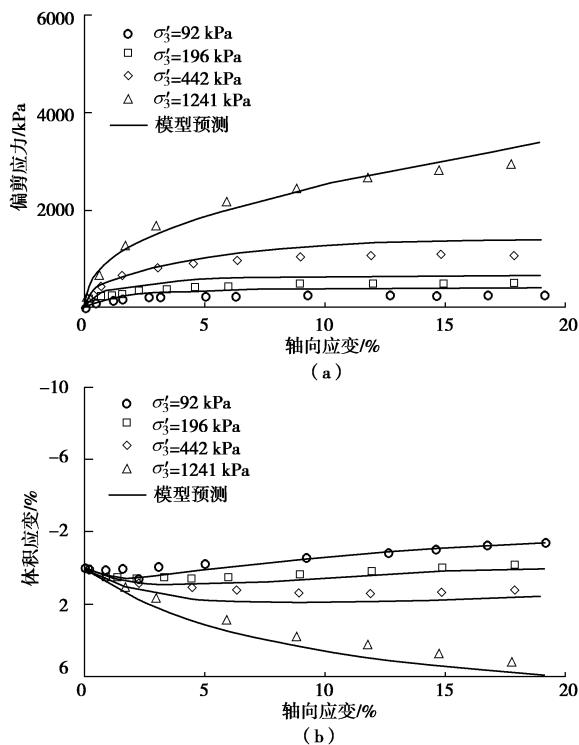
图2 Sacramento 河砂^[1]排水试验的模型预测

Fig. 2 Model predictions of drained behavior of Sacramento River sand^[1]

图3所示为Sacramento河砂^[1]的三轴不排水试验结果。其中, σ'_3 为98, 294, 490 kPa时, e_0 为0.86, σ'_3 为1069 kPa时, e_0 为0.85。分析图可见, 模型也可以对Sacramento河砂在不排水条件下的应力应变行为进行较好预测。对不同 σ'_3 下的应力路径可以合理地模拟, 偏应力随着加载不断增加, 平均有效主应力则逐步减小, 达到临界状态后又迅速增加。

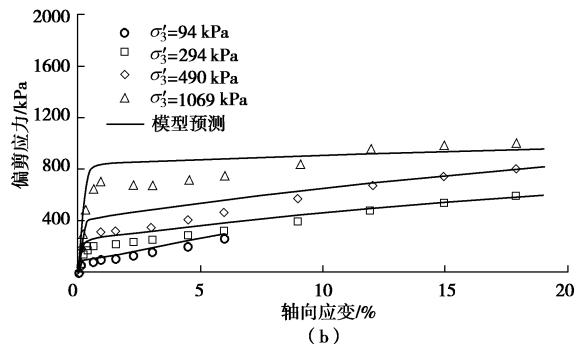
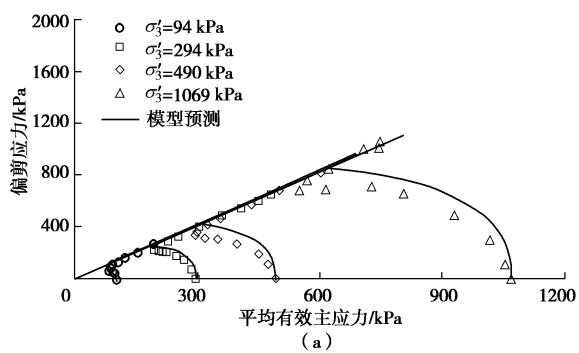
图3 Sacramento 河砂^[1]不排水试验的模型预测

Fig. 3 Model predictions of undrained behavior of Sacramento River sand^[1]

图4, 5所示为所提出模型对不同密度的Toyoura砂^[2]在不排水条件下试验结果的预测。试样的特性和制备过程参见文献[2]。图4为Toyoura密砂($e_0=0.735$)在不同 σ'_3 下的应力应变特性, 分析发现, 模型可以对砂土的不排水应力路径以及偏应力-轴向应变关系进行较好地模拟。图5为模型对Toyoura中密砂($e_0=0.833$)在不同 σ'_3 下试验结果的模拟。分析发现, 模型可以对其在高 σ'_3 下的部分液化以及低 σ'_3 下的临界流动进行合理地预测。需要指出的是, 模型高估了中密Toyoura砂在围压3 MPa时的强度特性。这是因为模型临界状态线过屈服面顶点。因此, 无法较好模拟高围压不排水条件下, 砂土在进入临界状态前达到强度峰值的特性。

图6所示为Fuji河砂^[3]在三轴排水条件下的试验结果, 试样的特性和制备过程参见[3], 这里不再赘述。试样在不同的 σ'_3 和 e_0 条件下进行固结、剪切。其中, 模型在预测 $\sigma'_3=98, 196, 294$ kPa时输入的 e_0 分别为0.75, 0.747, 0.751。分析图可知, 模型可以很好地预测Fuji河砂在不同 σ'_3 和 e_0 条件下的排水应力应变行为; 试样在低 σ'_3 下的剪胀和高 σ'_3 下的剪缩均可以合理地模拟。

图7所示为模型对Fuji河砂^[3]三轴不排水试验结果的模拟。其中, σ'_3 在98, 196, 294 kPa时的 e_0 分别为0.74, 0.731, 0.718。分析图可知, 模型也可以对Fuji河砂在不排水条件下的本构行为进行合理地预测。模型可以预测偏应力的不断增长, 以及平均主应

力的减小, 直到达到临界流动状态。需要指出的是, 模型高估了 Fuji River 砂在高围压时的强度特性。这是因为模型采用了椭圆形的修正剑桥屈服面; 从而, 可能会高估低孔隙比高围压下, 砂土初始加载阶段的有效应力增加。

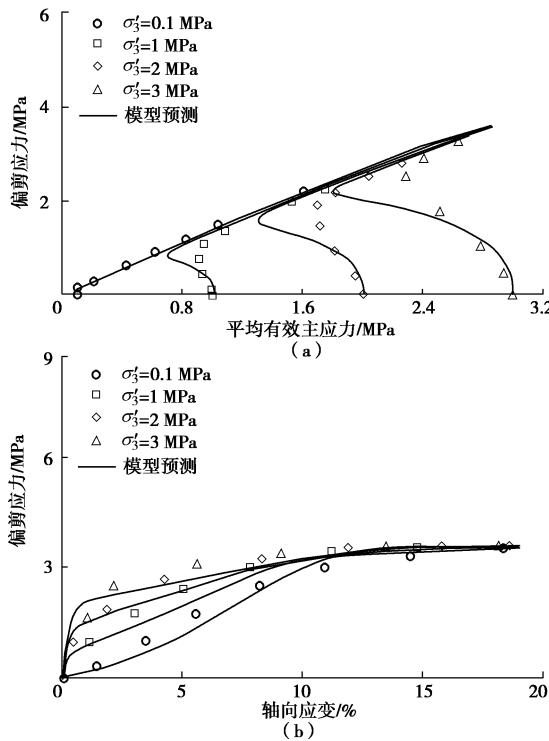


图 4 Toyoura 密砂^[2]不排水试验的模型预测

Fig. 4 Model predictions of undrained behavior of dense Toyoura sand^[2]

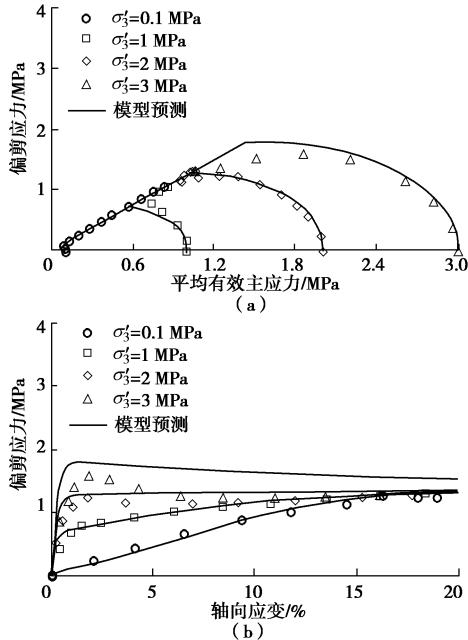


图 5 Toyoura 中密砂^[2]不排水试验的模型预测

Fig. 5 Model predictions of undrained behavior of medium dense Toyoura sand^[2]

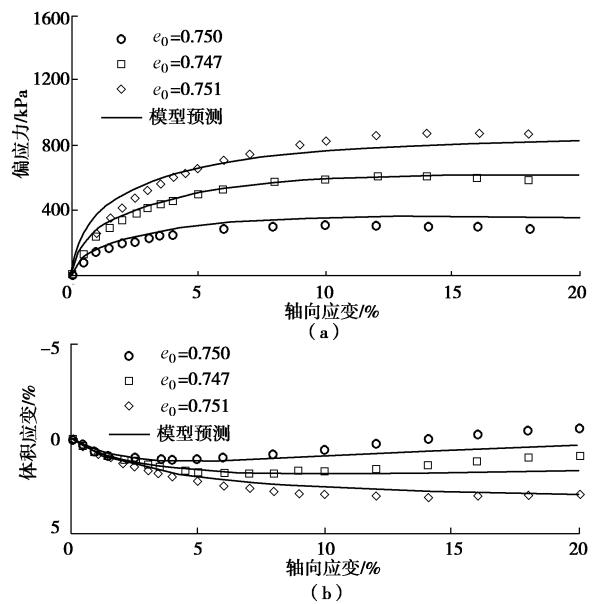


图 6 Fuji 河砂^[3]排水试验的模型预测

Fig. 6 Model predictions of drained behavior of Fuji River sand^[3]

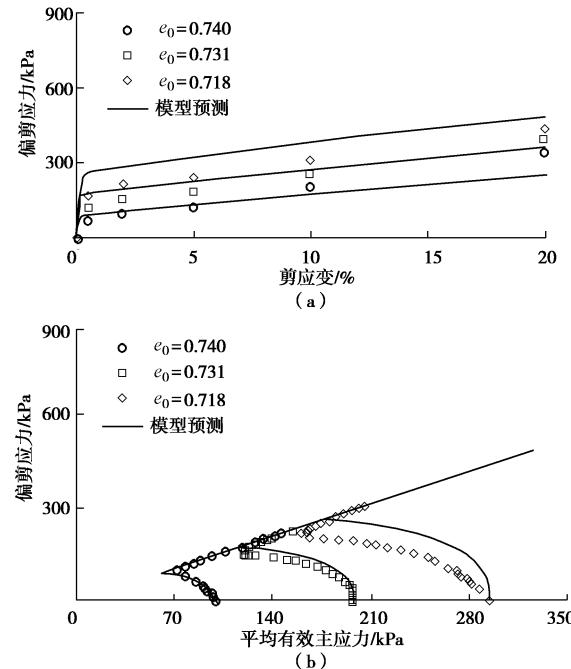


图 7 Fuji 河砂^[3]不排水试验的模型预测

Fig. 7 Model predictions of undrained behavior of Fuji River sand^[3]

6 结 论

本文首先介绍了分数阶塑性力学的基本知识; 然后, 利用其对砂土状态依赖的非关联流动应力应变行为进行了建模; 并对模型参数的获取进行了详细介绍; 最后, 通过 3 种不同砂土的排水与不排水试验数据对所提出的弹塑性分数阶本构模型进行了验证。初步结论与建议如下:

- (1) 模型无需额外假定塑性势面, 对屈服面进行分数阶微分既可以得到非关联的流动法则。
- (2) 由于分数阶微分从定义上即考虑了土体加载历史和自身状态对其流动特性的影响, 因而分数阶塑性流动法则可以更好的描述土体的非关联流动。
- (3) 模型参数仅有 10 个参数, 均可以通过常规三轴试验获得; 模型可以较好地预测土体的状态依赖应力应变特性。
- (4) 模型还有待于推广到一般三维应力条件以及动载条件下。

参考文献:

- [1] LEE K L, SEED H B. Drained strength characteristics of sands[J]. Journal of Soil Mechanics and Foundation Divison, ASCE, 1967, **93**(6): 117 - 141.
- [2] VERDUGO R, ISHIHARA K. The steady state of sandy soils[J]. Soils and Foundations, 1996, **36**(2): 81 - 91.
- [3] ISHIHARA K, TATSUOKA F, YASUDA S. Undrained deformation and liquefaction of sand under cyclic stresses[J]. Soils and Foundations, 1975, **15**(1): 29 - 44.
- [4] DOANH T, HOANG M T, ROUX J N, et al. Stick-slip behaviour of model granular materials in drained triaxial compression[J]. Granular Matter, 2013, **15**(1): 1 - 23.
- [5] BEEN K, JEFFERIES M G. A state parameter for sands[J]. Géotechnique, 1985, **22**(6): 99 - 112.
- [6] MUIR WOOD D, BELKHEIR K, LIU D. Strain softening and state parameter for sand modelling[J]. Géotechnique, 1994, **44**(2): 335 - 339.
- [7] LI X. A sand model with state-dependent dilatancy[J]. Géotechnique, 2002, **52**(3): 173 - 186.
- [8] SUN Y, SHEN Y. Constitutive model of granular soils using fractional order plastic flow rule[J]. International Journal of Geomechanics, ASCE, 2017, 04017025.
- [9] SUN Y, XIAO Y. Fractional order model for granular soils under drained cyclic loading[J]. International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2017, **41**(4): 555-577.
- [10] LI X, DAFALIAS Y. Dilatancy for cohesionless soils[J]. Géotechnique, 2000, **50**(4): 449 - 460.
- [11] RUSSELL A R, KHALILI N. A bounding surface plasticity model for sands exhibiting particle crushing[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2004, **41**(6): 1179 - 1192.
- [12] XIAO Y, LIU H, CHEN Y, et al. State-dependent constitutive model for rockfill materials[J]. International Journal of Geomechanics, ASCE, 2014, **15**(5): 04014075.
- [13] XIAO Y, LIU H, CHEN Y, JIANG J. Bounding surface model for rockfill materials dependent on density and pressure under triaxial stress conditions[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 2014, **140**(4): 04014002.
- [14] YANG J, LI X. State-dependent strength of sands from the perspective of unified modeling[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2004, **130**(2): 186 - 198.
- [15] SUN Y, XIAO Y. Fractional order plasticity model for granular soils subjected to monotonic triaxial compression[J]. International Journal of Solids and Structures, 2017, **118/119**: 224 - 234.
- [16] DAFALIAS Y F, TAIEBAT M. SANISAND-Z: zero elastic range sand plasticity model[J]. Géotechnique, 2016, **66**(12): 999 - 1013.
- [17] PASTOR M, ZIENKIEWICZ O C, CHAN A H C. Generalized plasticity and the modelling of soil behaviour[J]. International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1990, **14**(3): 151 - 190.
- [18] DAFALIAS Y F. Bounding surface plasticity I: mathematical foundation and hypoplasticity[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1986, **112**(9): 966 - 987.
- [19] SUMELKA W. A note on non-associated Drucker-Prager plastic flow in terms of fractional calculus[J]. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2014, **52**(2): 571 - 574.
- [20] 李广信. 土的清华弹塑性模型及其发展[J]. 岩土工程学报, 2006, **28**(1): 1 - 10. (LI Guang-xin. Characteristics and development of tsinghua elasto-plastic model for soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, **28**(1): 1 - 10. (in Chinese))
- [21] YIN D, WU H, CHENG C, et al. Fractional order constitutive model of geomaterials under the condition of triaxial test[J]. International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2013, **37**(8): 961 - 972.
- [22] PODLUBNY I. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications[M]. San Diego: Academic Press, 1998.
- [23] LI X, WANG Y. Linear representation of steady-state line for sand[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 1998, **124**(12): 1215 - 1217.
- [24] SCHOFIELD A, WROTH P. Critical state soil mechanics[M]. London: McGraw-Hill, 1968.