DOI：10.11779/CJGE201808011

横观各向同性岩石弹塑性本构模型与参数求解方法研究

王者超[1, 2]，宗 智[1]，乔丽苹[2]，李术才[1]，李 崴[1]

（1. 山东大学岩土与结构工程研究中心，山东 济南 250061；2. 东北大学深部金属矿山安全开采教育部重点实验室，辽宁 沈阳 110004）

摘 要：地层中普遍存在层理状岩石，这些岩石细观结构具有显著的方向性，从而引起了其变形与强度具有横观各向同性。采用弹性力学与广义塑性力学基本理论，建立了岩石横观各向同性弹塑性本构模型：弹性部分采用广义胡克定律描述，塑性部分采用基于广义八面体剪应力的屈服准则和势函数、非关联流动法则和应变硬化准则描述。该模型屈服面为外凸的非等截距椭圆截面角锥体，在各向同性条件下可退化为米塞斯屈服准则。提出了模型参数求解方法：弹性参数采用三轴压缩和扭转试验联合求解；塑性参数采用不同层理方向试样的三轴压缩试验求解。以炭质板岩为例，验证了所提出的横观各向同性弹塑性模型和参数求解方法，验证结果表明所提模型较好地反映了岩石的横观各向同性，参数求解方法简单有效。此外，还根据试验数据分析了炭质板岩塑性势方向性和弹塑性参数耦合特征。研究成果将为丰富岩石力学基本理论和解决相关工程问题提供理论基础。

关键词：炭质板岩；横观各向同性；弹塑性模型；模型参数；屈服准则；流动法则；硬化准则；参数耦合

中图分类号：TU45 **文献标识码**：A **文章编号**：1000－4548(2018)08－1457－09

作者简介：王者超(1980－)，男，山东高唐人，博士，教授，博士生导师，主要从事岩土材料流变与渗流特性的研究工作。E-mail: wang_zhechao@hotmail.com。

Elastoplastic constitutive model and parameter determination for transversely isotropic rocks

WANG Zhe-chao[1, 2], ZONG Zhi[1], QIAO Li-ping[2], LI Shu-cai[1], LI Wei[1]

(1. Geotechnical and Structural Engineering Research Center, Shandong University, Jinan 250061, China; 2 Key Laboratory of Ministry of Education on Safe Mining of Deep Metal Mines, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: Layered rocks are widely distributed in formations. The macro-structure of the layered rocks is characterized with transversely isotropy, which will induce the transverse isotropy in deformation and strength. Based on the basic theory of elasticity and generalized plastic mechanics, an elastoplastic constitutive model for transversely isotropic rock is proposed. In the model, the generalized Hooke's law is adopted for the elastic behavior. For the plastic behavior, the yield criterion and potential function formulated as a function of the generalized octahedral shear stress, the non-associated flow rule and the stress-dependent hardening criterion are used. The yield surface of the model is convex with non-equal intercept elliptical cross-section pyramid, which can be simplified under isotropic condition as that for the Mises yield criterion. A method for determination of the model parameters is proposed, that is, the elastic parameters are obtained by combining the triaxial compression tests with a torsion test. The plastic parameters are obtained by using the triaxial compression tests on samples with different bedding directions. Taking the carbonaceous slate as an example, the proposed transversely isotropic elastic-plastic model and the parameter determination method are verified. The results show that the proposed model can reflect the transversal isotropy of the rock well, and the parameter determination method is simple and effective. The direction of plastic potential and the coupling between elastic and plastic behaviors of carbonaceous slate are also discussed according to the test data. This research provides a theoretical basis for enriching the basic theory of rock mechanics and solving engineering problems.

Key words: carbonaceous slate; transverse isotropy; elastoplastic model; model parameter; yielding criterion; flow rule; hardening criterion; parameter coupling

0 引 言

各向异性岩石在自然界中普遍存在[1]，自然界中

基金项目：国家自然科学基金项目（51779045，51579141，51511140290）；高等学校创新引智计划项目（B17009）
收稿日期：2017－07－17

变质岩和沉积岩等都有固有的或结构的各向异性。层状岩体在层理面内性质相近，可以视为横观各向同性，试验数据表明许多层状岩石层理面内与垂直于层里面弹性模量比值约为 1.5 倍[2]，变形与强度参数在不同方向上差异明显[3]。由于层状岩体广泛分布，在工程建设过程中经常遇到层状岩体[3]，建立符合层状岩体的本构模型具有十分重要意义。

岩石横观各向同性弹性方面研究较多，主要是基于广义胡克定律的横观各向同性弹性本构方程求解弹性参数和层状岩体中隧道应力场和位移场分布。刘运思等[4]利用几组不同层理试样进行单轴试验求解弹性参数，段靓靓等[5]用单轴压缩试验和巴西劈裂试验求解弹性参数，Chou 等[6]用巴西劈裂试验和数值计算相结合的方法求解弹性参数，Talesnick 等[7]仅使用一个薄壁空心圆柱试样求解横观各向同性弹性参数。卢应发等[8]对横观各向同性地质材料弹性张量进行了求解，许多学者还对横观各向同性岩体中隧道应力和位移解析解进行了研究[9-12]。

常用的岩土塑性模型例如 Mohr-Coulomb、Drucker-Prager、Cam-clay 等都只能描述岩土试样各向同性，不适用于各向异性性质。岩石横观各向同性塑性方面研究较少，王永刚等[13]以 Drucker-Prager 准则为基础，考虑结构面夹角和岩体力学性质建立了层状岩体的本构模型，Long 等[14]用张量函数研究了应变空间下横观各向同性塑性本构模型，并采用纤维增强的复合材料进行试验验证。徐磊等[15]将工程中常用的各向同性 Drucker-Prager 强度准则推广到层状岩体中建立各向异性弹塑性本构模型。以往研究多研究强度屈服且以夹角为变量屈服准则，对塑性势研究不多，在解决三维问题时应用较为困难。因此，针对岩石横观各向同性塑性模型复杂，参数多，模型参数难以求解等问题，有必要进行进一步研究。

本文采用弹性力学与广义塑性力学基本理论，建立了岩石横观各向同性弹塑性本构模型：弹性部分采用广义胡克定律描述，塑性部分采用基于广义八面体剪应力的屈服准则和势函数、非关联流动法则和应变硬化准则描述。该模型屈服面为外凸的非等截距椭圆截面角锥体，在各向同性条件下可退化为米塞斯屈服准则。还提出了模型参数求解方法：弹性参数采用三轴压缩和扭转试验联合求解；塑性参数采用不同层理方向试样的三轴压缩试验求解。以炭质板岩为例，验证了所提出的横观各向同性弹塑性模型和参数求解方法，验证结果表明所提模型较好地反映了岩石的横观各向同性，参数求解方法简单有效。此外，还根据试验数据分析了炭质板岩塑性势方向性和弹塑性参数耦合特征。

1 横观各向同性弹塑性本构模型

1.1 弹性本构模型

对于弹性部分，岩土材料的横观各向同性研究一般利用广义胡克定律，其中应变增量是应力增量的线性函数，横观各向同性弹性本构方程如下[16]：

$$\begin{bmatrix}\Delta\varepsilon_x\\ \Delta\varepsilon_y\\ \Delta\varepsilon_z\\ \Delta\gamma_{yz}\\ \Delta\gamma_{zx}\\ \Delta\gamma_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{E_h} & -\frac{\nu_{hh}}{E_h} & -\frac{\nu_{vh}}{E_v} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\nu_{hh}}{E_h} & \frac{1}{E_h} & -\frac{\nu_{vh}}{E_v} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\nu_{vh}}{E_v} & -\frac{\nu_{vh}}{E_v} & \frac{1}{E_v} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{vh}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{vh}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{hh})}{E_h}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\sigma_x\\ \Delta\sigma_y\\ \Delta\sigma_z\\ \Delta\tau_{yz}\\ \Delta\tau_{zx}\\ \Delta\tau_{xy}\end{bmatrix}。\tag{1}$$

式中 E_v 为垂直于各向同性平面的弹性模量；E_h 为平行于各向同性平面的弹性模量；ν_{vh} 为施加垂直应变引起水平应变的泊松比；ν_{hh} 为各向同性平面内的泊松比；G_{vh} 为垂直于各向同性平面的剪切模量；$\Delta\varepsilon$ 为应变增量；$\Delta\sigma$ 为正应力增量；$\Delta\gamma$ 为切应变增量，$\Delta\tau$ 为切应力增量。

1.2 塑性本构模型

塑性部分本构模型由三部分组成，分别为屈服准则、流动法则和硬化准则。其中屈服准则用来判断何时屈服，流动法则用来反映塑性流动方向，硬化准则决定应力增量引起塑性应变增量大小。

（1）屈服准则

目前岩土材料常用的屈服准则有 Mohr-Coulomb、Drucker-Prager、Cam-clay，其特点为参数少，物理意义明确，但不能反映材料性质的方向性。Hill[16]在研究金属材料的各向异性时，基于米塞斯屈服准则提出了金属材料的各向异性屈服准则，该准则与米塞斯准则相比，在八面体剪应力各分量前增加了系数，由系数之间关系反映材料在不同方向屈服应力不同。Hill[16]提出的各向异性材料的屈服函数可以表示为

$$g(\sigma)=[F(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+G(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+H(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+2L\sigma_{23}^2+2M\sigma_{31}^2+2N\sigma_{12}^2]^{\frac{1}{2}}，\tag{2}$$

式中，F，G，H，L，M，N 为模型参数。

大量试验证实岩土材料屈服不仅与剪应力相关，还与平均主应力相关，因此，为描述各向异性岩土材料的屈服条件，将式（2）扩展为

$$g(\sigma)=[F(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+G(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+H(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+2L\sigma_{23}^2+2M\sigma_{31}^2+2N\sigma_{12}^2]^{\frac{1}{2}}-\beta I_1+D\ ,\tag{3}$$

式中，β 为剪胀角，D 为与屈服相关的黏聚力，I_1 为应力张量第一不变量。

而对于具有横观各向同性的岩石而言，假设 σ_{11} 和 σ_{22} 所在的平面为各向同性平面，如图 1 所示，则 $F=G$，式（3）可以简化为

$$g(\sigma)=[F(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+F(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+H(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+2L\sigma_{23}^2+2M\sigma_{31}^2+2N\sigma_{12}^2]^{\frac{1}{2}}-\beta I_1+D\ 。\tag{4}$$

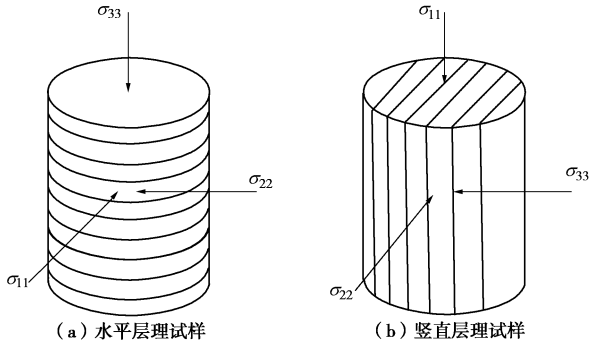

图 1 应力方向与层理面关系

Fig. 1 Relationship between stress direction and bedding plane

传统塑性力学中，屈服面写成 3 个不变量的函数，而不写成 6 个应力分量的函数，这就忽略了应力增量中 3 个剪应力增量 $\mathrm{d}\tau$ 所引起的塑性变形。即传统塑性位势理论中，不考虑应力主轴旋转，假设应力主轴始终与应力增量主轴共轴，只有 $\mathrm{d}\sigma_1$，$\mathrm{d}\sigma_2$，$\mathrm{d}\sigma_3$，而 $\mathrm{d}\tau_{12}=\mathrm{d}\tau_{23}=\mathrm{d}\tau_{13}=0$，则式（4）简化为式（5）。式（5）为岩石横观各向同性塑性本构屈服函数表达式。该模型的屈服面为一个外凸的非等截距椭圆截面的角锥体表面，具有对称性，其在 π 平面上的投影如图 2 所示，当 $F=H=1$ 时，模型退化为广义米塞斯条件。

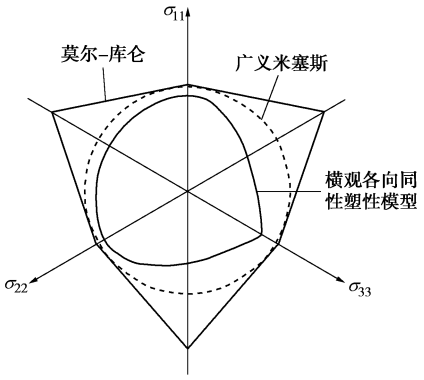

图 2 各屈服面准则在 π 平面上的屈服曲线

Fig. 2 Yield curves of yield criterion in π plane

$$g(\sigma)=\sqrt{F(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+F(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+H(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2}-\beta I_1+D\ 。\tag{5}$$

（2）流动法则

流动法则用来反映塑性流动方向，一般地，

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}=\mathrm{d}\lambda\frac{\partial f(\sigma)}{\partial\sigma_{ij}}\ ,\tag{6}$$

式中，$\mathrm{d}\lambda$ 为塑性因子，f 为势函数。若 $f=g$，由此所得的塑性应力－应变关系通常称为与加载条件相关联的流动法则，若 $f\neq g$，即屈服面与塑性应变增量不正交，则其相应的塑性应力－应变关系称为非关联流动法则[17]。根据广义塑性力学知识，岩土材料一般 $f\neq g$，因此，势函数可表示为

$$f(\sigma)=\sqrt{F(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+F(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+H(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2}-\alpha I_1\ ,\tag{7}$$

式中，$\alpha=\dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3+\sin^2\varphi}}$，$\varphi$ 为内摩擦角。

（3）硬化准则

硬化准则决定应力增量引起塑性应变增量大小。由于塑性应变反映了加载历史影响，因此应变硬化准则可以描述复杂加卸载条件下岩土材料性质[18]。本文采用平均体应变作为硬化参量。

2　模型参数求解方法

2.1　弹性参数

（1）水平层理试样求解 E_{v}，ν_{vh}

对于水平层理，见图 3（a），层理面内力学性质相同，常规三轴压缩试验时水平面应力也相同，则有 $\Delta\sigma_x=\Delta\sigma_y=\Delta\sigma_{\mathrm{h}}$ 和 $\Delta\varepsilon_x=\Delta\varepsilon_y=\Delta\varepsilon_{\mathrm{h}}$，其中 $\Delta\sigma_{\mathrm{h}}$，$\Delta\varepsilon_{\mathrm{h}}$ 分别表示层理面内应力和应变的变化量，再将 $\Delta\sigma_z$ 用 $\Delta\sigma_v$ 表示，$\Delta\varepsilon_z$ 用 $\Delta\varepsilon_v$ 表示，则在图 3（a）所示坐标系下，水平层理试样本构方程由式（1）可简化为

$$\begin{bmatrix}\Delta\varepsilon_{\mathrm{v}}\\ \Delta\varepsilon_{\mathrm{h}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{E_{\mathrm{v}}} & -\dfrac{2\nu_{\mathrm{vh}}}{E_{\mathrm{v}}}\\ -\dfrac{\nu_{\mathrm{vh}}}{E_{\mathrm{v}}} & \dfrac{(1-\nu_{\mathrm{hh}})}{E_{\mathrm{h}}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\sigma_{\mathrm{v}}\\ \Delta\sigma_{\mathrm{h}}\end{bmatrix}\ 。\tag{8}$$

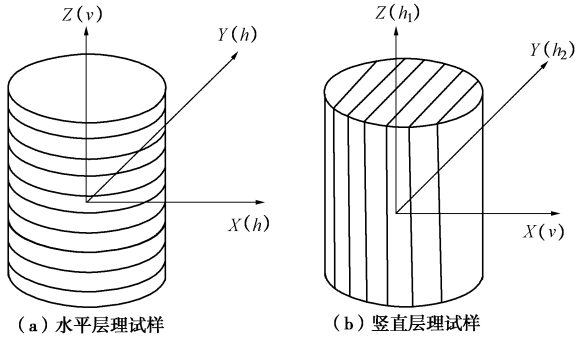

图 3 应力方向与层理面关系

Fig. 3 Relationship between bedding plane and coordinate system

常规三轴压缩试验时围压不变，即 $\Delta\sigma_{\mathrm{h}}=0$，利用方程（8）可以求得

$$E_{\mathrm{v}}=\frac{\Delta\sigma_{\mathrm{v}}}{\Delta\varepsilon_{\mathrm{v}}}\quad, \tag{9}$$

$$\nu_{\mathrm{vh}}=-\frac{\Delta\varepsilon_{\mathrm{h}}}{\Delta\varepsilon_{\mathrm{v}}}\quad。 \tag{10}$$

（2）竖直层理试样求解 E_{h}，ν_{hh}

对于竖直层理，在图 1（b）所示坐标系下，横观各向同性弹性本构方程变为

$$\begin{bmatrix}\Delta\varepsilon_{\mathrm{v}}\\ \Delta\varepsilon_{\mathrm{h_2}}\\ \Delta\varepsilon_{\mathrm{h_1}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{E_{\mathrm{v}}} & -\frac{\nu_{\mathrm{vh}}}{E_{\mathrm{v}}} & -\frac{\nu_{\mathrm{vh}}}{E_{\mathrm{v}}}\\ -\frac{\nu_{\mathrm{vh}}}{E_{\mathrm{v}}} & \frac{1}{E_{\mathrm{h}}} & -\frac{\nu_{\mathrm{hh}}}{E_{\mathrm{h}}}\\ -\frac{\nu_{\mathrm{vh}}}{E_{\mathrm{v}}} & -\frac{\nu_{\mathrm{hh}}}{E_{\mathrm{h}}} & \frac{1}{E_{\mathrm{h}}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\sigma_{\mathrm{v}}\\ \Delta\sigma_{\mathrm{h_2}}\\ \Delta\sigma_{\mathrm{h_1}}\end{bmatrix}\quad。 \tag{11}$$

试验时围压不变，即 $\Delta\sigma_{\mathrm{v}}=\Delta\sigma_{\mathrm{h_2}}=0$，则利用式（11）可以求得

$$E_{\mathrm{h}}=\frac{\Delta\sigma_{\mathrm{h_1}}}{\Delta\varepsilon_{\mathrm{h_1}}}\quad, \tag{12}$$

$$\nu_{\mathrm{hh}}=-\frac{\Delta\varepsilon_{\mathrm{h_2}}}{\Delta\varepsilon_{\mathrm{h_1}}}\quad。 \tag{13}$$

采用图 3（b）所示标准圆柱试样做常规三轴压缩试验时，不能分别测得 $\varepsilon_{\mathrm{h_2}}$ 和 ε_{v}，只能测得径向应变 ε_{r}，即常规三轴压缩试验只能测得 $\varepsilon_{\mathrm{h_2}}$ 和 ε_{v} 的均值，则有

$$\Delta\varepsilon_{\mathrm{r}}=(\Delta\varepsilon_{\mathrm{h_2}}+\Delta\varepsilon_{\mathrm{v}})/2\quad。 \tag{14}$$

常规三轴压缩试验时 $\Delta\sigma_{\mathrm{v}}=\Delta\sigma_{\mathrm{h_2}}=0$，通过式（11）可求得

$$\Delta\varepsilon_{\mathrm{v}}=-\frac{\nu_{\mathrm{vh}}}{E_{\mathrm{v}}}\Delta\sigma_{\mathrm{h_1}}\quad。 \tag{15}$$

联立式（14）、（15）可得

$$\Delta\varepsilon_{\mathrm{h_2}}=2\Delta\varepsilon_{\mathrm{r}}+\frac{\nu_{\mathrm{vh}}}{E_{\mathrm{v}}}\Delta\sigma_{\mathrm{h_1}}\quad。 \tag{16}$$

将式（16）代入式（13）可得

$$\nu_{\mathrm{hh}}=-\frac{2\Delta\varepsilon_{\mathrm{r}}}{\Delta\varepsilon_{\mathrm{h_1}}}-\nu_{\mathrm{vh}}\frac{E_{\mathrm{h}}}{E_{\mathrm{v}}}\quad。 \tag{17}$$

即通过水平层理试样求得 E_{v}，ν_{vh}，再联立竖直层理试样，利用式（12）、（17）可以求得 E_{h}，ν_{hh}。

（3）扭转试验求解 G_{vh}

利用材料扭转时剪切胡克定律公式 $\phi=\frac{TL}{I_{\mathrm{p}}G}$ 求解剪切模量 G，有 $G=\frac{TL}{I_{\mathrm{p}}\phi}$，采用各向同性平面为水平的圆柱形试样进行扭转试验可求解 G_{vh}，如图 4 所示，即

$$G_{\mathrm{vh}}=\frac{TL}{I_{\mathrm{p}}\phi}\quad。 \tag{18}$$

式中 G_{vh} 为垂直于各向同性平面的剪切模量；T 为施加的扭矩；L 为试样的长度；ϕ 为扭转角度；I_{P} 为极惯性矩，对于圆截面，$I_{\mathrm{p}}=\frac{\pi d^4}{32}$，其中 d 为直径。由此可以求解 G_{vh}。

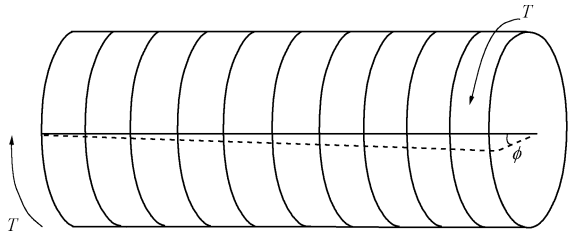

图 4 扭转试验示意图

Fig. 4 Schematic diagram of torsion tests

2.2 塑性参数求解

（1）屈服参数

屈服函数中黏聚力和摩擦角相关的两个参数可通过开展岩石三轴压缩试验，获得不同围压下屈服应力计算得到。

（2）势函数参数

对于水平层理试样，如图 1（a）所示，常规三轴压缩试验中 $\sigma_{11}=\sigma_{22}$，因此，由势函数表达式，即式（7）得

$$\frac{\partial f(\sigma)}{\partial\sigma_{11}}=\frac{\partial f(\sigma)}{\partial\sigma_{22}}=\frac{F}{f(\sigma)}(\sigma_{11}-\sigma_{33})-\alpha\quad, \tag{19}$$

$$\frac{\partial f(\sigma)}{\partial\sigma_{33}}=-\frac{2F}{f(\sigma)}(\sigma_{11}-\sigma_{33})-\alpha\quad。 \tag{20}$$

径向塑性应变增量

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{r}}^{\mathrm{p}}&=\mathrm{d}\varepsilon_{11}^{\mathrm{p}}=\mathrm{d}\varepsilon_{22}^{\mathrm{p}}=\mathrm{d}\lambda\frac{\partial f(\sigma)}{\partial\sigma_{11}}\\&=\mathrm{d}\lambda\left[\frac{F}{f(\sigma)}(\sigma_{11}-\sigma_{33})-\alpha\right]\quad。\end{aligned} \tag{21}$$

轴向塑性应变增量

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{a}}^{\mathrm{P}}&=\mathrm{d}\varepsilon_{33}^{\mathrm{P}}=\mathrm{d}\lambda\frac{\partial f(\sigma)}{\partial\sigma_{33}}\\&=\mathrm{d}\lambda\left[-\frac{2F}{f(\sigma)}(\sigma_{11}-\sigma_{33})-\alpha\right]\quad,\end{aligned} \tag{22}$$

而对于竖直层理试样，如图 1（b）所示，常规三轴压缩试验中 $\sigma_{22}=\sigma_{33}$，因此，有

$$\frac{\partial f(\sigma)}{\partial\sigma_{11}}=\frac{F+H}{f(\sigma)}(\sigma_{11}-\sigma_{33})-\alpha\quad, \tag{23}$$

$$\frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma_{22}} = -\frac{H}{f(\sigma)}(\sigma_{11}-\sigma_{33})-\alpha \quad , \tag{24}$$

$$\frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma_{33}} = -\frac{F}{f(\sigma)}(\sigma_{11}-\sigma_{33})-\alpha \quad , \tag{25}$$

径向塑性应变增量：

$$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{r}}^{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}(\mathrm{d}\varepsilon_{22}^{\mathrm{p}}+\mathrm{d}\varepsilon_{33}^{\mathrm{p}}) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\lambda\frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma_{22}}+\mathrm{d}\lambda\frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma_{33}}\right)$$

$$=\mathrm{d}\lambda\left[-\frac{F+H}{2f(\sigma)}(\sigma_{11}-\sigma_{33})-\alpha\right] \quad 。 \tag{26}$$

轴向塑性应变增量

$$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{a}}^{\mathrm{P}} = \mathrm{d}\varepsilon_{11}^{\mathrm{P}} = \mathrm{d}\lambda\frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma_{11}}$$

$$=\mathrm{d}\lambda\left[\frac{F+H}{f(\sigma)}(\sigma_{11}-\sigma_{33})-\alpha\right] \quad 。 \tag{27}$$

测得岩石内摩擦角 φ，利用试验数据分离出塑性应变，再联立式（21）、（22）、（27）即可求得塑性参数 F，H。

（3）硬化准则参数

如前文所述，屈硬准则可采用函数拟合获得参数，亦可通过指定塑性应变及其对应的应力水平形式实现。本文采用后者方法。

3　试验验证

3.1　试验方法

采用常规三轴压缩试验，试验仪器为 RLW-500 型微机控制岩石三轴试验机，该试验机最大轴向压力为 1000 kN，精度为±1%，最大径向压力为 50 MPa，精度为±2%，最大轴向变形为 10 mm，最大径向变形为 5 mm，精度为±0.5%。

试验试样由木寨岭隧道采集的炭质板岩岩样制作，选取层理发育的炭质板岩岩样制作成直径 50 mm，高度 100 mm 的标准圆柱试样，加工时加工成水平层理和竖直层理两种标准圆柱试样。

选取水平层理和竖直层理明显的炭质板岩标准试样进行常规三轴压缩试验，试验围压为 5 MPa。对于水平层理试样，加载时轴压垂直于层里面，围压平行于层里面，如图 1（a）所示，对于竖直层理试样，加载时轴压平行与层理面，如图 1（b）所示。试验时严格按照岩石三轴试验操作规程将试样放置在仪器中固定后，按 0.05 MPa/s 的加载速率给试样施加围压至 5 MPa，保持围压在试验过程中不变，以 100 N/s 的速率施加轴向偏应力直至试样破坏。试验破坏后的试样照片如图 5 所示。

采用水平层理试样在 K-50 型扭转试样机上开展扭转试验，为使扭转试验机能夹住试样，专门设计制作了一对模具，模具与试样之间用高强度的环氧树脂胶黏接。试验破坏后的试样照片如图 6 所示。

图 5 常规三轴压缩试验破坏后试样

Fig. 5 Samples after conventional triaxial compression tests

图 6　扭转试验破坏后试样

Fig. 6 Samples after torsion tests

3.2　试验结果

图 7 为围压 5 MPa 时水平层理试样的偏应力－轴向应变和偏应力－径向应变关系图，轴向和径向均表现出应变软化现象，试样在偏应力 131 MPa 时发生破坏，试样残余强度为 40 MPa。

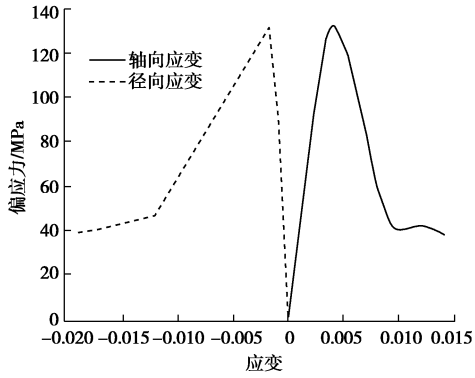

图 7 轴向和径向应变与偏应力关系

Fig. 7 Deviatoric stress versus axial and radial strain relations

图 8 为围压 5 MPa 时竖直层理试样的偏应力－轴向应变和偏应力－径向应变关系图，轴向和径向均表现出显著应变软化现象，试样在偏应力 188 MPa 时发生破坏，残余强度为 56 MPa，对比图 5 可知，竖直层理试样峰值强度和残余强度均高于水平层理试样。本文主要研究水平层理试样和竖直层理试样破坏前阶段

的塑性性质。

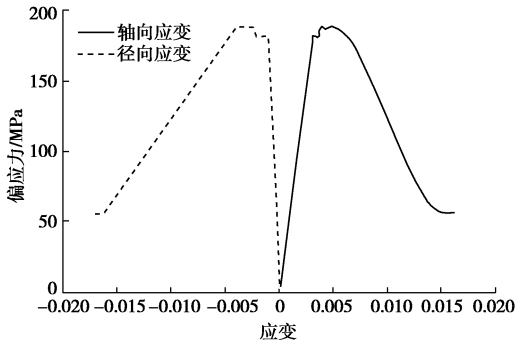

图 8 轴向和径向应变与偏应力关系图

Fig. 8 Deviatoric stress versus axial and radial strain relations

3.3 弹塑性参数

（1）弹性性质

根据上述试验结果，利用式（9）、（10）分别求得 $E_v = 46095$ MPa，$\nu_{vh} = 0.35$，利用式（12）、（13）分别求得 $E_h = 64500$ MPa，$\nu_{hh} = 0.16$，开展水平层理试样扭转试验，利用式（18）求得 $G_{vh} = 18534$ MPa，各向异性比值为 $E_h / E_v = 1.4$，由此可见炭质板岩具有明显的各向异性。所求弹性参数如表 1 所示。

表 1 炭质板岩弹性力学参数

Table 1 Elastic mechanics parameters of carbonaceous slate

E_v / MPa	E_h / MPa	ν_{vh}	ν_{hh}	G_{vh} / MPa
46095	64500	0.35	0.16	18534

（2）塑性参数

塑性应变等于试验测得的应变减去弹性应变，采用表 1 中的弹性参数，利用弹性本构方程式（2）、（5）式可以求解水平层理试样和竖直层理试样各个方向的弹性应变，由此可以分离出试样各个方向的弹性应变和塑性应变。

图 9 为根据试验数据分离出来的水平层理试样偏应力－轴向塑性应变和偏应力径向塑性应变关系图，随着偏应力的增加，轴向塑性应变和径向塑性应变均增大，而且随着偏应力增加，轴向塑性应变和径向塑性应变增长速率也变大。

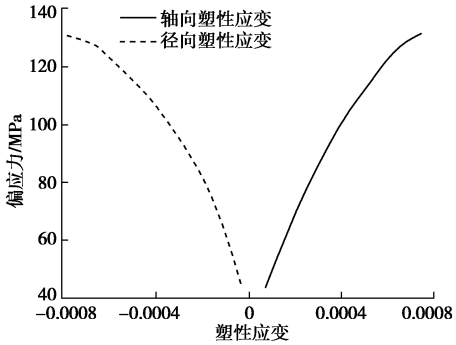

图 9 水平层理试样轴向和径向塑性应变与偏应力关系

Fig. 9 Deviatoric stress versus axial and radial plastic strain relations of horizontal bedding samples

图 10 为试验数据分离出来的竖直层理试样偏应力－轴向塑性应变和偏应力径向塑性应变关系图，径向塑性应变为图 3（b）所示 x、y 方向塑性应变的均值，随着偏应力的增加，轴向塑性应变和径向塑性应变均增大，而且增长速率也变大。在接近试样破坏应力时，轴向塑性应变和径向塑性应变产生迅速的增长，塑性应变的迅速增长使得试样破坏。

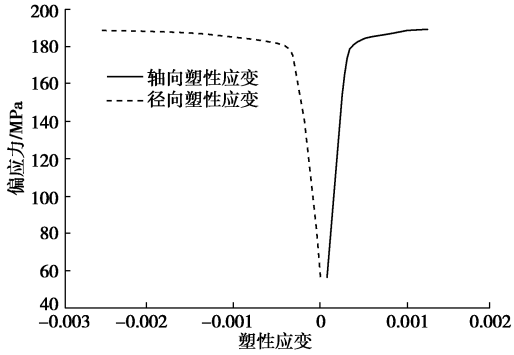

图 10 竖直层理试样轴向和径向塑性应变与偏应力关系

Fig. 10 Deviatoric stress versus axial and radial plastic strain relations of vertical bedding samples

试验测得炭质板岩内摩擦角 φ=32.5°，所以 $\alpha=\dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3+\sin^2\varphi}}=0.17$，利用试验数据分离出的上述塑性应变，再联立式(21)、(22)、(27)，求得 F=0.59，H=0.37，参数比值 F / H=1.6，试样在不同方向上存在明显差异。由此求得炭质板岩塑性本构模型参数如表 2 所示。

表 2 炭质板岩横观各向同性弹塑性参数

Table 2 Transversely isotropic plastic parameters of Carbonaceous slate

β /(°)	D/MPa	α	F	H
21	11	0.17	0.59	0.37

3.4 试验结果与模型预测对比

图 11，12 分别为水平和竖直试样模型预测与试验获得轴向塑性应变和径向塑性应变对比图。图 13，14 分别为水平和竖直试样模型预测与试验轴向应变和径向应变对比图。从图中可知模型预测结果与试验结果能很好地吻合，可以说明现有的模型和参数能较好地描述炭质板岩的横观各向同性。

3.5 讨论

（1）塑性流动方向性

塑性体应变等于轴向塑性应变加两个方向径向塑性应变，试验数据分离的轴向塑性应变为正值，径向塑性应变为负值，正负只表示方向，以压缩为正。从图 15 可知，水平层理试样塑性体应变比竖直层理试样

塑性体应变小很多，随着轴向塑性应变增大，塑性体应变均逐渐增大，而且水平层理试样塑性体应变增长越来越快，竖直层理试样塑性体应变增长趋于稳定。由此可知水平层理试样径向塑性应变的增长速率大于轴向塑性应变增长速率。竖直层理试样径向和轴向塑性应变增长速率相同。

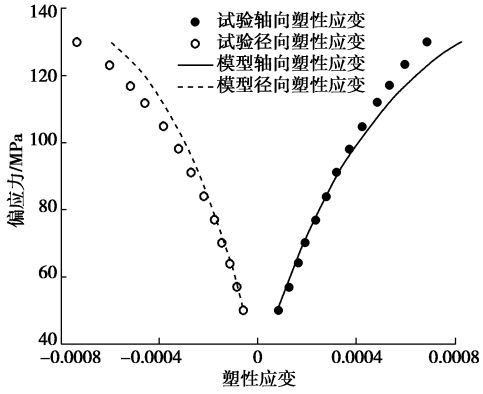

图 11 水平向试样轴向和径向塑性应变与偏应力关系

Fig. 11 Deviatoric stress versus axial and radial plastic strain relations of horizontal bedding samples

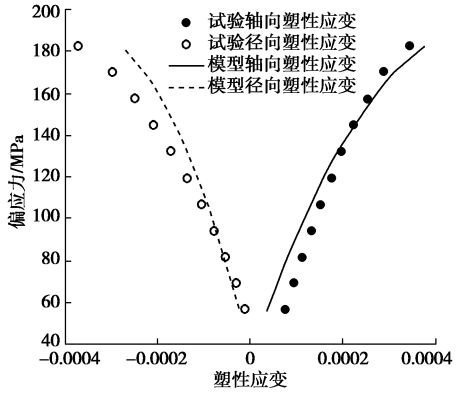

图 12 竖直向试样轴向和径向塑性应变与偏应力关系

Fig. 12 Deviatoric stress versus axial and radial plastic strain relations of vertical bedding samples

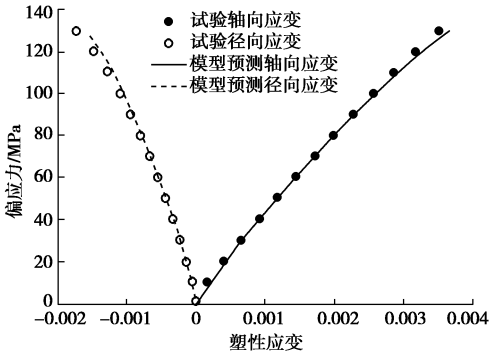

图 13 水平向试样轴向和径向应变与偏应力关系图

Fig. 13 Deviatoric stress versus axial and radial strain relations of horizontal bedding samples

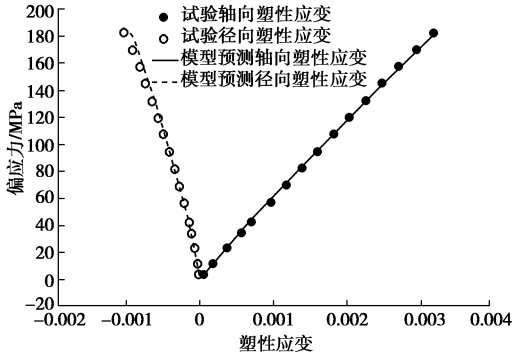

图 14 竖直向试样轴向和径向应变与偏应力关系

Fig. 14 Deviatoric stress versus axial and radial strain relations of vertical bedding sample

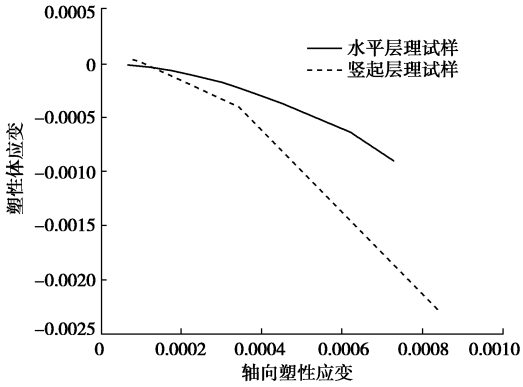

图 15 塑性体应变－轴向塑性应变关系图

Fig. 15 Volumetric plastic strain versus axial plastic strain relations

图 16 为偏应力－平均主应力空间下水平层理试样塑性偏应变增量和塑性体应变增量间关系，反映水平层理试样的流动方向。实线为试验流动方向，短划线为无塑性体应变情况，圆点线为无塑性偏应变情况。随着应力增加，偏角 Φ 逐渐增大，即塑性体应变增长快于塑性偏应变增长，在高应力水平下，偏角 Φ 增大迅速，即塑性体变的增长比塑性偏应变增长更加明细，由此塑性体应变的增加对试样破坏影响很大。

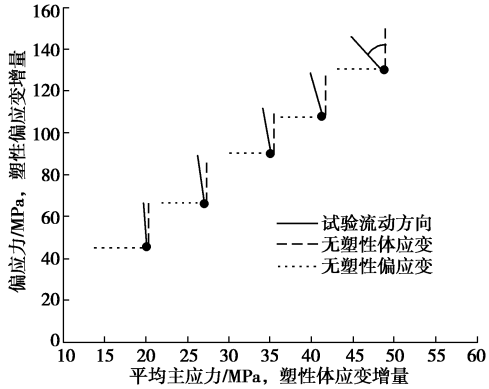

图 16 应力空间下水平层理试样塑性应变增量关系

Fig. 16 Plastic strain increments in stress space for horizontal bedding samples

图 17 为偏应力－平均主应力空间下竖直层理试样塑性偏应变增量和塑性体应变增量间关系，反应竖直层理试样的流动方向。实线为试验流动方向，短划线为无塑性体应变情况，圆点线为无塑性偏应变情况。随着应力增加，偏角 Φ 基本不变，即塑性体应变增长速率等于塑性偏应变增长速率。

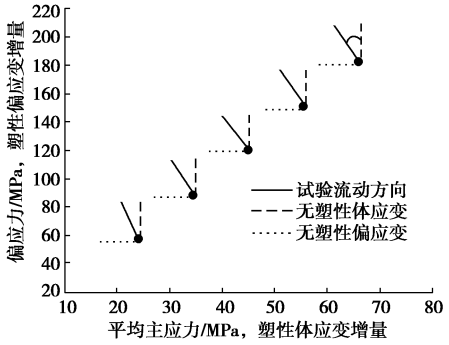

图 17 应力空间下竖直层理试样塑性应变增量关系

Fig. 17 Plastic strain increments in stress space for vertical bedding samples

（2）弹性与塑性参数耦合

试验结果是用所求弹性参数从试验数据中分离出来的塑性应变，塑性应变分离与计算弹性参数有关，当改变弹性参数时，对塑性势产生影响，以水平层理试样为例，讨论弹性参数 E_v 和 ν_{vh} 的取值对塑性势的影响，结果如图 18，19 所示。

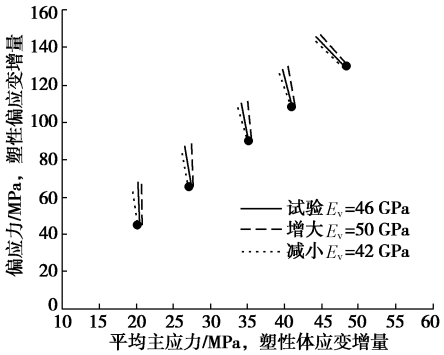

图 18 弹性参数 E_v 取值对塑性势影响

Fig. 18 Effects of elastic parameter E_v on plastic potential

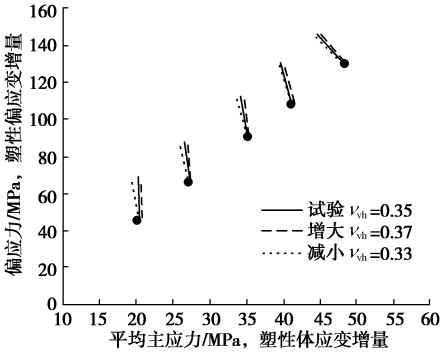

图 19 弹性参数 ν_{vh} 取值对塑性势影响

Fig. 19 Effects of elastic parameter ν_{vh} on plastic potential

由图 18，19 可知，弹性参数 E_v 和 ν_{vh} 取值的增大或者减小对塑性势有影响，但影响不大，对塑性势影响规律相同，即弹性参数改变对塑性势变化趋势不变，采用试验求得的弹性参数分离塑性应变求解塑性势，其结果是可靠的。

4 结 论

（1）建立了岩石横观各向同性弹塑性本构模型：模型弹性部分采用广义胡克定律，塑性部分采用基于广义剪应力的屈服准则和势函数、非关联流动法则和应变硬化准则，该模型屈服面为外凸的非等截距椭圆截面角锥体，在各向同性条件下可退化为米塞斯屈服准则。

（2）提出了模型参数求解方法：弹性参数采用三轴压缩和扭转试验联合求解；塑性参数采用不同层理方向试样的三轴压缩试验求解。

（3）以炭质板岩为例，验证了所提出的横观各向同性弹塑性模型和参数求解方法，验证结果表明所提模型较好地反映了岩石的横观各向同性，参数求解方法简单有效。

（4）分析了炭质板岩塑性流动方向性，发现水平试样较竖直试样体变方向流动显著；分析了弹性参数对塑性参数影响特征，发现随弹性模量和泊松比增加体变方向流动变显著。

参考文献：

[1] BARTON N, QUADROS E. Anisotropy is everywhere, to see, to measure, and to model[J]. Rock Mech Rock Eng, 2015, **48**(4): 1323－1339.

[2] AMADEI B. Importance of anisotropy when estimating and measuring in situ stresses in rock[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 1996, **33**(3): 293－325.

[3] 秦二涛. 深埋层状岩体地下硐室稳定性及支护技术研究[D]. 长沙: 中南大学, 2012. (QIN Er-tao. Study on stability of underground caverns and support technology in deep layered rock mass[D]. Changsha: Central South University, 2012. (in Chinese))

[4] 刘运思, 傅鹤林, 伍毅敏, 等. 横观各向同性岩石弹性参数及抗压强度的试验研究[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2013, **8**: 3398－3404. (LIU Yun-si, FU He-lin, WU Yi-min, et al. Experimental study of elastic parameters and compressive strength for transversely isotropic rocks[J]. Journal of Central South University, 2013, **8**: 3398－3404.

(in Chinese))

[5] 段靓靓, 梁　锴, 方理刚. 岩石横观各向同性参数试验研究[J]. 土工基础, 2008(3): 80－82, 85. (DUAN Liang-liang, LIANG Kai, FANG Li-gang. Test research for transverse isotropy parameter of rock[J]. Soil Engineering and Foundation, 2008(3): 80－82, 85. (in Chinese))

[6] CHOU Y C, CHEN C S. Determining elastic constants of transversely isotropic rocks using Brazilian test and iterative procedure[J]. Int J Numer Anal Meth Geomech, 2008, **32**(3): 219－234.

[7] TALESNICK M L, LEE M Y, HAIMSON B C. On the determination of elastic material parameters of transverse isotropic rocks from a single test specimen[J]. Rock Mech Rock Eng, 1995, **28**(1): 17－35.

[8] 卢应发, 杨丽平, 陈高峰, 等. 层状地质材料弹性张量求解及应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, **27**(5): 922－930. (LU Ying-fa, YANG Li-ping, CHEN Gao-feng, et al. Research on elastic tensor resolution in stratified geomaterial and tis application[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, **27**(5): 922－930. (in Chinese))

[9] BOBET A. Lined circular tunnels in elastic transversely anisotropic rock at depth[J]. Rock Mech Rock Eng, 2011, **44**(2): 149－167.

[10] HEFNY A M, LO K Y. Analytical solutions for stresses and displacements around tunnels driven in cross-anisotropic rocks[J]. Int J Numer Anal Meth Geomech, 1999, **23**(2): 161－177.

[11] VU T M, SULEM J, SUBRIN D, et al. Semi-analytical solution for stresses and displacements in a tunnel excavated in transversely isotropic formation with non-linear behavior[J]. Rock Mech Rock Eng, 2013, **46**(2): 213－229.

[12] 张志增, 李仲奎. 横观各向同性岩体中圆形巷道反分析的惟一性[J]. 岩土力学, 2011, **32**(7): 2066－2072. (ZHANG Zhi-zeng, LI Zhong-kui. Uniqueness of displacement back analysis of a circular tunnel in transversely isotropic rock mass[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, **32**(7): 2066－2072. (in Chinese))

[13] 王永刚, 丁文其, 贾善坡, 等. 考虑结构面特性的层状岩体各向异性模型[J]. 公路交通科技, 2014(10): 85－92. (WANG Yong-gang, DING Wen-qi, JIA Shan-po, et al. Anisotropic model of layered rock mass considering characteristics of structural interface[J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2014(10): 85－92. (in Chinese))

[14] LONG N M A N, KHALDJIGITOV A A, ADAMBAEV U. On the constitutive relations for isotropic and transversely isotropic materials[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, **37**: 7726－7740.

[15] 徐　磊, 任青文, 杜小凯, 等. 层状岩体各向异性弹塑性模型及其数值实现[J]. 地下空间与工程学报, 2010(4): 763－769. (XU Lei, REN Qing-wen, DU Xiao-kai, et al. An anisotropic elastoplastic constitutive model for layered rock masses and its implementation[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2010(4): 763－769. (in Chinese))

[16] HILL R. The mathematical theory of plasticity[M]. Oxford: Clarendon Press, 1950.

[17] 郑颖人, 孔　亮. 岩土塑性力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2010. (ZHENG Yin-ren, KONG Liang. Geotechnical plastic mechanics[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2010. (in Chinese))

[18] 王者超, 乔丽苹, 李术才, 等. 土的内变量蠕变模型研究[J]. 岩土工程学报 2011, **33**(10): 1569－1575. (WANG Zhe-chao, QIAO Li-ping, LI Shu-cai, et al. An internal-variable creep model for soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(10): 1569－1575. (in Chinese))