

DOI: 10.11779/CJGE201806006

多层水平或倾斜介质中的震源定位

王 帅, 张向东, 贾宝新

(辽宁工程技术大学土木工程学院, 辽宁 阜新 123000)

摘 要: 为了充分利用矿区岩土体的三维速度结构, 以正反演联用法为雏形, 提出专门针对水平或倾斜分层介质的定位方法。推导水平分层介质中的波前曲面方程, 并基于该方程, 从任意观测系统角度, 将发震时刻作为未知量引入非线性方程组求解, 建立未知数个数等于非线性方程个数的适定非线性方程组, 从而建立了波前正演法。不同于正反演联用法通过规则观测系统和曲线拟合确定发震时刻, 波前正演法将发震时刻作为未知量, 确定震源时空参数需要四个台站的非线性方程。为了简化波前正演法的非线性系统, 采用变量代换法, 减少了定位参数, 从而减小了确定迭代初值的难度。通过将台站所在的原大地坐标系旋转至与介质分界面平行正交, 使得新坐标系中的波前面推进方向与坐标轴 z 平行, 从而将波前正演法推广应用于倾斜层状介质, 有效解决了倾斜层状介质中的震源定位问题。对波前正演法的 16 个未知参数相对于 3 个速度结构参数的条件数进行计算, 多种定位条件下的条件数计算结果表明, 波前正演法的条件数均远小于 10, 波前正演法是良态的。

关键词: 震源定位; 观测系统; 波前正演; 层状介质; 倾斜介质

中图分类号: TU435; P315.3

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2018)06-1011-10

作者简介: 王 帅(1986-), 男, 博士, 主要从事岩土地震工程、岩石动力学等方面的教学和科研工作。E-mail: 62626@163.com。

Positioning of seismic sources in multilayered horizontal or inclined media

WANG Shuai, ZHANG Xiang-dong, JIA Bao-xin

(College of Civil Engineering, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China)

Abstract: In order to make full use of 3-D velocity structure of the rock mass in the mining area, based on the combined method of forward and inversion as an embryonic form, a new method for positioning of seismic sources in multilayered horizontal or inclined media is put forward. The wave front surface equation in multilayered horizontal media is derived. From the perspective of any field setup, based on the equation, the original time of earthquake is substituted into the nonlinear equations as an unknown quantity. The nonlinear equation set is established, of which the unknowns are equal to the number of nonlinear equations, thus a method for positioning of seismic sources based on forward of wave front is established. The time when the earthquake happens is obtained through inversion and corrected by curve fitting based on regular field setup in the positioning model combined with forward and inversion. The positioning model, based on forward of wave front, which deals with the time of earthquake as an unknown quantity in the nonlinear equations, is different. It obtains spatiotemporal parameters of seismic sources through nonlinear equations of four stations. The number of source parameters is reduced using the method of variable substitution, so the nonlinear system of the positioning model based on forward of wave front is simplified. The determination of iterative initial value is easier. The original geodetic coordinates of stations are rotated into those which are orthogonal or parallel to the interfaces between different media. The forward direction of wave front in the new coordinate system is parallel to the axis z . Thus the positioning model based on forward of wave front is extended to multilayered inclined media. The positioning model based on forward of wave front is an effective method to solve the problem of source positioning in multilayered inclined media. The calculated results of conditional numbers of 16 unknown parameters corresponding to 3 parameters of velocity structure under different conditions show that the conditional numbers of positioning model based on forward of wave front are all far less than 10, and the positioning model based on forward of wave front is in good state.

Key words: source positioning; field setup; forward of wave front; multilayered medium; inclined medium

0 引 言

研究地震定位方法和提高地震定位精度, 一直是

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51774173, 51174268)

收稿日期: 2016-01-29

地震科学中的一个重要课题,地震学家不断改进或提出新的定位方法,期望得到更高的定位精度^[1]。影响地震定位精度的因素很多,主要因素有台网布局、震相识别^[2-4]、到时读数、地壳结构^[5]及定位算法等。

矿山微震的发生机理与地震不同^[6-10],因此微震的监测定位方法也与地震有所区别^[11-4]。

从数学上讲,传统地震定位算法的实质在于求目标函数的极小值。各种定位方法产生于对目标函数的构造、处理以及求极小值方法的不同。目前广泛使用的计算机定位方法中,以 Geiger 法最为基础和经典^[11],是计算定位的起源,1912 年由德国物理学家 Geiger 提出。大部分定位方法均以 Geiger 法为基础。

近年来基于现代数字地震观测技术和科学计算以及计算机技术的智能化数值自动定位方法得到了迅速发展,并业已成为当前地震定位的主流方法。随着全球及区域速度结构三维层析成像的研究,在此基础上应用三维速度结构的地震定位已经被人们所关注,如美国哈佛大学一直将提高震源定位精度列为主要的研究方向之一,并侧重探索使用三维速度结构为主^[12]。

矿山微震监测定位与地震定位不同,例如矿山微震监测定位的岩土体范围有限,监测范围内的岩土层分布情况、各层波速大小相对容易确定。因此直接将地震定位算法移植到矿山微震定位中不合适,一方面地震定位的精度量级要求达不到矿山微震精确定位的要求,另一方面地震定位算法复杂程度高、计算量大。

辽宁工程技术大学冲击地压研究院开发的矿山微震监测定位系统,采用了适用于矿山微震监测的几种定位方法^[13],包括单台站定位法、2 或 3 台站定位法和多台站定位法。其中多台站定位中采用了经典线性法。

上述适用于矿山微震监测定位的算法中,都将矿区内的岩土体近似为均匀介质,因此为了进一步提高矿震定位精度,更好地利用矿区岩土层的三维速度结构,张向东等^[14-15]提出了专门针对水平层状介质的震源定位方法,几何平均法和正反演联用法。

从解决问题的出发点考虑,张向东等提出的算法,是一种以介质为导向的算法,出发点是设计介质的非均匀速度结构,并有针对性地建立相应的定位算法,并不断增加非均匀速度结构的复杂度以接近实际。

真实的三维速度结构,介质层数应是任意的,这是将二层介质推广到更复杂速度结构的自然想法。另外,根据矿区岩土层的三维速度结构,发现速度分布不但沿垂直方向具有非均匀性,还普遍呈现出横向非均匀性。倾斜层状介质是这种横向非均匀性的最简单、

最基本的情况。为了充分利用矿区岩土层的三维速度结构来提高微震定位精度,解决这种倾斜层状的横向非均匀介质中的震源定位问题是必须跨越的障碍。

1 波前正演法的提出

本文提出的定位方法利用了波前面的正演,因此本文称该法为“波前正演法”。文献^[15]中的正反演联用法局限于规则观测系统,特定定位条件下误差过大。

正反演联用法存在上述问题的原因在于发震时刻的确定。为确定发震时刻,并用曲线拟合法修正发震时刻以接近真实值,正反演联用法采用了与几何平均法一致的观测系统。这是正反演联用法局限于特定规则观测系统,且特定定位条件下误差过大的根本原因。

因此,本文的改进方法是避开在算法执行前进行发震时刻的近似确定,由于缺少发震时刻作为已知数,相当于在方程组中增加了一个未知数,因此采用增加一个台站的方法,由正反演联用法采用的 3 台站定位变为本文的四台站定位,恰好能构成适定的方程组,具体方法将在后文中详细说明。

本文区分了台站 1 的监测到时 t_1 和震波从震源到台站的走时 T_1 。实际工程中监测台站只能提供 P 波的初至时刻 t_1 ,由于发震时刻 T_0 是待解未知数,因此 $T_1 = t_1 - T_0$ 未知。但任意两个监测台站的走时之差 $T_1 - T_2 = t_1 - t_2$ 为已知。文献^[14]提出的定位方案不必区分监测台站的走时与到时,本文将要提出的波前正演法,也不需要区分监测台站的监测到时 t_1 与震波的实际走时 T_1 ,但为了实用,以下分析均基于台站监测到时。

波前正演法的定位思路与正反演联用法一致,见文献^[15]。

二层介质波前正演法的定位公式与文献^[15]中二层介质正反演联用法的定位公式一致,只是不局限于规则观测系统,组建非线性方程组的方式也不同。

1.1 任意层介质中球面波正演公式

台站 1 监测到时为 t_1 ,震波在介质中的传播历时为 $T_1 = t_1 - T_0$,波阵面在介质 1 中扩散半径 $R = v_1 T_1$,波阵面在第一层介质分界面上交线与波源成角为 θ_1 。

h_i^j 表示介质层厚,其中下标 i 表示台站号,上标 j 表示介质层号。观测系统任意,各台站至第一层介质分界面的距离互不相等,即 h_i^1 可以互不相等;由于介质层水平,因此上标 $j \neq 1$ 时,有 $h_i^j = h_j^j$ ($i \neq 1$)。又有:

$$\cos \theta_1 = \frac{h_1^1}{v_{\text{层}1} T_1}, \text{ 或 } R_1 = v_{\text{层}1} T_1 = \frac{h_1^1}{\cos \theta_1}。 \text{ 其中 } v_{\text{层}1} \text{ 表}$$

示介质层 1 波速; $v_{\text{层}i}$ 表示介质层 i 波速 (其中: $1 \leq i \leq n$, n 表示分层介质总层数)。

震源 Q 为波阵面上一点, 波阵面上各点与参数 μ ($0 < \mu < 1$) 一一对应, 设台站 1 发出震波的路径在介质 1 中入射角为 $\mu\theta_1$, 则 μ 与震波路径的折射点对应。

设台站 i 发出震波的射线路径上, 射入第 j 层介质的折射角 (或射出第 j 层介质的入射角) 为 θ_{ij} (其中前一个脚标 i 表示台站序号, 后一个脚标 j 表示介质层序号)。由于 $\mu\theta_1$ 表示台站 1 发出震波的路径在介质 1 中入射角, 则容易得到 $\theta_{11} = \mu\theta_1$ 。

无论 j 取多大, θ_{ij} 中只有一个未知数 μ , 原因如下: 由于 $\sin\theta_{11} = \sin\mu\theta_1$, $\cos\theta_{11} = \cos\mu\theta_1$, $\tan\theta_{11} = \tan\mu\theta_1$ 。则 $\sin\theta_{1j} = \frac{v_{1j}}{v_{11}}\sin\theta_{11}$, $\cos\theta_{1j} = \sqrt{1 - \frac{v_{1j}^2}{v_{11}^2}\sin^2\theta_{11}}$, $\tan\theta_{1j} = \frac{\sin\theta_{11}}{\sqrt{\frac{v_{11}^2}{v_{1j}^2} - \sin^2\theta_{11}}}$ 。

对台站 1 发出的球面波在 k 层介质中的传播过程进行正演, 得在第 k 层介质中的波阵面方程为

$$x_0 = x_1 + \left[\left(\frac{h_1^1}{v_{11}\cos\theta_1} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h_1^j}{v_{1j}\cos\theta_{1j}} \right) \cdot v_{1k}\sin\theta_{1k} + \sum_{j=1}^{k-1} h_1^j \tan\theta_{1j} \right] \cdot \cos\phi, \quad (1)$$

$$y_0 = y_1 + \left[\left(\frac{h_1^1}{v_{11}\cos\theta_1} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h_1^j}{v_{1j}\cos\theta_{1j}} \right) \cdot v_{1k}\sin\theta_{1k} + \sum_{j=1}^{k-1} h_1^j \tan\theta_{1j} \right] \cdot \sin\phi, \quad (2)$$

$$h_0 = \left(\frac{h_1^1}{v_{11}\cos\theta_1} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h_1^j}{v_{1j}\cos\theta_{1j}} \right) \cdot v_{1k}\cos\theta_{1k}, \quad (3)$$

式中, ϕ 为震波路径所在的竖直平面与 x 轴夹角。

对于 4 层介质, 式 (1) ~ (3) 中 k 取 4。

1.2 任意层介质中球面波正演公式的解释说明

现对式 (1) ~ (3) 的物理含义解释如下:

式 (1)、(2) 中: h_1^1 是台站 1 所在第一层介质的层厚, θ_1 是台站 1 历经台站总走时后波阵面在第一层

介质分界面上交线与波源的成角, $\frac{h_1^1}{\cos\theta_1}$ 表示台站 1

历经台站总走时后震波在台站所在的第一层介质中传

播的最大距离, 则 $\frac{h_1^1}{v_{11}\cos\theta_1}$ 就表示台站 1 总走时。

h_1^j 是第 j 层介质的层厚, θ_{1j} 是台站 1 发出震波实际路径射入第 j 层介质中的折射角或射出第 j 层介质

的入射角, $\frac{h_1^j}{\cos\theta_{1j}}$ 表示台站 1 发出的震波实际路径在

第 j 层介质中的射线长度, 则 $\frac{h_1^j}{v_{1j}\cos\theta_{1j}}$ 就表示震波在

第 j 层介质中的传播时长, $\sum_{j=1}^{k-1} \frac{h_1^j}{v_{1j}\cos\theta_{1j}}$ 就表示台站 1

发出的震波在第 1 层至第 $k-1$ 层介质中的传播时间之和, $\left(\frac{h_1^1}{v_{11}\cos\theta_1} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h_1^j}{v_{1j}\cos\theta_{1j}} \right)$ 表示台站 1 总走时减去

震波在第 1 层—第 $k-1$ 层介质中的传播时长之和, 即震波在第 k 层介质中的传播时间,

$\left(\frac{h_1^1}{v_{11}\cos\theta_1} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h_1^j}{v_{1j}\cos\theta_{1j}} \right) \cdot v_{1k}$ 表示震波在第 k 层介质中的传播距离。

θ_{1k} 是台站 1 震波实际路径射入第 k 层介质中的折

射角, $\left(\frac{h_1^1}{v_{11}\cos\theta_1} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h_1^j}{v_{1j}\cos\theta_{1j}} \right) \cdot v_{1k}\sin\theta_{1k}$ 表示震波

在第 k 层介质中的传播距离的水平投影, $\left(\frac{h_1^1}{v_{11}\cos\theta_1} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h_1^j}{v_{1j}\cos\theta_{1j}} \right) \cdot v_{1k}\cos\theta_{1k}$ 表示震波在第 k 层介质中的

传播距离的竖直投影, 即震源所在的第 k 层介质的层厚 h_0 , 此即式 (3) 的物理含义。

对于式 (1)、(2), 因为 h_1^j 是第 j 层介质的层厚, θ_{1j} 是台站 1 发出震波实际路径射入第 j 层介质中的折射角或射出第 j 层介质中的入射角, $h_1^j \tan\theta_{1j}$ 表示台站 1 发出震波实际路径在第 j 层介质中的射线的水平方向长度, 则 $\sum_{j=1}^{k-1} h_1^j \tan\theta_{1j}$ 就表示震波在第 1 层—第 $k-1$

层介质中的射线的水平方向长度之和, $\left(\frac{h_1^1}{v_{11}\cos\theta_1} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h_1^j}{v_{1j}\cos\theta_{1j}} \right) \cdot v_{1k}\sin\theta_{1k} + \sum_{j=1}^{k-1} h_1^j \tan\theta_{1j}$ 就表示震波在

第 1 层—第 k 层介质中的射线的水平方向长度之和, 此即震源与台站的水平方向距离。

ϕ 表示震波传播路径所在竖直平面与 x 轴夹角, $\left[\left(\frac{h_1^1}{v_{11}\cos\theta_1} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h_1^j}{v_{1j}\cos\theta_{1j}} \right) \cdot v_{1k}\sin\theta_{1k} + \sum_{j=1}^{k-1} h_1^j \tan\theta_{1j} \right] \cdot \cos\phi$ 就表示震源与台站的水平方向距离在 x 轴上的投影,

$\left[\left(\frac{h_1^1}{v_{11}\cos\theta_1} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h_1^j}{v_{1j}\cos\theta_{1j}} \right) \cdot v_{1k}\sin\theta_{1k} + \sum_{j=1}^{k-1} h_1^j \tan\theta_{1j} \right] \cdot \sin\phi$ 就表示震源与台站的水平方向距离在 y 轴上的投影,

$\left(\frac{h_1^1}{v_{11}\cos\theta_1} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h_1^j}{v_{1j}\cos\theta_{1j}} \right) \cdot v_{1k}\cos\theta_{1k}$ 就表示震源与台站的水平方向距离在 z 轴上的投影,

$\left[\left(\frac{h_1^1}{v_{11}\cos\theta_1} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h_1^j}{v_{1j}\cos\theta_{1j}} \right) \cdot v_{1k}\sin\theta_{1k} + \sum_{j=1}^{k-1} h_1^j \tan\theta_{1j} \right] \cdot \cos\phi$ 就表示震源与台站的水平方向距离在 x 轴上的投影,

$\sum_{j=1}^{k-1} h_1^j \tan \theta_{1j} \cdot \sin \phi_1$ 表示震源与台站水平方向距离在 y

轴上的投影。即式 (1)、(2) 含义。

1.3 任意水平层状介质中的波前正演法

参数方程式 (1) ~ (3) 是由一个台站的震波走时正演而来, 波前分布即为震源的可能位置。如果再得到另外 3 个台站的监测到时, 采用相同的方法正演, 则可得到另 3 个代表震源可能位置的波前分布。这样 4 个波前曲线的交点, 一定是震源位置, 在代数意义上就是 4 个台站对应参数方程的公共解。

当已知 4 个台站的参数方程时, 包含 16 个未知参数: $T_1, \theta_1, \mu_1, \phi_1; T_2, \theta_2, \mu_2, \phi_2; T_3, \theta_3, \mu_3, \phi_3; T_4, \theta_4, \mu_4, \phi_4$ 。表示台站 i 的时空位置。

对于每两个台站, 由 x, y, h 坐标分别相等能构建 3 个线性独立方程, 4 个台站建立 9 个线性独立方程; 4 个台站的走时差 $T_1 - T_2, T_2 - T_3$ 和 $T_3 - T_4$ 已知能构建 3 个线性独立方程; 由几何关系 $\cos \theta_1 = \frac{h_1^1}{v_{\text{层1}} T_1}$,

$\cos \theta_2 = \frac{h_2^1}{v_{\text{层1}} T_2}, \cos \theta_3 = \frac{h_3^1}{v_{\text{层1}} T_3}, \cos \theta_4 = \frac{h_4^1}{v_{\text{层1}} T_4}$ 可建立 4 个等式方程。

由 4 个台站波前分布曲面分布方程、走时时差方程、球面波在第一层介质中几何关系, 恰好构建 16 个线性独立方程, 可解出全部 16 个未知数: $T_1, \theta_1, \mu_1, \phi_1; T_2, \theta_2, \mu_2, \phi_2; T_3, \theta_3, \mu_3, \phi_3; T_4, \theta_4, \mu_4, \phi_4$ 。得到震源坐标。

2 复杂非线性系统的简化

三维坐标下的观测系统中, 描述台站分布位置的参数包括台站 i 距第 1 层介质分界面的距离 h_i^1 , 以及台站 i 与震源的水平距离 x_i, y_i 。三维坐标下的波前正演法, 最少需要 4 个台站才能组成适定的方程组。对于方程:

$$\cos \theta_i = \frac{h_i^1}{v_{\text{层1}} T_i} \quad (i=1, 2, 3, 4), \quad (4)$$

以及方程:

$$T_{i+1} - T_i = a_i \quad (i=1, 2, 3), \quad (5)$$

式中, a_i 表示监测台站到时时差。

式 (4)、(5) 包含 7 个方程, 以及 $T_1, \theta_1, T_2, \theta_2, T_3, \theta_3, T_4, \theta_4$ 8 个未知数, 可根据 7 个方程消去 7 个未知数, 即同样将 8 个未知数用一个未知数表示。

设 $\frac{T_1}{T_2} = m$, 则根据式 (5) 得

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{ma_1}{1-m}, \\ T_2 &= \frac{a_1}{1-m}, \\ T_3 &= \frac{a_1}{1-m} + a_2, \\ T_4 &= \frac{a_1}{1-m} + a_2 + a_3. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

将 T_1, T_2, T_3, T_4 代入方程 (4), 即可将 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 也用未知数 m 表示,

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{h_1^1}{v_{\text{层1}}} \cdot \frac{1-m}{ma_1}, \\ \cos \theta_2 &= \frac{h_2^1}{v_{\text{层1}}} \cdot \frac{1-m}{a_1}, \\ \cos \theta_3 &= \frac{h_3^1}{v_{\text{层1}}} \cdot \frac{1-m}{a_1 + a_2 - ma_2}, \\ \cos \theta_4 &= \frac{h_4^1}{v_{\text{层1}}} \cdot \frac{1-m}{a_1 + a_2 + a_3 - ma_2 - ma_3}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

新方程组中, 含有 $\mu_1, \phi_1, \mu_2, \phi_2, \mu_3, \phi_3, \mu_4, \phi_4, m$, 共 9 个参数, 相应应有 9 个非线性方程构成适定非线性方程组。原非线性系统得以简化。

3 倾斜层状介质中的震源定位

文献[14]提出的几何平均法和文献[15]提出的正反演联用法的算法要求, 台站布设于地表水平面, 对于水平层状介质, 各台站至第一层介质分界面距离相等, 因此台站竖坐标 $h_i^1 = h_j^1$ (i, j 为台站号, 且 $i \neq j$)。

对于波前正演法, 是任意观测系统下的定位方法, 算法本身不要求各台站布置在同一水平面上, 即台站竖坐标可以有 $h_i^1 \neq h_j^1$, 定位计算过程不受影响。

波前正演法不要求台站竖坐标 $h_i^1 = h_j^1$, 但对台站发出震波的波前在分层介质中正演时, 要求波阵面向前正演推进的方向与介质分界面正交, 这样通过波前正演使震源坐标 (x_0, y_0, h_0) 重新参数化为新参数 (μ, ϕ) 的方法才有效。波前正演法波阵面向前推进的方向, 一般与所在的三维坐标系的 z 轴平行。而现有台站布局采用的大地坐标系, z 轴一般是与地表水平面正交, 而不是与岩土层分界面正交。因此如果采用台站所用的大地坐标系, 波前正演的推进方向与地表水平面正交, 而不是与介质分界面正交, 波前正演法的计算过程将不再适用。因此, 要将波前正演法应用于倾斜层状介质, 需要先将台站所在的大地坐标系进行旋转, 旋转至新坐标系的 z 轴与介质分界面正交为止, 即可应用本文前述的波前正演法的计算方法定位。

正是因为波前正演中波前面向前推进方向, 须保持与介质分界面正交, 因此倾斜分层介质虽然产状相对于

地表水平面倾斜, 但各个分界面之间保持平行, 这样就能保证波前正演法中波前面的推进方向在各层中均与介质分界面正交, 使得波前正演计算过程得以继续。

所以本文须特殊限定倾斜分层介质的分布方式。以保证无论倾斜介质的层数是二层还是多层, 只需将台站坐标旋转, 台站水平坐标 (x_i, y_i) 变化至与介质分界面平行的平面内, 台站铅垂坐标变化为至第一层介质分界面的垂直距离, 即可将二层倾斜介质或多层倾斜介质中的震源定位问题转化为不规则观测系统下水水平层状介质中的定位问题, 即可使用波前正演法。

下面列出倾斜层状介质中波前正演法计算步骤:

条件: 将介质分界面延伸, 设介质分界面的延伸面与地表水平面相交于直线 l ; 直线 l 与台站所在大地坐标系的 y 轴正向夹角为 α ; 介质分界面法线与地表水平面法线的夹角为 β 。

(1) 将台站所在大地坐标系绕 z 轴旋转 α 角度 (α 有正负号, 正号表示顺时针旋转, 负号表示逆时针旋转), 使旋转后的新坐标系的 y 轴与直线 l 平行, 台站的水平坐标由 (x_i, y_i) 变为

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha, \\ y'_i &= -x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

旋转过程见图 1。

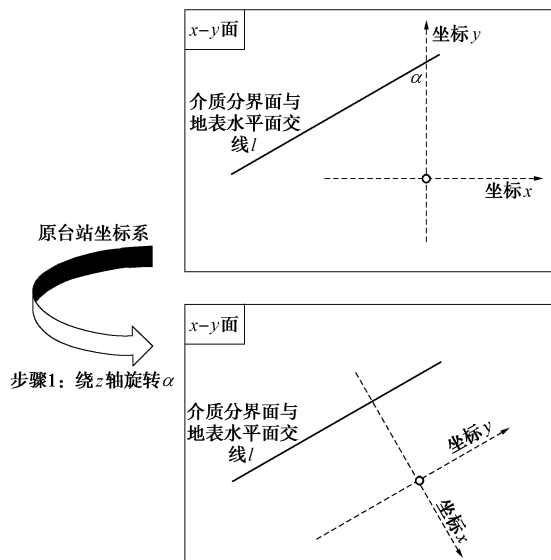


图 1 台站所在大地坐标系的第一次旋转

Fig. 1 First rotation of geodetic coordinate system of stations

(2) 步骤 (1) 得到的新坐标系绕 y 轴 ($x=0, z=0$) 旋转 β 角度 (β 有正负号, 正号表示顺时针旋转, 负号表示逆时针旋转), 使旋转后的新坐标系的 z 轴与介质分界面的法线平行, 第二次旋转后台站的三维坐标由 (x'_i, y'_i, z'_i) 变为

$$\left. \begin{aligned} x''_i &= x'_i \cos \beta + z'_i \sin \beta \\ &= (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha) \cos \beta + z'_i \sin \beta, \\ y'_i &= -x'_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha, \\ z'_i &= -x'_i \sin \beta + z'_i \cos \beta \\ &= -(x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha) \sin \beta + z'_i \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

步骤 (2) 旋转过程见图 2。

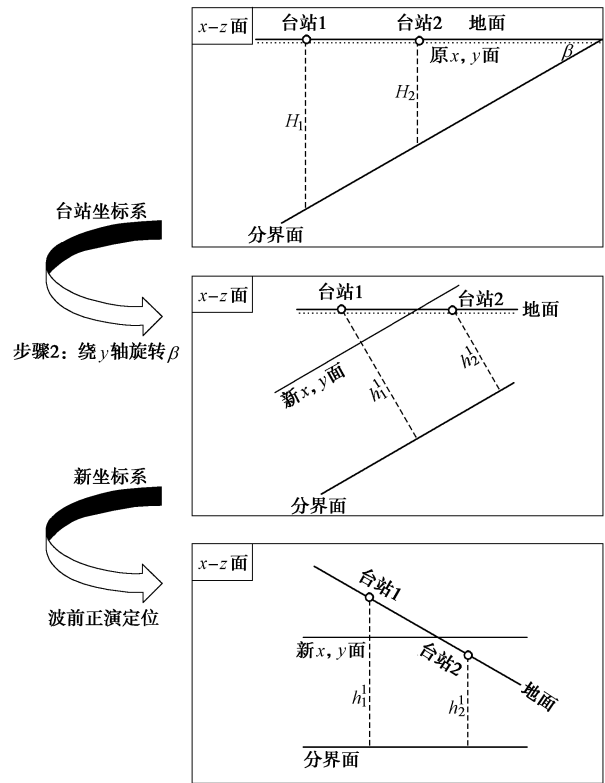


图 2 台站坐标系的第二次旋转

Fig. 2 Second rotation of coordinate system of stations

(3) 步骤 (2) 得到新坐标系 (x, y) 坐标面与介质分界面平行, 可在此坐标系下采用波前正演法进行震源定位。这个新坐标系下, 台站的水平坐标按式 (9) 计算。

(4) 计算台站至介质分界面距离。对于台站至介质分界面距离, 不能应用式 (9) 计算。由于已知各台站与介质分界面竖直方向距离 H_i , 则可取台站距分界面竖直方向距离 H_i 在分界面法线的投影: $h_i = H_i \cdot \cos \beta$, h_i 即台站距介质分界面的垂直距离。

(5) 将震源坐标回代, 旋转回原台站所在的大地坐标系。先将新坐标系绕 y 轴向回旋转 $-\beta$ 度 ($-\beta$ 有正负号, 正号表示顺时针旋转, 负号表示逆时针旋转), 将震源坐标转换至步骤 (2) 中第二次旋转前的坐标系, 即步骤 (1) 中旋转一次后的坐标系, 得到 x', y', z' 。

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cdot \cos(-\beta) + z \cdot \sin(-\beta), \\ z' &= -x \cdot \sin(-\beta) + z \cdot \cos(-\beta). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

将坐标系绕 z 轴向回旋转 $-\alpha$ 度 ($-\alpha$ 有正负号, $-\alpha$ 正号表示顺时针旋转, 负号表示逆时针旋转), 将震源坐标转换至步骤 (1) 中第一次旋转前的原大地坐标系, 即未经过旋转的原台站所在的大地坐标系:

$$\begin{cases} x'' = x' \cdot \cos(-\alpha) + y' \cdot \sin(-\alpha), \\ y'' = -x' \cdot \sin(-\alpha) + y' \cdot \cos(-\alpha). \end{cases} \quad (11)$$

得新坐标 x'' , y'' , z' , 即所得最终震源坐标。

4 微震试验工程背景介绍

选定在阜新某金矿进行微震试验。矿区位于东经 $121^{\circ}43'04''$, 北纬 $41^{\circ}53'04''$ 。矿山采用竖井和斜井联合开拓, 单罐笼配平衡锤提升。矿山开拓有 4 个中段: 223 m 中段、180 m 中段、140 m 中段及 100 m 中段。223 m 中段已采空废弃。根据矿山生产现状及矿体赋存条件, 采场自上而下水平分层开采, 目前矿山矿体采用地下开采, 在充分利用原有开拓系统的基础上, 采用竖井-盲斜井联合开拓, 地表—180 m 平面采用竖井运输, 180 m 平面—140 m 平面和 180 m 平面—100 m 平面通过斜井进行运输。将传感器布设在井下正开采约 28° 倾斜软泥岩斜井底板, 泥岩下方为上表面 73° 倾斜坚硬矿层。试验仪器包括无分向传感器、构造物理变形场 12 通道数据集线器和 48 通道数据记录器。

5 微震试验的理论计算

表 1 为根据前文所述金矿内传感器位置及各传感器监测到时的换算数据, 实际使用时, 只取用到时时差, 因此, 表 1 中的监测到时的发震时刻均已调整为 0 s, 以便于校核发震时刻的定位效果。

表 1 定位条件及台站参数

Table 1 Positioning conditions and parameters of stations

台站号	X/m	Y/m	距分界面竖直距离 H/m	监测到时/s
1	-866.80	1901.33	1214.210	1.150
2	-211.10	1725.64	734.214	1.003
3	444.59	1549.95	254.210	0.885
4	266.03	1539.23	414.210	0.917
5	412.44	2085.64	14.210	0.880
6	212.44	2432.05	14.210	0.919
7	-758.85	-2285.64	3214.210	1.689
8	-2758.85	1178.46	3214.210	1.689
9	-3490.90	-1553.59	5214.210	2.216
10	0	0	1414.210	

将介质分界面延伸, 设介质分界面的延伸面与地表水平面相交于直线 l ; 直线 l 与台站所在大地坐标系的 y 轴正向夹角为 30° ; 介质分界面法线与地表水平面法线的夹角为 -45° 。震源坐标为: $x=200 \text{ m}$, $y=400 \text{ m}$, $z=-3000 \text{ m}$ 。

首先将台站所在大地坐标系 y 轴旋转至与直线 l 平行。利用式 (8), 使台站所在原大地坐标系绕 z 轴旋转 $\alpha=-30^{\circ}$, 台站坐标变化情况从略。

再利用式 (9) 将台站所在坐标系绕 y 轴旋转 $\beta=45^{\circ}$, 使台站坐标系的 z 轴与介质分界面法线方向平行。台站水平坐标变化从略。

台站监测到时时差为: $a_1=T_2-T_1=-0.248 \text{ s}$, $a_2=T_3-T_2=0.034 \text{ s}$, $a_3=T_4-T_3=1.211 \text{ s}$ 。利用数值计算软件 Matlab 中 fsolve 函数, 取初值:

$$\begin{aligned} &(\mu_1, \phi_1, \mu_2, \phi_2, \mu_3, \phi_3, \mu_4, \phi_4, m) \\ &= (0.3, -2, 0.3, -2, 0.3, -2, 0.3, 0, 1.3). \end{aligned}$$

解得定位参数为

$$\begin{aligned} &(\mu_1, \phi_1, \mu_2, \phi_2, \mu_3, \phi_3, \mu_4, \phi_4, m) \\ &= (0.4012, -2.5177, 0.3333, -2.9188, \\ &0.3185, -2.68, 0.1889, 0.0954, 1.2823). \end{aligned}$$

代入 4 个台站的参数方程中, 得到震源位置坐标、发震时刻的计算结果, 平均值为

$$\begin{cases} x_0 = -2116.79 \text{ m}, \\ y_0 = 454.59 \text{ m}, \\ h_0 = 1058.31 \text{ m}, \\ t_0 = 0.010 \text{ s}. \end{cases}$$

则震源在新坐标系下的坐标为 $x=-2116.79 \text{ m}$, $y=454.59 \text{ m}$, $z=-2058.30 \text{ m}$ 。

上述震源坐标属于旋转后的坐标, 不够直观。为了直观了解震源的位置, 需将新坐标系下的震源坐标回代, 旋转回原台站所在的大地坐标系。

新坐标系绕 y 轴向回旋转 $-\beta=-45^{\circ}$, 得新坐标: $x'=-41.36 \text{ m}$, $y'=454.59 \text{ m}$, $z'=-2952.24 \text{ m}$ 。

再将坐标系绕 z 轴向回旋转 $-\alpha=30^{\circ}$, 根据式 (11) 得震源在原大地坐标系的坐标计算值为 $x''=191.48 \text{ m}$, $y''=414.36 \text{ m}$, $z''=-2952.24 \text{ m}$ 。

6 波前正演法的条件数及病态程度衡量

对一个数值问题本身如果输入数据有微小扰动 (即误差), 引起输出数据 (即问题解) 相对误差很大, 这就是病态问题^[16]。例如, 计算函数值 $f(x)$ 时, 若 x 有扰动 $\Delta x = x - x^*$, 其相对误差为 $\frac{\Delta x}{x}$, 函数值

$f(x^*)$ 的相对误差为 $\frac{f(x) - f(x^*)}{f(x)}$, 相对误差比值:

$$\left| \frac{f(x) - f(x^*)}{f(x)} \right| \left/ \left| \frac{\Delta x}{x} \right| \right| \approx \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right| = C_p. \quad (12)$$

C_p 称为计算函数值问题的条件数^[17]。自变量相对误差一般不会太大, 如条件数 C_p 很大, 将引起函数值相对误差很大, 出现此情况就称问题病态^[17]。

一般情况下, 条件数 $C_p \geq 10$ 就认为是病态, 越大病态越严重。问题病态不因为计算方法, 是数值问题自身固有, 但可以采取特殊方法减少误差的危害。

波前正演法在实际数值计算中采用了确定性计算模型, 特别是模型层速度给予确定性的数值, 虽然层速度可测, 但实际生产过程中或应用过程中, 实际场地中完全水平成层或倾斜平行的情况少见, 且波速准确获取也是十分困难。介质信息存在误差, 特别是介质速度结构均存在一定的误差, 因此从理论上分析衡量波前正演法的病态程度, 对保证实际生产中的定位精度, 提高波前正演法的适用性尤为重要。

本文主要采用前文提到的“计算函数值问题的条件数”来衡量波前正演法的病态程度。为了计算和表示上的方便以节省篇幅, 以二层介质中的波前正演法为研究对象, 由于多层水平或倾斜介质中的波前正演法与二层介质中的体系和结构相同, 只是介质速度结构参数的多少不同, 因此二层介质中的波前正演法不但具备代表性, 而且更方便计算衡量病态程度的条件数。

为了衡量介质波速 $v_{\text{层1}}$, $v_{\text{层2}}$ 和介质层厚 h_i^1 的误差, 引起定位参数 $\mu_1, \phi_1, T_1, \theta_1, \mu_2, \phi_2, T_2, \theta_2, \mu_3, \phi_3, T_3, \theta_3, \mu_4, \phi_4, T_4, \theta_4$ 的偏差, 需要求这 16 个参数对 $v_{\text{层1}}$, $v_{\text{层2}}$ 和 h_i^1 的偏导数。

根据多元隐函数方程组的隐函数存在定理, 波前正演法共 16 个非线性方程, 对应 16 个未知参数, 因此只要其对应偏导数组成的函数行列式 (或称雅可比式) 在方程解处不为 0, 则该非线性方程组可确定 16 个存在导数的一元隐函数。16 个一元隐函数在方程解处导数计算方法是: 16 个非线性方程分别对每个未知参数求偏导数, 组成的雅可比式每一行分别是某一非线性方程对 16 个未知参数的偏导数, 雅可比式每一列是 16 个非线性方程对某一未知参数的偏导数, 由此构成 16 行 16 列的函数行列式, 作为 16 个未知参数对某一速度结构参数 ($v_{\text{层1}}$, $v_{\text{层2}}$ 或 h_i^1) 偏导数的分母^[18]。

对于未知参数对速度结构参数导数的分子, 计算各非线性方程对某一速度结构参数的偏导数, 组成 16 维列向量, 用该列向量替换雅可比式的某一列, 被替换的列对应哪个未知参数, 由该分子、分母组成的分数值就是这个未知参数对速度结构参数的偏导数^[18]。

虽然理论上可以得到波前正演法任意一个未知参数对某一速度结构参数的导数的解析表达式, 但波前正演法有 16 个非线性方程, 对应 16 维的函数行列式, 写出偏导数的具体表达式是困难的, 也没有必要。

借助 Matlab 软件 det 函数, 编写出分子、分母行列式每一个分量表达式, 充分借助循环语句和思想, 代替重复性的计算, 就能自动高效地得到行列式的值, 进而得到偏导数。就可以利用式 (12) 计算条件数 C_p 。

本节分析选取不同波速比、不同台站间距、不同介质层厚度比、不同震源深度的若干算例, 借助 Matlab 等软件解出这些算例对应的 16 维非线性方程组, 然后就可以采用前文所述方法计算偏导数以及条件数。

图 3~6 图中: m1, f1, T1, c1, m2, f2, T2, c2, m3, f3, T3, c3, m4, f4, T4, c4 分别代表 $\mu_1, \phi_1, T_1, \theta_1, \mu_2, \phi_2, T_2, \theta_2, \mu_3, \phi_3, T_3, \theta_3, \mu_4, \phi_4, T_4, \theta_4$ 。需要指出的是, 后文图中没有未知参数 ϕ_4 相对于速度结构参数的条件数数据, 原因是各个算例中预先设计的台站以及震源位置恰好使参数 ϕ_4 为 0, 而 ϕ_4 相当于式 (12) 分母中的因变量 $f(x)$, 因此 ϕ_4 无法计算条件数, 下文分析中将其略去。

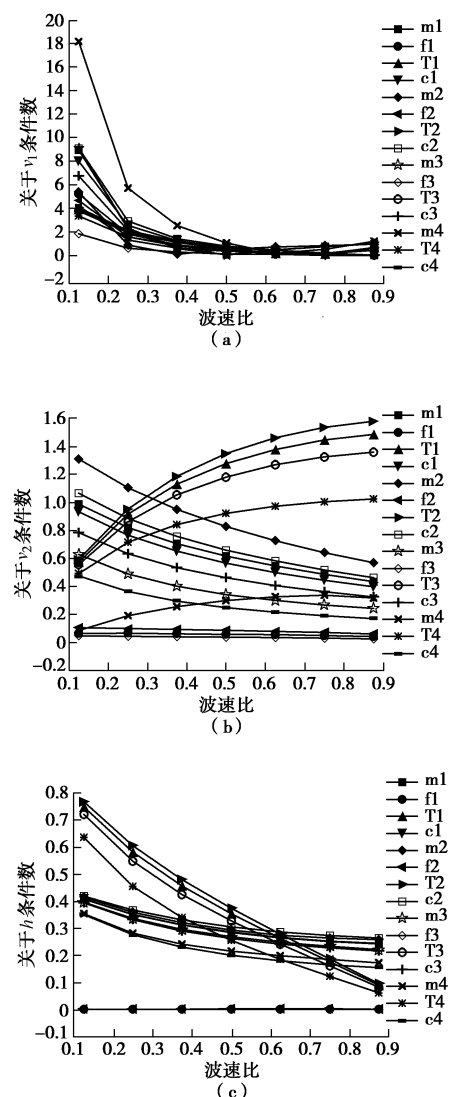


图 3 不同波速比下 16 个未知参数对 3 个速度结构参数的条件数

Fig. 3 Conditional numbers of 16 unknown parameters corresponding to 3 parameters of velocity structure under different wave velocity ratios

从图 3 (a) 可以看出, 随着波速比变小, 即二层介质波速相差增大, 各未知参数对波速 $v_{\text{层1}}$ 的条件数

明显增大,意味着对参数 $v_{\text{层1}}$ 的敏感性增大,即 $v_{\text{层1}}$ 的误差所引起的定位参数的相对误差变大。除 μ_4 外,图3(a)中最大条件数也小于10,图3(b)、(c)中对 $v_{\text{层2}}$, h_i^1 的条件数变化规律虽有不同,但总体均远远小于10。对于 μ_4 关于 $v_{\text{层1}}$ 的条件数,也是在波速比极小的小范围变化内急剧增加到略高于10,这种悬殊的波速比只有理论计算意义,在实际岩土工程中不可能遇到如此小的波速比,而观察图中岩土工程中常见的波速比范围, μ_4 关于 $v_{\text{层1}}$ 的条件数也远小于10。因此,在波速比变化过程中,波前正演法总体上不体现病态性。

从图4中可以看出,除了 μ_1 , μ_2 , μ_3 , μ_4 体现的规律不同外,其余参数都体现出较好的规律性,且图4(a)、(b)、(c)中的条件数最大值均不大于1.5,远小于10,可见从台站间距的不同变化角度看,波前正演法也不体现出数值病态性。

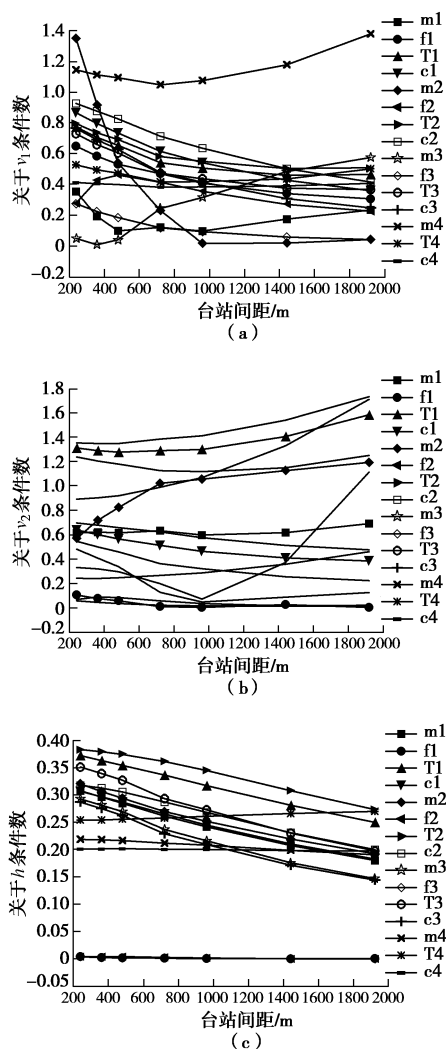


图4 不同台站间距下16个未知参数对3个速度结构参数的条件数

Fig. 4 Conditional numbers of 16 unknown parameters corresponding to 3 parameters of velocity structure under different station distances

从图5(a)中可以看出,与前图3相似,当震源深度增加到相当大的值之后,未知参数 μ_4 对 $v_{\text{层1}}$ 的条件数明显大于其他未知参数的条件数,但也不大于5.5,条件数小于10。图5分图2对 $v_{\text{层2}}$ 的条件数小于2,图5分图3对 h_i^1 的条件数小于0.4。因此,随着埋深增加,虽然未知参数相对于速度结构参数的条件数有增大趋势,但仍远小于判断问题为病态的临界值。

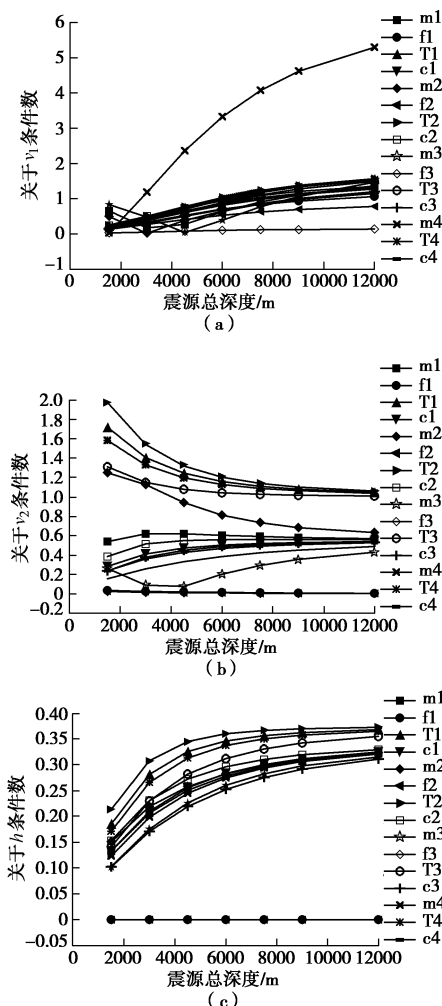


图5 不同震源深度下16个未知参数对3个速度结构参数的条件数

Fig. 5 Conditional numbers of 16 unknown parameters corresponding to 3 parameters of velocity structure under different depths

从图6(a)中可以看出,相对于 $v_{\text{层1}}$ 的条件数 μ_2 , μ_4 , T_1 , T_2 , T_3 , T_4 呈先增大,后减小的趋势,存在一个条件数最大的介质层厚度比,该比值大于0小于1,不等于1。综合观察图6(a)、(b)、(c)中相对于 $v_{\text{层1}}$, $v_{\text{层2}}$ 和 h_i^1 的条件数,均不大于2,因此随着介质层厚度比变化,问题也不体现数值病态性。

波前正演法利用了震源坐标的新参数化,是震源定位问题的一种新提法,这种新提法的条件数指标是否合格,还是条件数已达病态,关系到未知参数对定

位条件的敏感性,也直接关系到该算法的可行性。综合图3~6的条件数分析比较,可以看出波前正演法各变量的条件数总体上都不高,在岩土工程微震定位中常见的条件参数范围内,所有变量对速度结构参数的条件数都远小于10,可见波前正演法的提法并不是一个病态问题,利用常规数值解法即可满足计算要求。

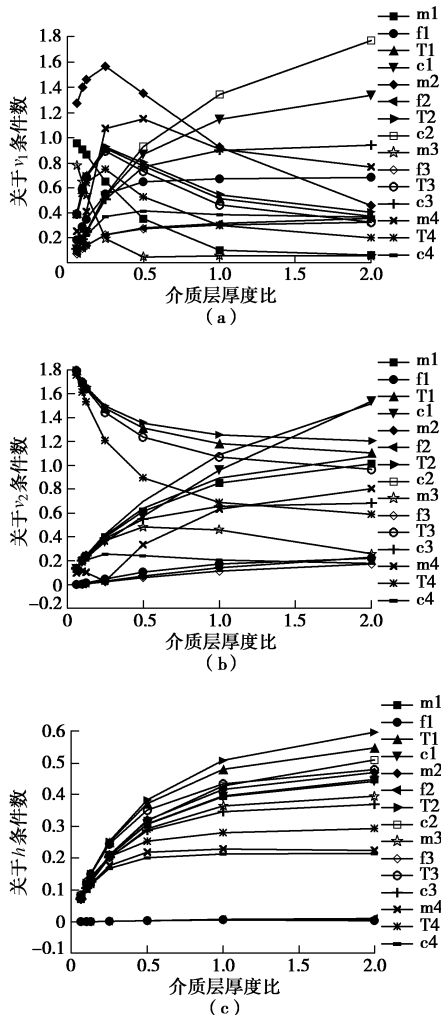


图6 不同介质层厚度比下16个未知参数对3个速度结构参数的条件数

Fig. 6 Conditional numbers of 16 unknown parameters corresponding to 3 parameters of velocity structure under different buried depth ratios

7 结 论

针对矿区地层构造的多样性,提出一系列针对性较强的特殊地层结构下的震源定位方法。层数任意和倾斜产状的地质结构在自然界中广泛存在,本文提出了层数任意的水平或倾斜层状介质中的震源定位方法:

(1) 波前正演法只需获取监测台站P波到时的时差,将发震时刻作为未知变量引入非线性方程组求

解,波前正演法算法中只有舍入误差,无论是在多层水平介质还是在多层倾斜介质中,均不包含模型误差。

(2) 波前正演法是基于任意观测系统的定位方法。在多种不同定位条件下,包括介质层的层厚相差较大,介质的非均匀性减弱,性质更趋近于均匀介质的情况下,波前正演法的定位效果良好,且优于正反演联用法和经典线性法。

(3) 通过将台站所在的大地坐标系进行两次旋转,使得新坐标系的坐标轴与倾斜介质的产状平行正交,从而将多层倾斜介质中的震源定位问题转化为不规则观测系统下多层水平介质中的震源定位问题。

(4) 提出了倾斜分层介质中台站所在大地坐标系的正交旋转变换计算公式,在得到震源坐标计算值后,为了直观了解震源位置,分析推导了将计算坐标重新旋转回原大地坐标系的方法与公式。

(5) 计算了波前正演法16个未知参数对3个速度结构参数的条件数,多种定位条件下的条件数计算结果表明,在岩土工程常见的条件参数范围内,条件数均远小于10,因此波前正演法对震源定位问题的新提法是良态的,速度结构条件参数的误差,不会导致待解未知参数的较大误差,因此采用常规数值计算方法即可对问题求解。

参考文献:

- [1] 谢兴楠, 叶根喜, 柳建新. 矿山尺度下微震定位精度及稳定性控制初探[J]. 岩土工程学报, 2014, 36(5): 899 - 904. (XIE Xing-nan, YE Gen-xi, LIU Jian-xin. On control of accuracy and stability of microseismic location in a mining scale[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, 36(5): 899 - 904. (in Chinese))
- [2] 胡静云, 李庶林. 矿震P波到时拾取优化与降低震源定位误差应用研究[J]. 岩土工程学报, 2014, 36(10): 1940 - 1946. (HU Jing-yun, LI Shu-lin. Optimization of picking mine microseismic P-wave arrival time and its application in reducing error of source locating[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, 36(10): 1940 - 1946. (in Chinese))
- [3] 赵国彦, 邓青林, 马 举. 基于FSWT时频分析的矿山微震信号分析与识别[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(2): 306 - 312. (ZHAO Guo-yan, DENG Qing-lin, MA Ju. Recognition of mine microseismic signals based on FSWT time-frequency analysis[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, 37(2): 306 - 312. (in Chinese))
- [4] 程爱平, 高永涛, 梁兴旺, 等. 煤矿底板潜在突水危险区微震识别研究[J]. 岩土工程学报, 2014, 36(9): 1727 - 1732.

- (CHENG Ai-ping, GAO Yong-tao, LIANG Xing-wang, et al. Identification of potential water inrush areas in coal floor by using microseismic monitoring technique[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(9): 1727 - 1732. (in Chinese))
- [5] 彭府华, 李庶林, 程建勇, 等. 中尺度复杂岩体应力波传播特性的微震试验研究[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(2): 312 - 319. (PENG Fu-hua, LI Shu-lin, CHENG Jian-yong, et al. Experimental study on characteristics of stress wave propagation in the mesoscale and complex rock mass by microseismic monitoring[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(2): 312 - 319. (in Chinese))
- [6] 姜福兴, 史先锋, 王存文, 等. 高应力区分层开采冲击地压事故发生机理研究[J]. 岩土工程学报, 2015, **37**(6): 1123 - 1131. (JIANG Fu-xing, SHI Xian-feng, WANG Cun-wen, et al. Mechanical mechanism of rock burst accidents in slice mining face under high pressure[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, **37**(6): 1123 - 1131. (in Chinese))
- [7] 潘立友, 陈理强, 张若祥. 深部两软煤层沿空巷道冲击地压成因与防治研究[J]. 岩土工程学报, 2015, **37**(8): 1484 - 1489. (PAN Li-you, CHEN Li-jiang, ZHANG Re-xiang. Causes for rockburst and control of gob side entry in deep two soft coal seams[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, **37**(8): 1484 - 1489. (in Chinese))
- [8] 姜福兴, 冯宇, KOUAME K A, 等. 高地应力特厚煤层“蠕变型”冲击机理研究[J]. 岩土工程学报, 2015, **37**(10): 1762 - 1768. (JIANG Fu-xing, FENG Yu, KOUAME K A, et al. Mechanism of creep-induced rock burst in extra-thick coal seam under high ground stress[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, **37**(10): 1762 - 1768. (in Chinese))
- [9] 杨伟利, 姜福兴, 杨鹏, 等. 特厚煤层冲击地压重复发生的机理研究[J]. 岩土工程学报, 2015, **37**(11): 2045 - 2050. (YANG Wei-li, JIANG Fu-xing, YANG Peng, et al. Mechanism of repeated rock bursts in extra-thick coal seam[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, **37**(11): 2045 - 2050. (in Chinese))
- [10] 于群, 唐春安, 李连崇, 等. 基于微震监测的锦屏二级水电站深埋隧洞岩爆孕育过程分析[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(12): 2315 - 2322. (YU Qun, TANG Chun-an, LI Lian-chong, et al. Nucleation process of rockbursts based on microseismic monitoring of deep-buried tunnels for Jinping II Hydropower Station[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(12): 2315 - 2322. (in Chinese))
- [11] GEIGER L. Probability method for the determination of earth-quake epicenters from arrival time only[J]. Bull St Louis Univ, 1912, **8**: 60 - 71.
- [12] 陈棋福, 张跃勤, 周静. 数字观测时代的全球三维结构与地震定位研究[J]. 地震, 2001, **21**(2): 29 - 40. (CHEN Qi-fu, ZHANG Yue-qin, ZHOU Jing. Review of earthquake location with three dimensional earth model for digital seismic observation[J]. Earthquake, 2001, **21**(2): 29 - 40. (in Chinese))
- [13] 潘一山, 赵扬锋, 官福海, 等. 矿震监测定位系统的研究及应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, **26**(5): 1002 - 1011. (PAN Yi-shan, ZHAO Yang-feng, GUAN Fu-hai, et al. Study on rockburst monitoring and orientation system and its application[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, **26**(5): 1002 - 1011. (in Chinese))
- [14] 张向东, 王帅, 赵彪, 等. 二层水平介质中震源的精确定位[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(6): 1044 - 1050. (ZHANG Xiang-dong, WANG Shuai, ZHAO Biao, et al. Precise positioning in double-layer horizontal media[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(6): 1044 - 1050. (in Chinese))
- [15] 张向东, 王帅, 贾宝新. 二层水平介质球面波正反演联用与震源定位[J]. 岩土工程学报, 2015, **37**(2): 225 - 234. (ZHANG Xiang-dong, WANG Shuai, JIA Bao-xin. Positioning of seismic sources combined with forward and inversion of spherical wave in double-layer horizontal media[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, **37**(2): 225 - 234. (in Chinese))
- [16] 曾繁慧. 数值分析[M]. 徐州: 中国矿业大学出版社, 2009: 6 - 7. (ZENG Fan-hui. Numerical analysis[M]. Xuzhou: China University of Mining and Technology Press, 2009: 6 - 7. (in Chinese))
- [17] 李庆扬, 王能超, 易大义, 等. 数值分析[M]. 5版. 北京: 清华大学出版社, 2008: 10 - 11. (LI Qing-yang, WANG Neng-chao, YI Da-yi, et al. Numerical analysis[M]. 5nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2008: 10 - 11. (in Chinese))
- [18] 同济大学应用数学系. 高等数学(下)[M]. 5版. 北京: 高等教育出版社, 2002: 34 - 35. (Department of Applied Mathematics, Tongji University. Higher mathematics(Vol 2)[M]. 5nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2002: 34 - 35. (in Chinese))