

DOI: 10.11779/CJGE201807007

饱和正冻土水热力耦合模型的改进

何敏^{1,2}, 冯孝鹏¹, 李宁¹, 刘乃飞¹

(1. 西安理工大学岩土工程研究所, 陕西 西安 710048; 2. 中国电建集团西北勘测设计研究院有限公司, 陕西 西安 710065)

摘要: 在深入剖析已建立的饱和正冻土水热力耦合模型不足的基础上, 结合冻土力学最新研究成果, 基于连续介质力学和热力学定律对原模型进行改进以提高其实用性。首先, 引入由冻融过程中的动态变量(应变速率)与温变速率构成的黏弹性耗散势, 建立了考虑温度影响的冻土骨架的黏弹性本构关系; 在此基础上根据多孔多相介质理论, 建立了外载及温度共同作用下冻土骨架的质量守恒方程; 其次, 在考虑冻土骨架(冰)黏弹性耗散和热力耦合耗散以及水分迁移引起的热对流等主要因素的基础上建立了能量守恒方程; 最后, 综合各方程构建了准饱和正冻土水热力三场耦合控制微分方程, 开发了相应的扩展有限元程序 3GEXFEM, 通过典型室内试验验证了改进后模型的合理性。

关键词: 饱和正冻土; 耦合模型; 黏弹性本构; 对流传热

中图分类号: TU47

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2018)07-1212-09

作者简介: 何敏(1981-), 男, 博士, 副教授, 主要从事岩土工程三场耦合等方面的教学与研究工作。E-mail: hem81@163.com。

Improvement of coupled thermo-hydro-mechanical model for saturated freezing soil

HE Min^{1,2}, FENG Xiao-peng¹, LI Ning¹, LIU Nai-fei¹

(1. Institute of Geotechnical Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 2. Xibei Engineering Corporation Limited of Power Construction Corporation of China, Xi'an 710065, China)

Abstract: Aiming at the shortcomings of the coupled thermo-hydro-mechanical model for saturated freezing soil, which employs a simplified linear elasticity constitutive relation, the assumption of complete saturation and the energy conservation based on conduction, a model is proposed by introducing the latest achievements of frozen soil. Firstly, the viscoelastic dissipation potential constituted by the strain rate and temperature rate is introduced, and a viscoelastic constitutive model that can consider the environmental effects of temperature is established. Then based on the theory of multiphase porous media, the mass conservation equation of frozen soil is established under the combination of load and temperature. By considering the main factors of the viscoelastic dissipation potential of frozen soil such as heat-mechanical coupling dissipation potential and thermal convection caused by water migration, the energy conservation equation is established. Finally, the governing differential equation is formulated by combination of the above equations, and the accuracy of the equation is verified by a classical laboratory test. It is shown that the results of the proposed model are well adapted for practical engineering.

Key words: saturated freezing soil; coupled model; viscoelastic constitutive model; convective heat transfer

0 引言

中国是世界上第三冻土大国, 多年冻土面积约为 $206.8 \times 10^4 \text{ km}^2$, 约占世界多年冻土面积的 10%, 占中国国土面积的 21.5%^[1], 且主要分布在西北干旱区和青藏高原区。西部广大的冻土区严重制约了西部大开发的进程, 李宁等^[2-3]将该区的冻土力学问题归结为中国西部建设中最具代表性的四大特殊岩土力学问题之一。西部冻土区工程建设中的冻害问题的本质是多孔多相岩土介质带相变的多场耦合问题^[2], 国内外学者开展了大量的相关研究工作。

Chen 等^[4]基于冻胀物理本质, 综合冻胀经验公式

建立了半经验的水热力耦合模型。Nixon 等^[5]基于次冻胀理论与冰分凝理论提出了刚冰模型和分凝势模型。周扬^[6]基于冰分凝的思想建立了描述活动透镜体生长瞬态过程的水热耦合模型。Fremond 等^[7]以多孔多相介质的混合物理论为基础建立了冻土微元体中土、冰和水三相介质的水热力耦合模型。苗天德等^[8]、郭力等^[9]建立了土体冻结过程中的控制方程, 可以模

基金项目: 国家自然科学基金项目(51179153); 陕西省教育厅专项科研项目(17JK0557); 陕西省“三秦学者”岩土工程(黄土工程特性研究)创新团队支持计划项目

收稿日期: 2017-04-18

拟水分和热质迁移的两场耦合机制。赖远明等^[10]根据经典传热理论和渗流理论得到了考虑相变过程的寒区隧道温度-渗流耦合方程。杨更社等^[11]研究了寒区冻融环境条件下水热迁移规律。刘泉声等^[12-13]和陈卫忠等^[14]、谭贤君等^[15]开展了寒区裂隙岩体方面的多场耦合研究工作。本课题组也开展了系统的冻土多场耦合方面的研究工作^[16-18],根据传统的多孔多相介质力学研究方法推导了冻土体的有效应力原理,建立了全面考虑冻土中土骨架、冰和未冻水与变形真正耦合作用的饱和正冻土控制微分方程。综上可知,土体的冻结过程极其复杂,众多学者虽已建立了相对成熟的饱和正冻土耦合模型^[19],但就其实际应用来说还是不尽如人意。本课题组提出的耦合模型虽然抓住了饱和正冻土水热力耦合的关键要素,但其只是采用了简单的线弹性本构,且在求解过程中没有考虑冻土的非饱和特性以及水分迁移引起的热对流问题,限制了模型在实际工程中的推广及应用^[17]。

在深入剖析原耦合模型在实际应用中不足的基础上,拟结合冻土力学的最新研究成果和工程应用的需要,对其进行改进和完善。具体包括增加考虑温度影响的黏弹性本构关系;考虑水体的可压缩性进而增加模型对准饱和冻土的适应性;考虑水分迁移引起的对流传热以及黏弹性耗散和热力耦合耗散等对能量方程的影响,最后通过典型室内试验验证模型的正确性。以期研究成果能够更加真实模拟实际的冻土工程特性,为寒区工程建设提供理论指导。

1 原饱和冻土水热力耦合模型

陈飞熊^[16]在传统土力学理论基础上建立了饱和正冻土温度场、水分场和变形场耦合模型。

模型基本假定:①冻土体为饱和多孔介质;②土骨架的变形为弹性变形,其应力-应变关系满足胡克定律;③土体中水体的流动服从达西定律;④土骨架中能量传播以传导为主;⑤假设材料比热容及热传导系数不随温度及压强变化;⑥冻土区是开放系统,补水条件充分。

基于线弹性假定,加上冻土连续性条件及冻土体能量守恒方程建立了饱和冻土二维水热力耦合模型微分方程。

模型存在以下3点不足:①冻土的本构关系简单的考虑为线弹性且没有考虑温度的影响;②渗流连续性方程假定水体不可压缩,无法进一步考虑土体准饱和特性;③能量方程中没有考虑水分迁移引起的对流及冻土冻融循环过程中黏弹性耗散、热力耦合耗散的影响。

2 构建温度影响的黏弹性本构关系

在冻融循环中正冻土经历的是一个动态过程,有着明显蠕变的宏观现象,蠕变过程中不可避免产生机械能耗散,机械能耗散导致冻土在本构关系上就存在热力耦合过程。本文从考虑热传导及功能转化热两类不可逆现象出发,依据连续介质力学、热力学第一、第二定律在热黏弹性范畴内建立饱和正冻土热力本构关系。

2.1 冻土骨架热弹性体本构关系

某一时刻冻土区域 R 的动能 K 和该区域内物质的内能 E 可分别为

$$K = \frac{1}{2} \iiint_R \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV, \quad (1)$$

$$E = \iiint_R \rho e dV, \quad (2)$$

式中, \mathbf{v} 为单元体速度, ρ 为单元体密度, V 为单元体的体积。

根据能量守恒定律, $K+E$ 的导数等于作用于 R 上的体力与表面力所做的机械功率以及进入 R 的其他能量率之和(可以包含各种形式,一般指进入 R 的热通量、辐射及其他内源来的内量)。则有

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \iiint_R \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + e \right) dV = & \iiint_R \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \\ & \iint_S (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} dS + \iiint_R \rho \zeta dV, \end{aligned} \quad (3)$$

式中, \mathbf{q} 为热流, ζ 为内热源(除力学作用以外的其他作用), \mathbf{b} 为体积力, $\boldsymbol{\sigma}$ 为内力, S 为 R 区域外表面, \mathbf{n} 为区域 R 的外表面法向。

根据连续介质力学理论和散度定理并使被积函数相等,可将式(3)改写为

$$\mathbf{v} \cdot (\rho \mathbf{a} - \rho \mathbf{b} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) + \rho \frac{De}{Dt} - \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} + \operatorname{div} \mathbf{q} - \rho \zeta = 0, \quad (4)$$

式中, \mathbf{a} 为单元体加速度, t 为时间, \mathbf{x} 为矢量方向。

由于 $\rho \mathbf{a} - \rho \mathbf{b} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0$,则式(4)可整理为

$$\rho \frac{De}{Dt} - \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} + \operatorname{div} \mathbf{q} - \rho \zeta = 0. \quad (5)$$

在小变形假定条件下,有 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$,则可得到热弹性体的能量守恒方程:

$$\rho \frac{De}{Dt} - \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \operatorname{div} \mathbf{q} - \rho \zeta = 0. \quad (6)$$

设 η 为每单位质量的熵值, τ 为绝对温度,根据热力学第二定律,熵的变化率大于或等于其他内源供给的熵率与热流动引起的熵的通量,也即

$$\frac{D}{Dt} \iiint_R \rho \eta dV \geq \iiint_R \frac{\rho \zeta}{\tau} dV - \iint_S \frac{q}{\tau} \cdot n dS \quad (7)$$

同样根据连续介质力学理论和散度定理并使被积函数相等, 可将式(4)变换为

$$\rho \dot{\eta} \geq \frac{\rho \zeta}{\tau} - \operatorname{div} \frac{q}{\tau} = \frac{\rho \zeta}{\tau} - \frac{\operatorname{div} q}{\tau} - \frac{\operatorname{grad} \tau}{\tau^2} \cdot q \quad (8)$$

将式(6)代入式(8)可得热弹性体熵不等式:

$$\rho \dot{\eta} - \rho \frac{\dot{\varepsilon}}{\tau} + \frac{1}{\tau} \sigma : \dot{\varepsilon} + \frac{\operatorname{grad} \tau}{\tau^2} \cdot q \geq 0 \quad (9)$$

此外, 热弹性体内能 $e = \varphi + \tau \eta$ (φ 为自由能密度, η 为内能密度), 而热弹性体自由能 φ 是内状态变量 (ε, τ) 的函数, 因此将其导数代入热弹性体能量守恒方程和熵不等式整理可得

$$\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} - \sigma \right) : \dot{\varepsilon} + \rho \tau \dot{\eta} + \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \eta \right) \dot{\tau} + \operatorname{div} q - \rho \zeta = 0 \quad (10)$$

$$\left(\sigma - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \right) : \dot{\varepsilon} - \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \eta \right) \dot{\tau} + \frac{\operatorname{grad} \tau}{\tau} \cdot q \geq 0 \quad (11)$$

由于式(11)对任意 $\dot{\varepsilon}$ 和 $\dot{\tau}$ 均成立, 可得到热弹性体本构方程:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \\ \eta &= -\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

若定义各向同性热弹性体自由能函数 φ 是应变 ε 和温度 τ 的二次齐次式^[20-21], 即

$$\rho \varphi = \frac{1}{2} \lambda (\operatorname{tr} \varepsilon)^2 + G \varepsilon : \varepsilon + \frac{1}{2} p \tau^2 + \beta \tau \operatorname{tr} \varepsilon \quad (13)$$

式中, λ, G 为 Lamé 常数, E 为应变, β 为膨胀系数, p 为基准定容比热。

则热弹性体的本构关系式(12)可以变换为

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = \lambda \operatorname{tr} \varepsilon + 2G \varepsilon + \beta I \tau \\ \eta &= -\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = -\frac{1}{\rho} (\beta \operatorname{tr} \varepsilon + p \tau) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

将式(14)代入热弹性体能量守恒方程式(10)整理可得

$$\rho c_e \dot{\tau} = k \nabla^2 \tau + \beta \tau_0 \operatorname{tr} \dot{\varepsilon} + \rho \zeta \quad (15)$$

2.2 冻土骨架黏弹性体本构关系

冻土体在冻融循环及外荷载作用过程中机械能不可逆转化为热能。因此, 在外力作用下冻土体本身就是热源。此外, 在冻融循环及外荷载作用过程中, 物体内部会出现动态阻尼。这种阻尼力与摩擦力一样是不可逆的, 会产生机械能耗散。因此耗散机理必定与反映动态的量有关, 据此可将应力 σ 分为可逆应力 σ^E 和不可逆应力 σ^D 两部分, 显然在黏弹性范畴内, σ^D 与动态内变量 $\dot{\varepsilon}$ ($\dot{\sigma}$) 和 $\dot{\theta}$ 有关。

在小应变范围内, 根据热力学第一定律可得

$$\rho \dot{e} = \sigma : \dot{\varepsilon} - \nabla q + \rho \zeta \quad (16)$$

根据上述分析及式(16), 黏弹性体热力学第一定律可表示为

$$\rho \tau \dot{\eta} + \operatorname{div} q - \sigma^D : \dot{\varepsilon} - \rho \zeta = 0 \quad (17)$$

引入考虑温度影响的黏弹性体耗散势 ϕ ^[20-21], 可得

$$\rho \phi = \frac{1}{2} \lambda' (\operatorname{tr} \dot{\varepsilon})^2 + G' \dot{\varepsilon} : \dot{\varepsilon} + \frac{1}{2} p' \dot{\theta}^2 + \beta' \operatorname{tr} \dot{\varepsilon} \dot{\theta} \quad (18)$$

则有

$$\left. \begin{aligned} \sigma^D &= \rho \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\varepsilon}} = \lambda' I \operatorname{tr} \dot{\varepsilon} + 2G' \dot{\varepsilon} + \beta I \dot{\theta} \\ \eta &= -\frac{\partial \phi}{\partial \dot{\theta}} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

而黏弹性材料的机械模型多采用最简单的弹性模型和最简单的黏性流体模型黏壶的组合^[22], 本文选用由弹簧与黏壶并联构成的 Kelvin 模型来建立冻土体考虑温度影响的黏弹性本构关系, 见图 1。

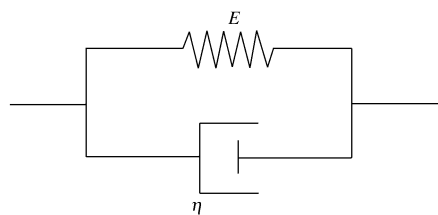


图 1 Kelvin 模型

Fig. 1 Kelvin viscoelastic model

对于 Kelvin 模型, 并联的应力等于各部分应力的和, 系统的熵显然也等于各部分熵之和, 即有

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma^D(\dot{\varepsilon}, \dot{\tau}) + \sigma^E(\varepsilon, \tau) \\ \eta &= \eta^D(\dot{\varepsilon}, \dot{\tau}) + \eta^E(\eta, \tau) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \lambda \operatorname{tr} \varepsilon + 2G \varepsilon + \beta I \tau + \lambda' I \operatorname{tr} \dot{\varepsilon} + 2G' \dot{\varepsilon} + \beta I \dot{\tau} \\ \eta &= -\frac{1}{\rho} (\beta \operatorname{tr} \varepsilon + p \tau + \beta' \operatorname{tr} \dot{\varepsilon} + p' \dot{\tau}) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

将式(19)、(21)代入式(17)可得

$$\begin{aligned} -\tau_0 (\beta \operatorname{tr} \dot{\varepsilon} + p \dot{\tau} + \beta' \operatorname{tr} \ddot{\varepsilon} + p' \ddot{\tau}) + k \nabla^2 \tau - \\ (\lambda' I \operatorname{tr} \dot{\varepsilon} + 2G' \dot{\varepsilon} + \beta I \dot{\theta}) : \dot{\varepsilon} - \rho \zeta = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

忽略高阶项 $\ddot{\varepsilon}$, $\ddot{\tau}$, 可得到考虑温度影响的黏弹性体能量守恒方程:

$$\begin{aligned} \rho c_e \dot{\tau} = k \nabla^2 \tau + \beta \tau_0 \operatorname{tr} \dot{\varepsilon} + \frac{1}{2} \lambda' (\operatorname{tr} \dot{\varepsilon})^2 + G' \dot{\varepsilon} : \dot{\varepsilon} + \\ \frac{1}{2} \beta' \dot{\theta}^2 + \rho \zeta \end{aligned} \quad (23)$$

式(23)与式(15)相比增加了 3 项, 分别代表体变引起的热现象、剪切应变引起的热现象及热力耦合引起的热现象。

3 改进的饱和冻土水热力耦合模型

3.1 耦合模型的假定

在已有的理论基础上^[16, 18], 增加冻土骨架考虑温度影响的黏弹性本构关系; 通过考虑水体及土颗粒的可压缩性增加模型对准饱和和冻土特性的适应性; 进一步考虑冻土融沉过程中冰水相变过程、水分迁移引起对流传热现象、冻土骨架黏弹性耗散及热力耦合耗散对能量方程的影响, 建立符合准饱和正冻土实际工程特性的新的水热力耦合模型。新模型改进的假定如下 (其它同原模型): ①冻土体为饱和多孔介质或准饱和介质; ②土骨架变形为随温度变化的黏弹性变形; ③土骨架中能量传播以传导、对流为主。

3.2 平衡方程

把土体分成冻胀区和非冻胀区。冻结区是冻胀区; 靠近冻结区的冻结缘部分是冻胀区, 称为冻结缘 I 区; 靠近未冻区的部分温度较高, 土颗粒没有足够的吸附力来吸引未冻水分, 因而是非冻胀区, 称为冻结缘 II 区。具体示意图见图 2。

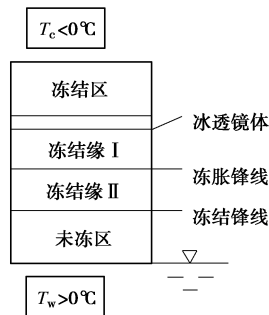


图 2 正冻土的区域划分示意图

Fig. 2 Zoning of freezing soil

据此建立各区域的平衡方程。

(1) 未冻区

未冻区土体内不存在冰, 因此满足饱和融土体的有效应力原理, 应力平衡方程可表示为

$$\nabla \sigma'_{ij} + \nabla p_w - \rho \bar{X} = 0 \quad (24)$$

(2) 冻结缘 II 区

冻结缘 II 区土骨架、冰、未冻水三者共存, 应力平衡方程可表示为

$$\nabla \sigma'_{ij} + (1 - \chi) \nabla p_{ij} + \chi \nabla p_w - \rho \bar{X} = 0 \quad (25)$$

(3) 冻结区和冻结缘 I 区

$$\left. \begin{aligned} \nabla p_{ij} - \rho \bar{X} &= 0, \\ \sigma'_{ij} &= -\chi p_w. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

各式中 σ'_{ij} , p_{ij} 和 p_w 分别为土骨架、冰和未冻水的有效应力张量。

3.3 质量守恒方程

冻土体的变形可分为外荷载引起的变形及温度梯度引起的变形两类。其中冻土体内部温度变化引起的变形包括: ①温度梯度导致水分迁移而引起的各相成分含量的变化, 这是温度引起的主要变形; ②水密度由于温度变化引起的附加体积变化, 这是土体准饱和特性的体现; ③冻土骨架热胀冷缩效应引起的变形; ④在负温下土体内的水分被冻结体积会膨胀 1.09 倍, 这是原位冻胀部分。

(1) 各相质量变化情况

由于水分迁移以及未冻水相变成冰造成土体内各相成分的质量含量发生变化, 其质量守恒条件为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho}_s n_s &= \rho_s n_s \left(\nabla \cdot \vec{v}_w + \frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w} n_w \right) - \frac{\Delta \rho_{wi}}{\rho_i} \rho_s n_s \dot{n}_{wi}, \\ \dot{\rho}_i n_i &= \rho_i n_i \left(\nabla \cdot \vec{v}_w + \frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w} n_w \right) + (\rho_w - \Delta \rho_{wi} n_i) \dot{n}_{wi}, \\ \dot{\rho}_w n_w &= (\rho_w n_w - \rho_w) \left(\nabla \cdot \vec{v}_w + \frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w} n_w \right) + \left(-\rho_w - \frac{\Delta \rho_{wi}}{\rho_i} \rho_w n_w \right) \dot{n}_{wi}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

式中 n_s , n_i 和 n_w 分别为土颗粒、冰和未冻水的体积含量; ρ_s , ρ_i 和 ρ_w 分别为土颗粒、冰和未冻水的密度; n_{wi} 为相变水体含量; \vec{v}_w 为未冻水迁移速率。

式 (27) 中后两式联立求解, 可得到 \dot{n}_{wi} 的表达式:

$$\dot{n}_{wi} = \frac{(\dot{\rho}_i n_i + \rho_i \dot{n}_i)(n_i + n_s)}{\rho_w n_s} + \frac{(\dot{\rho}_w n_w + \rho_w \dot{n}_w) \rho_i n_i}{\rho_w^2 n_s} \quad (28)$$

若不考虑冰的密度变化, 则有

$$\begin{aligned} \dot{n}_{wi} &= \frac{\rho_i \dot{n}_i (n_i + n_s)}{\rho_w n_s} + \frac{\rho_i \dot{n}_w \rho_i n_i}{\rho_w^2 n_s} \\ &= \frac{\rho_i}{\rho_w} \left[\left(1 + \frac{n_i}{n_s} \right) \dot{n}_i + \frac{n_i}{1.09 n_s} \dot{n}_w \right] \quad (29) \end{aligned}$$

(2) 质量守恒方程

对任意一单位体积为 1 的微元体, 设冻土体的应变为 ε , 则该微元体的总变形为 $\varepsilon \Delta t$, 其中 Δt 为时间间隔。则有

土颗粒的质量守恒方程:

$$\rho_{s1} \cdot 1 \cdot n_{s1} = \rho_{s2} (1 + \Delta V) \cdot n_{s2} \quad (30)$$

冰相的质量守恒方程:

$$\rho_{i1} \cdot 1 \cdot n_{i1} = \rho_{i2} \left[(1 + \Delta V) \cdot n_{i2} - \frac{\rho_{wi}}{\rho_i} \dot{n}_{wi} \Delta t \right] \quad (31)$$

未冻水的质量守恒方程:

$$\rho_{w1} \cdot 1 \cdot n_{w1} = \rho_{w2} \left[(1 + \Delta V) \cdot n_{w2} + \nabla \cdot \vec{v}_m \cdot \Delta t + \dot{n}_{wi} \cdot \Delta t \right] \quad (32)$$

式中, ΔV 表示在一定的时间 Δt 内, 由于温度梯度从临界微元体吸收的未冻水的体积。

对饱和冻土体各相成分的质量守恒方程进行推导,可以得到具有统一形式的连续性方程:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\nabla \cdot \bar{v}_w - \frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w} n_w + \frac{\Delta \rho_{wi}}{\rho_i} \dot{n}_{wi} \quad (33)$$

式(33)表示:单位时间冻土微元体的变形等于迁移进入的水分量、温度及压力变化导致液相体积变化(水体密度变化)及土体内的未冻水分相变成冰时增加的附加体积之和。

将式(28)代入式(33)可得

$$\rho_w \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho_w \nabla \cdot \bar{v}_w + \dot{\rho}_w n_w - \Delta \rho_{wi} \left(1 + \frac{n_i}{n_s} \right) \frac{\partial n_i}{\partial t} - \Delta \rho_{wi} \frac{n_i}{n_s} \frac{\partial n_w}{\partial t} = 0 \quad (34)$$

式(34)即为准饱和冻土连续性方程,其与陈飞熊^[16]建立的饱和冻土连续性方程的本质区别在于,将冻土体视为准饱和状态。土体中的气体以封闭形式存在于土颗粒间或自由水之间,也正是由于气体的存在导致水的密度随温度及压力变化。

3.4 能量守恒方程

假定土骨架及冰的变形为黏弹性变形,根据前面建立的考虑温度影响的黏弹性体的能量守恒方程式(23),并补充对流对能量方程的影响,此时冻土体各相成分的能量守恒方程可分别表示为

(1) 土骨架

$$n_s \rho_s c_s \left(\frac{\partial T_s}{\partial t} + \bar{v}_s \cdot \nabla T_s \right) = -\nabla \cdot (n_s \bar{J}_s) - n_s \beta_s T_s \text{tr} \dot{\varepsilon}_s + \frac{1}{2} \lambda' (\text{tr} \dot{\varepsilon}_s')^2 + G' \dot{\varepsilon}_s : \dot{\varepsilon}_s + \frac{1}{2} \beta' \dot{\theta} \dot{\varepsilon}_s + Q_1 \quad (35)$$

(2) 冰

$$n_i \rho_i c_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial t} + \bar{v}_i \cdot \nabla T_i \right) = -\nabla \cdot (n_i \bar{J}_i) - n_i \beta_i T_i \text{tr} \dot{\varepsilon}_i + \frac{1}{2} \lambda' (\text{tr} \dot{\varepsilon}_i')^2 + G' \dot{\varepsilon}_i : \dot{\varepsilon}_i + \frac{1}{2} \beta' \dot{\theta} \dot{\varepsilon}_i + Q_2 \quad (36)$$

(3) 未冻水

$$n_w \rho_w c_w \left(\frac{\partial T_w}{\partial t} + \bar{v}_w \cdot \nabla T_w \right) = -\nabla \cdot (n_w \bar{J}_w) - n_w T_w \frac{\partial p_w}{\partial T_w} \nabla \cdot \bar{v}_w + Q_3 \quad (37)$$

(4) 内部能量交换条件

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = L \rho_i \frac{\partial n_{wi}}{\partial t} \quad (38)$$

式(35)~(37)中,左边第二项分别表示土骨架变形、冰相变形和未冻水的流动对能量的影响(对流项);右边第一项分别表示土骨架、冰和未冻水的热传导项;右边第二项分别表示土骨架、冰的热胀冷缩效应所做的功和未冻水的孔隙水压力随温度变化时所

做的功;右边第三项、四项、五项为土骨架、冰的阻尼力(包含热阻力)所做的耗散功;右边的 Q_1 , Q_2 , Q_3 分别表示土骨架、冰和未冻水从系统内其它相吸收的能量。

若在冻结区用冰相变形代表单元体变形;在未冻区用土颗粒变形代表单元体变形;由于冻土缘区范围较小,假定冻结缘区各相成分之间的变形保持一致;并且各相成分的混合温度为 $T=T_s=T_i=T_w$ 。

则可将式(35)~(38)整合为

$$\begin{aligned} & (n_s \rho_s C_s + n_i \rho_i C_i + n_w \rho_w C_w) \frac{\partial T}{\partial t} + (n_s \rho_s C_s + n_i \rho_i C_i) \bar{v}_s \cdot \nabla T + \\ & n_w \rho_w C_w \bar{v}_w \cdot \nabla T = -\nabla \cdot (n_s \bar{J}_s + n_i \bar{J}_i + n_w \bar{J}_w) - \\ & (n_s \beta_s + n_i \beta_i) T \frac{\partial \text{tr} \varepsilon}{\partial t} - n_w \frac{\partial p_w}{\partial T} \nabla \cdot \bar{v}_w + \frac{1}{2} \lambda' (\text{tr} \varepsilon')^2 + \\ & G' \dot{\varepsilon} : \dot{\varepsilon} + \frac{1}{2} \beta' \dot{\theta} \dot{\varepsilon} + L \rho_i \frac{\partial n_{wi}}{\partial t} \quad (39) \end{aligned}$$

根据文献[22, 23]可知,黏弹性体耗散能 W 可表示为

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2} \lambda' (\text{tr} \varepsilon')^2 + G' \dot{\varepsilon} : \dot{\varepsilon} = \frac{1}{2} \lambda' (\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33})^2 + \\ & G' \left[\dot{\varepsilon}_{11}^2 + \dot{\varepsilon}_{22}^2 + \dot{\varepsilon}_{33}^2 + \frac{1}{2} (\dot{\gamma}_{12} + \dot{\gamma}_{23} + \dot{\gamma}_{31})^2 \right] \quad (40) \end{aligned}$$

由 Fourier 定律可知热流密度 $\bar{J}_s = -\lambda_s \nabla T$, $\bar{J}_i = -\lambda_i \nabla T$, $\bar{J}_w = -\lambda_w \nabla T$, 其中 λ_s , λ_i 和 λ_w 分别为土粒、冰和未冻水的热传导系数。若令 $\bar{C}_1 = n_s \rho_s C_s + n_i \rho_i C_i$, $\bar{C}_2 = n_w \rho_w C_w$, $\bar{C}_3 = \bar{C}_1 + \bar{C}_2$, $\bar{\beta} = n_s \beta_s + n_i \beta_i$, $\bar{\lambda} = n_s \lambda_s + n_i \lambda_i + n_w \lambda_w$ 。

则式(39)可整理为

$$\begin{aligned} & \bar{C}_3 \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{C}_1 \bar{v}_s \cdot \nabla T + \bar{C}_2 \bar{v}_w \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\bar{\lambda} \nabla T) - \bar{\beta} T \frac{\partial \text{tr} \varepsilon}{\partial t} - \\ & n_w \frac{\partial p_w}{\partial T} T \nabla \cdot \bar{v}_w + W + \frac{1}{2} \beta' \dot{\theta} \dot{\varepsilon} + L \rho_i \frac{\partial n_{wi}}{\partial t} \quad (41) \end{aligned}$$

式(41)即为准饱和黏弹性冻土体满足的能量守恒方程,从能量方程可以看出,在热黏弹性框架下,纯剪切及热力耦合也可引起热现象。

3.5 耦合模型控制方程

综合静力平衡方程(式(25)、(26))、质量守恒方程(式(34))、能量守恒方程(式(41))即构成了准饱和黏弹性冻土体的水热力耦合模型的控制微分方程。

温度影响下水分驱动力 p_{wf} 可由试验获得, $n_w = n_w(T, p_i)$ 也可根据试验确定;方程组中考虑冻土体的本构关系后,基本的未知量包括 T , n_w , \bar{p}_w , u (或 v) 4 个变量,而方程组有 3 个,再加上未冻水体积含量 $n_w = n_w(T, p_i)$ 共 4 个,因此是一个封闭方程组,可以求解。

在考虑空间域的有限元离散及时间域的差分离散后, 可得到三场耦合控制微分方程的扩展有限元求解格式, 并开发了有限元分析软件 3GEXFEM^[24]。

4 模型验证

为了检验上述改进的三场耦合模型的正确性, 以徐学祖等^[25]的试验资料为基础对其进行验证。

徐学祖等^[25]在研究冻土体内的水分迁移规律时, 对开放系统中长 5 cm, 直径 15 cm 的圆柱体饱水土试验试样, 在 500 kPa 的外荷载条件下, 进行了由下向上的单向冻结的冻胀试验。

试样为含砂粒 2.5%, 粉粒 48.1%和黏粒 49.4%的内蒙古黏土。其液限为 32.8%, 塑限为 20.4%, 颗粒相对密度为 2.73。

(1) 分析参数及初边值条件

针对冻土试样建立的有限元模型及分析参数如图 3 和表 1 所示。

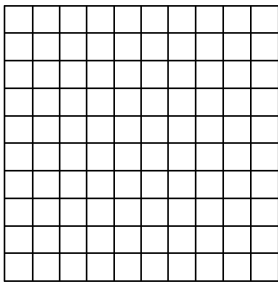


图 3 数值分析模型

Fig. 3 Numerical model

表 1 有限元分析饱和冻土体参数

Table 1 Parameters of saturated frozen soil

组分	热容 C $/(10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1})$	传导系数 λ $/(W \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	密度 $/(kg \cdot \text{m}^{-3})$
土颗粒	2.20	0.907	2768
冰	1.93	2.220	900
未冻水	4.18	0.602	1000

土体的初始含水率为 0.375。冻土中的未冻水含量与温度的关系, 可通过温度用两点法求得^[26]。文中的未冻水含量与温度的关系可表示为

$$n_w = \begin{cases} 0.375 & (T \geq -0.11^\circ\text{C}) \\ 0.109815(-T)^{-0.5564} & (T < -0.11^\circ\text{C}) \end{cases} \quad (42)$$

导热系数根据文献[27]的试验资料, 可得

$$k = \begin{cases} 3.072 \times 10^{-11} & (T \geq 0^\circ) \\ 3.453 \times 10^{-13} e^{13.438T} & (T \leq -0.11^\circ\text{C}) \end{cases} \quad (43)$$

冻土的变形模量 $E=27.65+228.4/(t+0.5)$, 阻尼 $\eta=21.48 \text{ MPa} \cdot \text{h}^{[28]}$ 。

土样顶部为暖端, 底部为冷端, 试验由下向上冻结。土样初始温度为 1°C , 试验开始后底部降至 -1°C ,

随后历时 70 h 线性降至 -8°C 。土体为饱和土体, 试验时有外界 (从暖端) 补水。试样顶部为自由边界, 其余部位为法向约束。

(2) 模拟结果分析

a) 温度场

冻结深度随时间变化的关系曲线如图 4 所示。由图 4 可以看出, 在模拟冻结深度上 (与原模型相比), 由于考虑了相变、水分迁移引起热对流、不可逆热黏性耗散等内部热源作用, 冻结速度有一定程度的降低, 且本文所分析的计算值与试验成果基本一致。

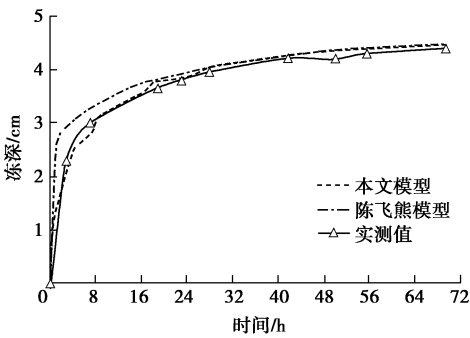


图 4 冻结深度变化曲线

Fig. 4 Variation of frozen depth

基于改进的耦合模型分析得到的温度场如图 5 所示, 限于篇幅文中仅给出了初始 1.5 h 和结束时 (72 h) 的温度场。由图 5 可以看出, 随着时间的发展, 温度逐渐下降, 冻结深度逐渐向上发展。

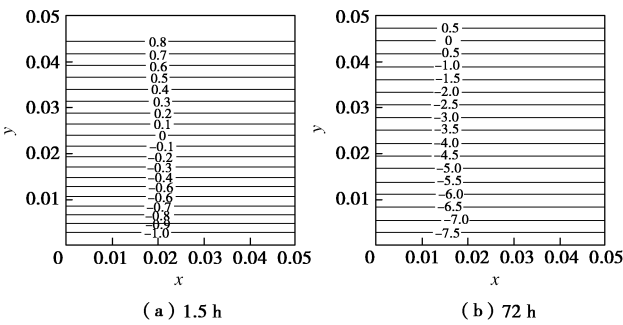


图 5 不同时刻试样温度场

Fig. 5 Temperature fields at different time

b) 变形场

冻胀量随时间变化的关系曲线如图 6 所示。从图 6 中可以看出, 与原模型相比由于考虑冻土温度影响的黏弹性作用, 改进模型起始阶段冻胀量明显较低。随着冻结试验的进行, 两者冻胀量逐步逼近。在总冻胀量方面, 由于改进模型得到的冻结速度明显低于原模型, 因此从外界吸收水分更充分, 本文模型计算分析得到的冻胀量较原模型增加了约 15%, 所分析的计算值与试验成果基本一致。从冻胀量的发展规律看, 本文计算结果也更为接近实测结果。

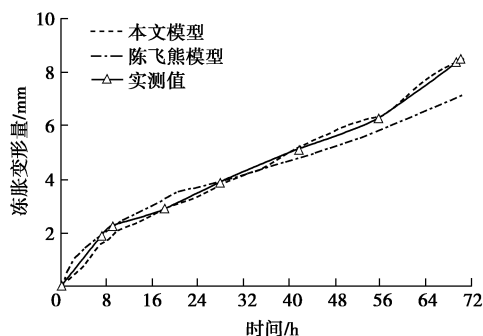


图6 冻胀量变化曲线

Fig. 6 Curves of frost-heaving deformation

基于改进的耦合模型分析得到的冻胀变形场如图7所示,限于篇幅文中仅给出了初始1.5 h和结束时(72 h)的变形场。由图7可以看出,随时间的发展,冻胀变形不断发展,最终保持稳定,分析成果与实际工程经验基本一致。

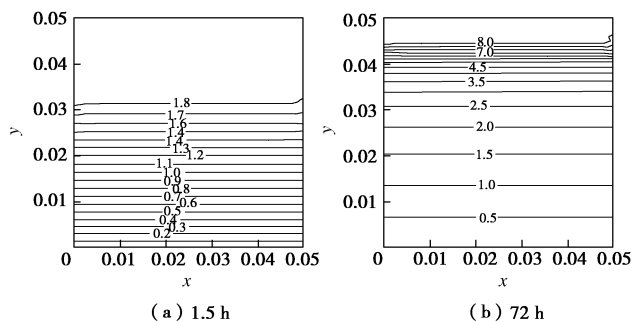


图7 不同时刻试样冻胀变形场

Fig. 7 Frost-heaving deformation fields at different time

c) 水分场

不同时刻试样含水率、含冰量以及土颗粒含量沿试样深度的分布曲线如图8, 9所示。

由图8可以看出随着冻深的增加,在冻结前缘附近的含水率值达到最大值,试验结束时试样的总含水率为93.2%。从含冰量分布看,试验结束时整个试样从上到下的含冰(水)量先增加后减小,并在冻结缘区下部出现含冰量达到0.65分凝冰层。通过与试验成果对比分析可以看出,本文分析所得含冰量与工程经验基本一致,符合冻结规律。

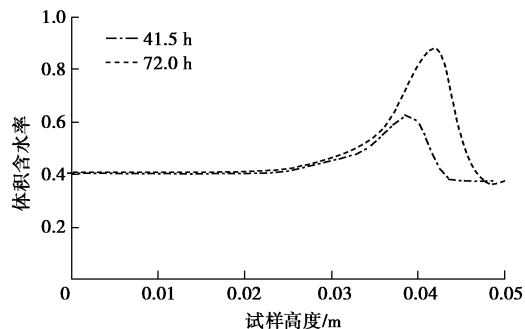


图8 不同时刻含水率分布曲线

Fig. 8 Curves of water content at different time

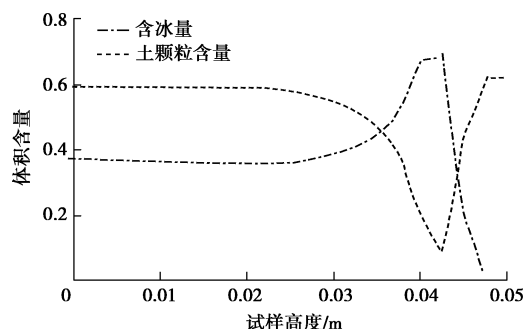


图9 试验结束时含冰量及土颗粒含量分布曲线

Fig. 9 Curves of ice and soil at the end of experiment

5 结 论

(1) 通过引入由冻结融沉过程中的动态变量(应变速率)与温升温降速率构成的黏弹性耗散势,建立了考虑温度影响的冻土骨架黏弹性本构关系,并将其纳入到正冻土水热力耦合模型中。

(2) 通过将冻土体的变形分为由外荷载引起的变形及温度梯度引起的变形,并根据多孔多相介质理论,建立了外载及温度共同作用下冻土骨架的质量守恒方程。

(3) 通过考虑冻土体各相成分的热传导、冻土骨架(冰)黏弹性耗散和热力耦合耗散,冻土骨架热胀冷缩、冻结融沉过程中冰水相变及负温下水分迁移引起的热对流等主要因素,建立了多种因素相互作用、相互影响的多孔多相介质的能量守恒方程。

(4) 综合平衡方程、质量守恒方程以及能量守恒方程构建了准饱和正冻土水热力三场耦合控制微分方程,开发了相应的扩展有限元程序 3GEXFEM,通过典型室内试验对其进行了验证;模拟结果表明本文模型分析所得温度场、水分场和变形场等均与实测值吻合较好,符合工程经验。

参考文献:

- [1] 徐学祖, 王家澄, 张立新. 冻土物理学[M]. 北京: 科学出版社, 2001. (XU Xue-zu, WANG Jia-cheng, ZHANG Li-xin. Physics of frozen soils[M]. Beijing: Science Press, 2001. (in Chinese))
- [2] 李 宁, 程国栋, 谢定义. 西部大开发中的岩土力学问题[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(1): 95 - 102. (LI Ning, CHENG Guo-dong, XIE Ding-yi. Geomechanics development in civil construction in Western China[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, 23(1): 95 - 102. (in Chinese))
- [3] 李 宁, 程国栋, 徐学祖, 等. 冻土力学的研究进展与思考[J]. 力学进展, 2001, 31(1): 95 - 102. (LI Ning, CHENG Guo-dong, XU Xue-zu, et al. Research progress and thinking of cryogenic soil mechanics[J]. Advances in Mechanics, 2001, 31(1): 95 - 102. (in Chinese))

- Guo-dong, XU Xue-zu, et al. The advance and review on frozen soil mechanics[J]. *Advances in Mechanics*, 2001, **31**(1): 95 - 102. (in Chinese))
- [4] CHEN X B, WANG Y Q. Frost heave prediction for clayey soils[J]. *Gold Region Science and Technology*, 1988, **15**(3): 233 - 238.
- [5] NIXON J F. Discrete ice lens theory for frost heave in soils[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1991, **28**: 843 - 859.
- [6] 周 扬. 冻土冻胀理论模型及冻胀控制研究[D]. 徐州: 中国矿业大学, 2009. (ZHOU Yang. Study on frost heave model and frost heave control of frozen soils[D]. Xuzhou: China University of Mining and Technology, 2009. (in Chinese))
- [7] FREMOND M, MIKKOLA M. Thermomechanical modeling of freezing soil[C]// *Proceedings of the Sixth International Symposium on Ground Freezing*. Rotterdam, 1991: 17 - 24.
- [8] 苗天德, 郭 力, 牛永红, 等. 正冻土中水热迁移问题的混合物理理论模型[J]. *中国科学: D 辑*, 1999, **42**(增刊): 8 - 14. (MIAN Tian-de, GUO Li, NIU Yong-hong, et al. Mixed physical model of heat moisture migration in saturated freezing soil[J]. *Science in China: Series D*, 1999, **42**(S1): 8 - 14. (in Chinese))
- [9] 郭 力, 苗天德. 饱和正冻土中水热迁移的热力学模型[J]. *岩土工程学报*, 1998, **20**(5): 87 - 91. (GUO Li, MIAO Tian-de. Thermodynamic models of heat-moisture migration in saturated freezing soil[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1998, **20**(5): 87 - 91. (in Chinese))
- [10] 赖远明, 吴紫汪, 朱元林. 寒区隧道温度场和渗流场耦合问题的非线性分析[J]. *中国科学: D 辑*, 1999, **29**(增刊 1): 21 - 26. (LAI Yuan-ming, WU Zi-wang, ZHU Yuan-lin. Nonlinear analyses for the couple problem of temperature and seepage in cold region tunnels[J]. *Science in China: Series D*, 1999, **29**(S1): 21 - 26. (in Chinese))
- [11] 杨更社, 周春华, 田应国, 等. 软岩类材料冻融过程水热迁移的实验研究初探[J]. *岩石力学与工程学报*, 2006, **25**(9): 1765 - 1770. (YANG Geng-she, ZHOU Chun-hua, TIAN Ying-guo, et al. Primary experimental study on moisture and heat transfer of soft rock material during its freezing and thawing[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2006, **25**(9): 1765 - 1770. (in Chinese))
- [12] 刘泉声, 黄诗冰, 康永水, 等. 裂隙岩体冻融损伤研究进展与思考[J]. *岩石力学与工程学报*, 2015, **34**(3): 452 - 471. (LIU Quan-sheng, HUANG Shi-bing, KANG Yong-shui, et al. Advance and review on freezing-thawing damage of fractured rock[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2015, **34**(3): 452 - 471. (in Chinese))
- [13] 刘泉声, 康永水, 刘小燕. 冻结岩体单裂隙应力场分析及热-力耦合模拟[J]. *岩石力学与工程学报*, 2011, **30**(2): 217 - 225. (LIU Quan-sheng, KANG Yong-shui, LIU Xiao-yan. Analysis of stress field and coupled thermo-mechanical simulation of single-fracture freezed rock masses[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2011, **30**(2): 217 - 225. (in Chinese))
- [14] 陈卫忠, 谭贤君, 于洪丹, 等. 低温及冻融环境下岩体热, 水, 力特性研究进展与思考[J]. *岩石力学与工程学报*, 2011, **30**(7): 1318 - 1336. (CHEN Wei-zhong, TAN Xian-jun, YU Hong-dan, et al. Advance and review on thermo-hydro-mechanical characteristics of rock mass under condition of low temperature and freeze-thaw cycles[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2011, **30**(7): 1318 - 1336. (in Chinese))
- [15] 谭贤君, 陈卫忠, 杨建平, 等. 岩盐储气库温度-渗流-应力-损伤耦合模型研究[J]. *岩土力学*, 2009, **30**(12): 3633 - 3641. (TAN Xian-jun, CHEN Wei-zhong, YANG Jian-ping, et al. Study of THM-damage coupling model of gas storage in salt rock with interlayer[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2009, **30**(12): 3633 - 3641. (in Chinese))
- [16] 陈飞熊. 饱和正冻土温度场、水分场和变形场三场耦合理论框架[D]. 西安: 西安理工大学, 2001. (CHEN Fei-xiong. The fully coupled modeling of the thermal-moisture-deformation behavior for the saturated freezing soils[D]. Xi'an: Xi'an University of Technology, 2001. (in Chinese))
- [17] 何 敏. 饱和正冻土水热力耦合模型的改进及其扩展有限元解法[D]. 西安: 西安理工大学, 2013. (HE Min. Modification of moisture-heat-stress coupling model for saturated freezing soil and its solution with the extended finite element method[D]. Xi'an: Xi'an University of Technology, 2013. (in Chinese))
- [18] 陈飞熊, 李 宁, 程国栋. 饱和正冻土多孔多相介质的理论框架[J]. *岩土工程学报*, 2002, **24**(2): 213 - 217. (CHEN Fei-xiong, LI Ning, CHENG Guo-dong. The theoretical frame of multi-phase porous medium for the freezing soil[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2002, **24**(2): 213 - 217. (in Chinese))
- [19] 张学富, 喻文兵, 刘志强. 寒区隧道渗流场和温度场耦合问题的三维非线性分析[J]. *岩土工程学报*, 2006, **28**(9): 1095 - 1100. (ZHANG Xue-fu, YU Wen-bing, LIU Zhi-qiang. Three-dimensional nonlinear analysis for coupled problem of

- seepage field and temperature field of cold regions tunnels[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, **28**(9): 1095 - 1100. (in Chinese))
- [20] 秦世伦. 线性弹性体与拟弹性体的热力学关系[J]. 四川大学学报(工程科学版), 1997, **1**(5): 57 - 62. (QIN Shi-lun. The thermodynamic relations in elastic and quasi-elastic body[J]. Journal of Sichuan Union University (Engineering Science Edition), 1997, **1**(5): 57 - 62. (in Chinese))
- [21] 王竹溪. 热力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1955: 120 - 122. (WANG Zhu-xi. Thermodynamics[M]. Beijing: Higher Education Press, 1995: 120 - 122. (in Chinese))
- [22] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1955. (XU Zhi-lun. Elastic mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press, 1955. (in Chinese))
- [23] 何平, 程国栋, 朱元林. 冻土黏弹塑性损伤耦合本构理论[J]. 中国科学: D 辑, 1999, **29**(增刊 1): 34 - 39. (HE Ping, CHENG Guo-dong, ZHU Yuan-lin. Constitutive theory of visco-elastoplastic damage for frozen soil[J]. Science in China: Series D, 1999, **29**(S1): 34 - 39. (in Chinese))
- [24] 何敏, 冯孝鹏, 李宁. 准饱和正冻土水热力耦合模型的扩展有限元程序研发[J]. 岩石力学与工程学报, 2017, **36**(11): 2798 - 2809. (HE Min, FENG Xiao-peng, LI Ning. Development of the extended finite element program for the thermo-hydro-mechanical coupling model of quasi-saturated freezing soil[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2017, **36**(11): 2798 - 2809. (in Chinese))
- [25] 徐学祖, 王家澄, 张立新, 等. 土体冻胀和盐胀机理[M]. 北京: 科学出版社, 1995. (XU Xue-zu, WANG Jia-chen, ZHANG Li-xin. Mechanisms of frost heaving and salt expansion of soils[M]. Beijing: Science Press, 1995. (in Chinese))
- [26] XU X Z, OLIPHANT J L, TICE A R. Prediction of unfrozen water contents in frozen soils by a two-points or one-point method[C]// Proc 4th Int Symp on Ground Freezing. Rotterdam, 1985: 83 - 87.
- [27] HORIGUCHI K, MILL R D. Hydraulic conductivity functions of frozen materials[C]// Proc 4th Int Conf on Permafrost. Washington D C, 1983: 504 - 508.
- [28] 李强, 王奎华, 谢康和. 人工冻土流变模型的识别与参数反演[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, **23**(11): 1895 - 1899. (LI Qiang, WANG Kui-hua, XIE Kang-he. Recognition of models and back analysis of parameters for artificial frozen soils[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, **23**(11): 1895 - 1899. (in Chinese))