

DOI: 10.11779/CJGE201806003

# 考虑参数空间变异性的边坡稳定可靠性有限元极限分析

陈朝晖<sup>1, 2</sup>, 雷 坚<sup>1, 3</sup>, 黄景华<sup>1</sup>, 程晓辉<sup>4</sup>, 张志超<sup>1, 2</sup>

(1. 重庆大学土木工程学院, 重庆 400045; 2. 山地城镇建设与新技术教育部重点实验室(重庆大学), 重庆 400045;  
3. 中铁交通投资集团有限公司, 广西 南宁 530021; 4. 清华大学土木工程系, 北京 100084)

**摘要:** 当土性参数空间变异性较大时, 极限平衡法得到的滑移面不尽合理。阐述了基于广义变分原理的有限元极限分析方法, 采用混合有限元方法, 构筑了线性应力三角形单元与线性速度三角形单元, 结合强度折减法与线性规划算法, 建立了边坡稳定安全系数上下限分析方法, 分析了土的抗剪强度参数空间变异性对边坡稳定性的影响, 并与3种典型极限平衡法进行了对比。结果表明, FELA方法可有效搜索边坡临界滑移面, 并给出安全系数的严格上下限。对于简单均质边坡, 有限元极限分析与极限平衡法结果接近, 极限平衡法结果大多位于极限分析的上下限内; 对于空间变异性较大的边坡, 有限元极限分析法可以有效搜索可能的多种临界滑移面, 而极限平衡法则存在显著偏差, 且往往高估滑坡风险。强度参数的空间变异性还导致边坡安全系数分布形式变化显著, 仅采用安全系数无法反应这一变化。根据安全系数的分布形式, 给出了土性参数设计值建议。

**关键词:** 有限元极限分析; 极限平衡法; 空间变异性; 边坡稳定; 安全系数

中图分类号: TU470 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2018)06-0985-09

作者简介: 陈朝晖(1968-), 女, 教授, 博士生导师, 主要从事结构系统可靠性与耐久性基础理论及应用研究。E-mail: zhaohuic@cqu.edu.cn。

## Finite element limit analysis of slope stability considering spatial variability of soil strengths

CHEN Zhao-hui<sup>1, 2</sup>, LEI Jian<sup>1, 3</sup>, HUANG Jing-hua<sup>1</sup>, CHENG Xiao-hui<sup>4</sup>, ZHANG Zhi-chao<sup>1, 2</sup>

(1. School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China; 2. Key Lab. of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area (Chongqing Univ.), Ministry of Education, Chongqing 400045, China; 3. China Railway Communications Investment Group Co., Ltd., Nanning 530021, China; 4. Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** The slip surface obtained by the limit equilibrium method is not reasonable when the spatial variability of soil parameters is large. The finite element limit analysis method, FELA in simple, based on the generalized variational principle is introduced. By using the mixed finite element technology, the linear stress triangular elements and linear velocity triangular elements are proposed. By use of the strength reduction method and the optimization algorithm, the strict upper bound and lower bound of the safety factor of slopes are calculated. The influences of spatial variability of soil shear strength parameters on slope stability are analyzed, and the results are compared with those of the limit equilibrium methods. The results show that compared to the limit equilibrium method, the proposed FELA can search the critical slip surfaces effectively under spatial variability of soil strengths and provide the strict upper and lower bounds of safety factors of slopes. But the limit equilibrium method will search for unreasonable slip surfaces, and often overestimate the risk of landslides. The spatial variability of soil strengths results in the significant change in the distribution of safety factors. But the single safety factor can not reflect the change. According to the distribution of safety factors, the design value of soil parameters is suggested.

**Key words:** finite element limit analysis; limit equilibrium method; spatial variability; slope stability; safety factor

## 0 引言

由于沉积条件、应力历史、风化以及其他地质作用的差异以及测量技术方法的固有局限等, 导致岩土工程中土性参数具有显著的空间变异性, 且不同空间位置的土性参数还存在相关性, 而非完全独立, 该相

关性随空间距离增大而衰减。由于土体的沉积过程导致土性参数沿土体深度方向变异性大, 水平方向变异性较小, 土体性质的空间变异性表现出空间上的各向

基金项目: 国家自然科学基金项目(51608072)

收稿日期: 2017-03-31

异性。土性参数的空间变异性给边坡稳定分析中滑面的搜索与安全系数计算带来了新的难度,因此,将随机场理论、可靠性分析方法与边坡稳定理论结合成为研究热点。

常用边坡稳定分析方法包括:极限平衡法 (Limit Equilibrium 简记做 LE)、有限元法 (FEM) 和极限分析法 (LA) 等。其中, LE 法因其模型与计算简便,广为工程所用。根据对条间力与滑移面形状的假定不同, LE 法主要有 Fellenius 法、Bishop 法、Janbu 法、Morgenstern-Price 法和 Spencer 法等。Duncan<sup>[1]</sup>对 LE 法的系统对比表明,满足所有平衡条件(如 Janbu 法, Morgenstern-Price 法, Spencer 法)的严格 LE 法所得安全系数之间的差异不超过 12%,在工程允许范围之内。EI-Ramely 等<sup>[2]</sup>将土条的土体强度参数视为随机变量,采用 LE 法进行边坡稳定可靠性分析,但只考虑了土性参数沿滑移面的一维变异性,未反映空间变异性的影响。Cho<sup>[3]</sup>对整个边坡区域生成随机场,再进行边坡稳定极限平衡分析,但仍受限于 LE 法自身之不足,即: LE 法不涉及岩土本构关系,不能考虑边坡应力-应变发展过程;需提前假定滑移面;需对条间力做简化假定。因此,当土性参数分布复杂、空间变异性较大时,LE 法得到的滑移面不尽合理。此外,二维条分法还隐含了对于土性参数沿边坡长度方向均匀且完全相关的强假定,无法定量分析实际三维滑坡体量及滑坡位置。

与 LE 法相比, FEM 法不受边坡几何形状不规则性与材料不均匀性的限制,无需预先假定滑移面,引入了材料本构关系,可进行二维或三维的边坡应力、应变等发展过程分析,模拟土坡的破坏过程。FEM 法计算边坡安全系数通常采用强度折减法,即将土体视为理想弹塑性材料,分析时逐渐降低材料强度,直至边坡达到极限平衡状态,所对应的强度折减系数即为边坡安全系数。可见, LE 法和基于强度折减的 FEM 法对安全系数的定义本质上是一致的,二者均表示边坡抵抗临界滑移的冗余度<sup>[4]</sup>。

强度折减法的边坡失稳判据通常有:有限元计算是否收敛、广义或等效塑性应变从坡脚到坡顶是否贯通或特征点处位移是否突变。该判据依赖于某个或某几个单元的变形,不能代表整个土体稳定状态,且对人为经验依赖性大,不同失稳判据导致完全不同的临界滑移面与边坡稳定安全系数结果。

Drucker 等 1952 年提出极限分析思想。该方法从满足机动条件和屈服条件两方面入手给出了结构破坏荷载的严格上下限,清晰描述了结构破坏的整体特性,独具魅力,在岩土工程中一度得到广泛关注<sup>[5]</sup>。但由于构造静态容许应力场的难度,极限分析的应用过去

主要集中在上限解<sup>[6-8]</sup>。Lysmer 等<sup>[9]</sup>、Anderheggen 等<sup>[10]</sup>最早使用有限元和线性优化方法计算岩土工程平面应变问题的严格下限解,采用内部多面体近似逼近 Mohr-Coulomb 屈服面,从而用一系列线性不等式约束代替原有非线性不等式约束。Makrodimopoulos 等<sup>[11]</sup>、Sloan 等<sup>[12]</sup>、Krabbenhoft 等<sup>[13]</sup>、Yu 等<sup>[14]</sup>分别提出最速边缘优化迭代和锥优化算法,极大提高了有限元极限分析的计算效率。Huang 等<sup>[15]</sup>基于有限元极限分析方法计算了多种失效模式下的边坡风险,提出以滑坡体量作为失效后果判据。

本文基于塑性极限分析思想,分别构筑了常应力三角形单元与线性速度三角形单元,结合强度折减法与优化算法,建立了边坡稳定分析的有限元极限分析方法。针对一简单边坡算例,分析了土性参数空间变异性对临界滑移面形状、大小、边坡安全系数及其分布形式的影响,并与极限平衡法进行了对比,探讨两种方法对于边坡稳定性分析的适应性。

## 1 有限元极限分析方法

有限元极限分析 (Finite Element Limit Analysis, 简记为 FELA) 是基于塑性极限分析理论,结合广义变分原理与混合有限元方法,分别建立静力许可应力场和运动许可速度场,并应用线性规划算法,从而求解破坏荷载(或极限承载力)下限与上限的一种数值分析方法。有限元极限分析与传统位移有限元不同,后者依据虚功原理或最小势能原理,以结点位移为基本未知量,只能得到原问题的近似解,且通常要求单元之间位移、应变和应力连续;而有限元极限分析能得到原问题的严格上下限,应力场与速度场存在间断。以下阐述针对边坡稳定性分析的有限元极限分析基本思想与方法。

假设土为理想弹塑性材料,加载过程为比例加载,土质边坡稳定性问题的广义变分原理可写为

$$\min_{\dot{\mathbf{u}}} \max_{\sigma, \alpha} \alpha + \int_V \sigma^T \nabla \dot{\mathbf{u}} dV - \int_V \mathbf{b}^T \dot{\mathbf{u}} dV - \int_S (\alpha \mathbf{t}_{\text{ext}} + \mathbf{t}_s)^T \dot{\mathbf{u}} dS \\ \text{s.t. } F(\sigma) \leq \mathbf{0} \quad . \quad (1)$$

式中  $\alpha$  为荷载因子;  $\sigma$  为边坡内任一点应力状态;  $\mathbf{b}$  为边坡内体积力矢,通常为重力矢;  $\dot{\mathbf{u}}$  为边坡速度矢;  $\mathbf{t}_{\text{ext}}$  为边坡外荷载矢,对于边坡失稳问题,通常只考虑重力作用,该项为零;  $\mathbf{t}_s$  为孔隙压力;  $F(\sigma)$  为理想弹塑性材料屈服函数,可采用多面体近似将其转化为线性约束:

$$f_i \sigma - \mathbf{k}_i \leq 0 \quad (i=1 \sim n) \quad , \quad (2)$$

式中,  $f_i$ ,  $\mathbf{k}_i$  为对应的分段线性化屈服函数。

### 1.1 有限元下限解

满足平衡条件、应力边界条件,且处处不违背屈

服条件的应力分布所确定的荷载, 为实际破坏荷载的下限解 (Lower Bound, 简记为 LB), 此即下限定理, 对应的应力场称为静力许可应力场, 对应荷载称为可破坏荷载。下限解即求解满足静力许可条件的最大可破坏荷载, 对应的优化问题可表述为

$$\begin{aligned} \max_{\sigma} \quad & \alpha \\ \text{s.t.} \quad & \nabla \sigma + b = 0, \text{ in } V; \text{ 平衡条件} \\ & P^T \sigma = \alpha t, \text{ on } S; \text{ 边界平衡条件} \\ & F^T \sigma - k + s = 0, \quad s \geq 0; \text{ 屈服条件} \quad (3) \end{aligned}$$

式中  $P$  为应力在边界上的投影矩阵。在此, 引入松弛因子  $s$ , 以将不等式约束转化为等式约束。

构筑图 1 所示线性应力三角形单元求下限解<sup>[23]</sup>。图中, 每个结点有 3 个结点应力未知量  $\sigma^i = \{\sigma_{xx}^i, \sigma_{yy}^i, \tau_{xy}^i\}$ , 单元内部应力为常数。相邻单元间允许应力间断, 采用两个零厚度三角形界面单元模拟, 如图 1 中单元 123 和单元 234。因此结点 1 和 2, 3 和 4 的坐标与位移相同, 为两个单元的共用结点, 位移连续, 但结点应力值可以不同。静力许可应力场条件下, 单元结点应力满足屈服条件。

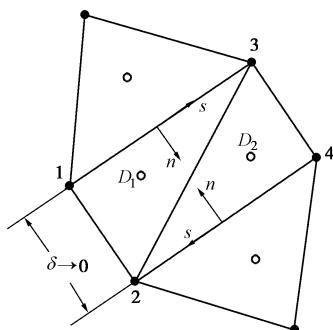


图 1 有限元极限分析的线性单元

Fig. 1 Linear elements for FELA

## 1.2 有限元上限解

满足速度边界条件、应变与速度相容条件的变形模式中, 由外功率不超过内部耗散功率而得到的荷载, 为实际破坏荷载的上限解 (Upper Bound, 简记为 UB), 此即上限定理, 满足上述条件的速度场称为运动许可速度场或机动场, 对应荷载称为可接受荷载。上限解即求解满足机动条件的最小可接受荷载, 对应的优化问题可表述为

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha + \int k^T \lambda dv - \int_V b^T \dot{u} dv \\ \text{s.t.} \quad & \nabla \dot{u} = F \lambda, \quad \lambda \geq 0; \text{ 流动准则} \\ & \int_S t^T \dot{u} ds = 1, \text{ 归一化边界耗散功率} \quad (4) \end{aligned}$$

式中, 由于破坏边界处速度间断, 具有耗散功, 对其进行归一化处理, 可将问题简化为分析荷载因子  $\alpha$ 。

有限元上限分析仍采用图 1 所示三结点三角形单

元, 每个结点有两个速度分量, 单元有 3 个应力分量, 单元为常应力、线性速度单元, 相邻单元间允许速度不连续, 仍采用零厚度界面单元模拟, 对应的速度满足流动法则, 结点应力满足屈服条件。

上述优化问题可采用两阶段拟牛顿算法进行优化求解, 详见文献[16]。

## 2 考虑参数空间变异性的边坡稳定可靠性分析

### 2.1 离散土性参数随机场

由均值、方差、相关函数及相关距离可以构建一个各向异性随机场。常用的相关函数有指型型、高斯型、指数余弦型、三角型等, 根据 Li 等<sup>[17]</sup>的研究, 边坡稳定可靠度对自相关函数的形式不敏感, 而对相关长度敏感, 则本文采用形式简单的指型型相关函数:

$$\rho(x_1, x_2; y_1, y_2) = e^{-\left(\frac{|x_1-x_2|}{l_h} + \frac{|y_1-y_2|}{l_v}\right)}, \quad (5)$$

式中,  $l_h$  和  $l_v$  分别表示水平和竖直相关距离。相关距离越大, 表明土性参数分布越平稳。 $x_1, x_2, y_1, y_2$  为随机场域  $\Omega$  内的坐标。

较通行的随机场离散方法有中心点法、局部平均法、谱表现法和 Karhunen-Loeve (K-L) 展开法等。其中, K-L 方法是将随机场展开为确定性函数和随机空间坐标的线性组合, 该方法对于各向异性、参数具有相关性的复杂随机场具有连续性较好、精度高的优点, 对于指型相关函数, 其特征函数具有解析解<sup>[18]</sup>:

$$\hat{H} = \bar{H} + \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(\theta) \sqrt{\lambda_n} f_n(x) \quad (x \in \Omega). \quad (6)$$

式中  $\bar{H}$  表示随机场的平均特性;  $\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(\theta) \sqrt{\lambda_n} f_n(x)$  表征了随机场的变异性。 $\xi_n(\theta)$  为一系列不相关的随机变量;  $\lambda_n$  和  $f_n(x)$  分别为特征值和特征函数。特征函数可以通过求解第二类 Fredholm 齐次积分方程得到。

设抗剪强度参数  $X$  服从对数正态分布, 则  $\ln X$  服从正态分布。由式 (6) 生成对应的正态随机场, 其均值和方差如下式所示:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\ln X} &= \sqrt{\ln[1 + \text{COV}_X^2]}, \\ \mu_{\ln X} &= \ln \mu_X - \frac{1}{2} \sigma_{\ln X}^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

经指数变换即可得到满足对数正态分布的抗剪强度参数随机场。

### 2.2 参数随机场模型下边坡稳定可靠性分析

采用前述 FELA 方法编程进行边坡稳定有限元极限分析<sup>[13]</sup>, 并结合强度折减法, 计算边坡安全系数:

$$F_s = \frac{\text{土体抗剪强度}}{\text{极限平衡状态剪应力}} = \frac{\tan \varphi}{\tan \varphi_{cr}} = \frac{c}{c_{cr}} \quad (8)$$

图 2 给出采用有限元下限法的边坡安全系数分析流程。安全系数上限解与此类似, 上限解输出改为  $F_{max}$ 。TOL 为收敛精度, 文中取 0.001。

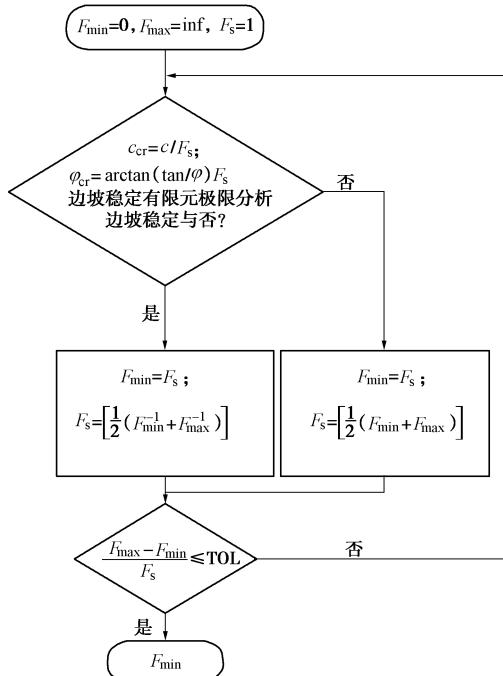


图 2 边坡安全系数有限元下限解分析流程

Fig. 2 Flow diagram of lower bound analysis of safety factor of slopes

选取 3 种常见的 LE 方法与 FELA 法进行对比, 包括简化 Bishop 法 (SB)、简化 Janbu 法 (SJ) 和 Morgenstern-Price 法 (MP)。其中 MP 法满足所有平衡条件; SB 法满足力矩平衡条件和竖向力平衡条件; 而 SJ 法只满足力的平衡条件, 不满足力矩平衡条件。

土性参数的空间变异性导致边坡安全系数不再为常数, 而是随机变量。基于前述 K-L 离散法建立强度参数随机场模型, 采用 Monte Carlo 法结合 FELA 法进行边坡稳定可靠性的功能函数见式 (9)。其中,  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  为参数随机场:

$$\left. \begin{array}{l} g(X) = F_s(X) - 1 \geq 0 \quad (\text{边坡安全}), \\ g(X) = F_s(X) - 1 < 0 \quad (\text{边坡失稳}) \end{array} \right\} \quad (9)$$

失效概率为

$$P_f = P[g(X) \leq 0] = P[F_s - 1 \leq 0] = \int_{F_s \leq 1} f(F_s) dF_s, \quad (10)$$

式中,  $f(F_s)$  为边坡安全系数的概率密度函数。

### 3 算例分析与讨论

#### 3.1 算例简述

如图 3 所示简单边坡。表 1 列出相应的土性参数, 其中抗剪强度参数服从对数正态分布, 相关距离根据

Phoon 等<sup>[19]</sup>的数据统计规律选取。

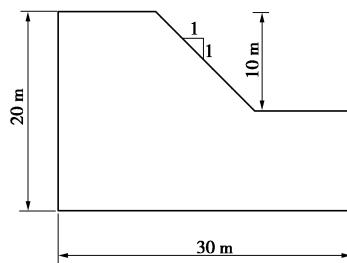


图 3 边坡形状

Fig. 3 Cross section

表 1 土性参数统计值

Table 1 Statistical properties of soil parameters

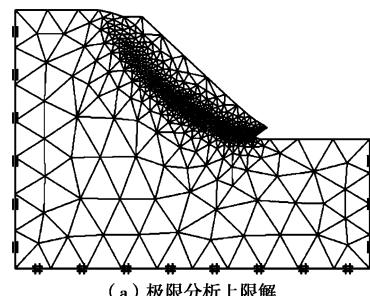
参数	$\mu$	COV	相关距离/m
$\gamma /(\text{kN} \cdot \text{m}^{-3})$	20	—	—
$\varphi /(^{\circ})$	30	0.3	$l_h=40; l_v=2$
$c/\text{kPa}$	10	0.3	$l_h=40; l_v=2$

#### 3.2 参数均值条件下的确定性分析

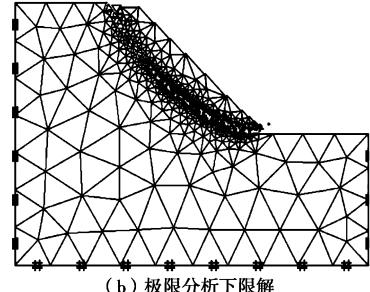
忽略土性参数的空间变异性, 各参数取表 1 中的均值, 即假设土壤抗剪强度在整个边坡内是均匀的。FELA 分析结果如图 4 (a)、(b) 所示, 安全系数上下限分别为 1.222 和 1.194, 与 LE 法的对比见图 4(c)。图 4 显示, 土性参数取均值时, FELA 法与各 LE 法得到的临界滑移面均通过坡脚, 各 LE 法得到的滑面位置、大小与形状接近, 而 FELA 法所得滑坡体面积比极限平衡小。各方法所得安全系数的大小关系为

$$F_s^{\text{SJ}} < F_s^{\text{LB}} < F_s^{\text{MP}} < F_s^{\text{SB}} < F_s^{\text{UB}}. \quad (11)$$

这表明, 满足大多数平衡条件的 MP 法和 SB 法所得到的安全系数在 FELA 法的上下限内, 并接近于上限解; 而只满足力的平衡条件, 不满足力矩平衡条件的 SJ 法, 所得结果小于 FELA 法的下限解, 在极限分析上下限之外。



(a) 极限分析上限解



(b) 极限分析下限解

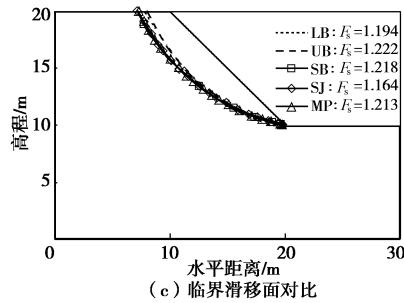


图4 均质土坡稳定性分析

Fig. 4 Stability analysis of homogeneous slope

### 3.3 典型随机场样本分析

考虑土性参数空间变异性对边坡稳定性的影响。Monte Carlo 法模拟 2000 次, 满足 MC 模拟稳定性要求。结果显示, 土性参数空间变异性导致多种可能临界滑移面, 滑移面形状、位置、大小及其相应安全系数均发生显著变化, 即使安全系数相同, 对应的滑移面也完全不同。以边坡安全系数 1.194 为例, 2000 个样本中有 12 个样本对应的安全系数值为 1.194, 相应临界滑移面如图 5 所示, 其中有 4 个滑移面经过坡面,

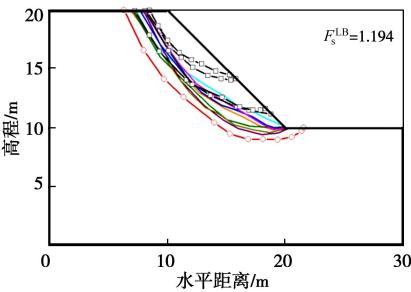
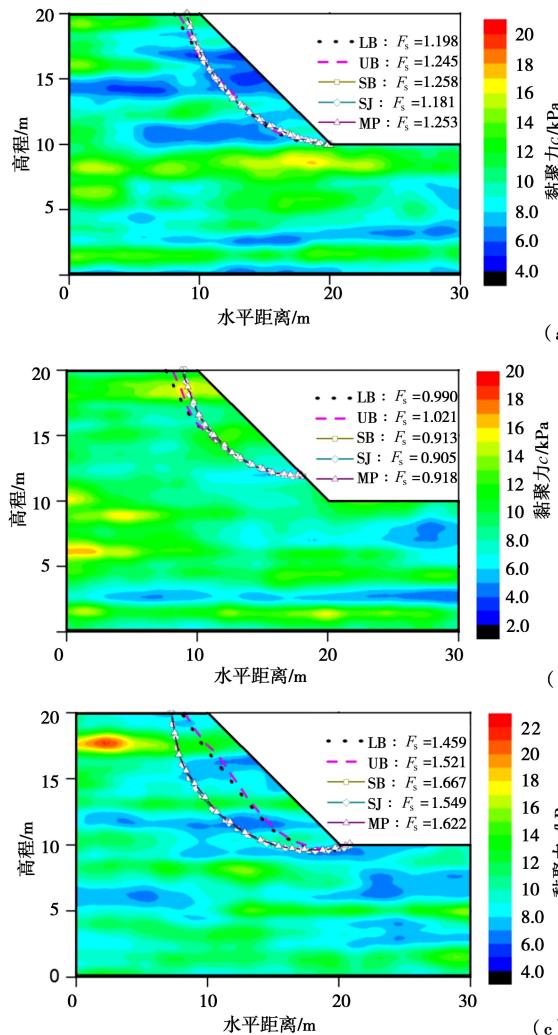


图5 同一安全系数对应的多种滑面形式

Fig. 5 Multiple critical slip surfaces with same safety factor

根据 FELA 结果, 选取 3 个安全系数与滑坡剪出口位置特点不同的典型样本进行比较, 如图 6 所示。其中, 样本 1 安全系数接近于参数取均值时的安全系

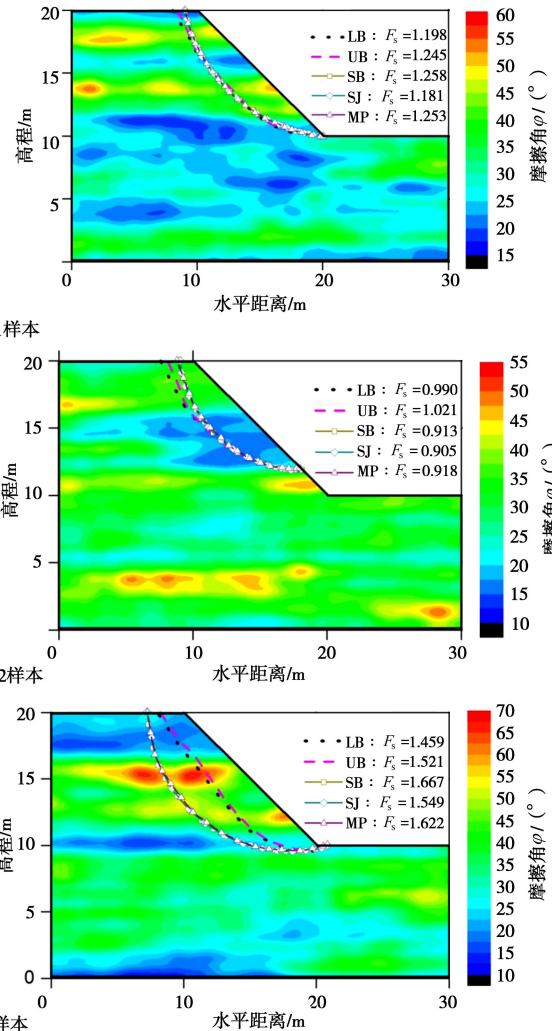


图6 随机场典型样本及分析结果

Fig. 6 Typical realizations of random fields and corresponding analysis results

1 个经过坡底, 其余临界滑移面经过坡脚。各滑坡面面积相差较大, 最小滑移面积为  $10.8 \text{ m}^2$ , 最大滑移面积为  $57.5 \text{ m}^2$ 。由此可见, 仅由边坡安全系数是无法合理评估滑坡大小和位置所产生的风险差异的, 而需与具体滑面形式及滑坡体量结合, 尤其当存在参数空间变异性时, 应当进行滑坡风险综合分析。

数, 滑坡剪出口位于坡脚; 样本 2 安全系数接近临界值 1, 滑坡剪出口位于坡面; 样本 3 安全系数为样本统计值的 95% 分位值, 滑坡剪出口位于坡底。图中边坡区域颜色由蓝到红表示土性参数取值由小到大。

因土性参数水平相关距离较大, 坚向相关距离较小, 参数云图呈水平层状。图 6 显示, 临界滑移面一般经过土体软弱区, 如<sup>#2</sup> 样本在坡面中部位置大片区域摩擦角较小, 因而临界滑移面经过该软弱区。上述 3 个典型样本的安全系数及其滑坡位置和形状的差异表明, 对于指定边坡, 土性参数空间变异性对边坡安全系数与滑移面位置、形状和滑移面积有显著影响, 这与确定性分析中临界滑移面只出现在坡脚的情形不同。

图 6 还对比了采用 LE 法得到的临界滑移面。显然, 不同 LE 法得到的极限滑移面都较接近, 与确定性分析结论一致, 而 FELA 法的滑移面与之相比则有所差异。如对于<sup>#3</sup> 样本, 其摩擦角云图存在红色区域, 该区域摩擦角大小接近均值的两倍, FELA 法所得临界滑移面基本与坡面平行, 滑移面积明显小于极限平衡法, 且各 LE 法计算得到的安全系数均大于 FELA 法的上限值。这一差异表明, 当土性强度参数空间变异性较大时, LE 法得到的滑移面和安全系数与实际可能存在较大出入, 这与文献[4]结论相一致。

图 7 对比了 3 个典型样本及均质土坡所对应的 FELA 法与各 LE 法得到的安全系数。可见, 针对不同样本, 安全系数相对大小关系有所不同, 如<sup>#2</sup> 样本 LE 法安全系数均小于 LB 法的结果, 而<sup>#3</sup> 样本 LE 法所得安全系数均大于 UB 法的结果。这表明, LE 法的计算结果可能既非实际安全系数的下限也非上限。当 LE 法与 FELA 法得到的临界滑移面吻合时, 安全系数相差不大, 如对于<sup>#1</sup> 样本, SB 法与 FELA 法上下限平均值的相对误差为 3.0%; 当所得临界滑移面差异较大时, 安全系数差异也较大, 如对于<sup>#3</sup> 样本, 两者的相对误差为 11.9%。

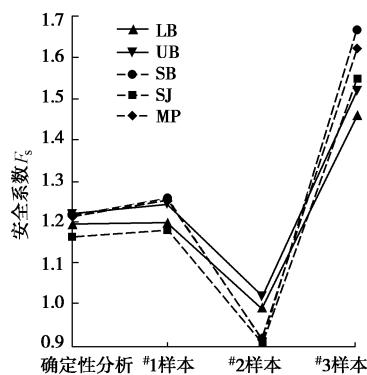


图 7 典型样本的安全系数对比

Fig. 7 Comparison of safety factors for typical samples

### 3.4 边坡安全系数统计规律分析

图 8 给出了基于 2000 个抗剪强度参数随机场样本, 由 FELA 法得到的边坡安全系数统计规律。经假设检验, 边坡安全系数服从对数正态分布。其中, 安全系数下限为 0.811~1.730, 失效概率下限为 0.089; 安全系数上限为 0.842~1.812, 失效概率上限为 0.047, 边坡安全系数的变异系数约为 0.1, 小于土性参数的变异性。

图 8 (a)、(b) 中, 由抗剪强度参数均值所做确定性分析得到的安全系数均位于安全系数概率分布曲线的 0.6 分位点, 即 60% 的安全系数低于该值。显然, 若采用土性参数均值进行边坡稳定性分析, 将极大低估滑坡风险。工程中常用的置信水平一般为 0.9, 0.95, 0.99, 根据该置信水平推算对应的土性参数代表值可得, 当土体强度参数取  $0.86 \mu_{c,\varphi}$  时, FELA 法所得安全系数上、下限分别为 1.009 和 1.039, 对应安全系数分布函数的 0.1 分位点, 即考虑土性参数变异性时, 采用该设计代表值更为合理。置信水平取为 0.95 和 0.99 时, 则对应的土性参数代表值分别为  $0.83 \mu_{c,\varphi}$  和  $0.77 \mu_{c,\varphi}$ 。若采用土性参数均值和方差的组合, 对应上述 3 种置信水平的设计代表值分别为  $\mu_{c,\varphi} - 0.47 \sigma_{c,\varphi}$ ,  $\mu_{c,\varphi} - 0.57 \sigma_{c,\varphi}$  和  $\mu_{c,\varphi} - 0.77 \sigma_{c,\varphi}$ 。

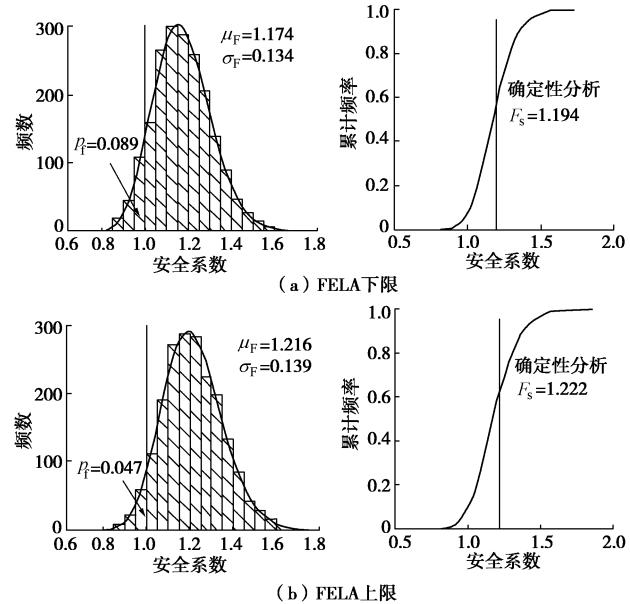


图 8 FELA 法的安全系数统计规律

Fig. 8 Statistical characteristics of safety factors by FELA

图 9 对比了 FELA 法和 LE 法所得安全系数的概率密度函数。经检验, LE 法所得安全系数也服从对数正态分布。图 9 显示, FELA 法所得安全系数概率密度函数较 LE 法“高瘦”, 安全系数的变异性较小, 因而 FELA 法所得失效概率也小于各 LE 法的失效概率, 后者为 9.25%~16.7%。

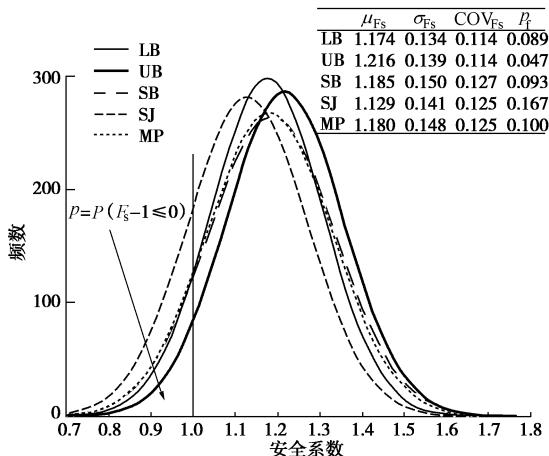


图 9 安全系数分布规律对比

Fig. 9 Comparison of distribution of safety factors

## 4 参数变异性对边坡稳定性的影响

### 4.1 变异系数的影响分析

统计表明, 摩擦角  $\varphi$  的变异性小于  $c$  的变异性<sup>[19]</sup>, 故重点研究  $c$  的变异性影响。令  $\varphi$  的变异系数为 0.3,  $c$  的变异系数由 0.3 变化到 0.8。如图 10 所示, 随着黏聚力  $c$  变异系数的增大, 安全系数的均值由 1.216 减小到 1.091, 失效概率由 0.047 增大到 0.297, 变化较安全系数显著。以下限法为例, 安全系数概率密度曲线随  $c$  的变异性变化如图 11 所示。可以看出随着  $c$  的变异性增大, 安全系数的均值变小, 安全系数概率密度曲线的峰值向左偏移, 且变得“矮胖”。即土性参数变异性对边坡可靠性影响较大, 若采用安全系数均值评估边坡安全性, 则无法反映这一变化。

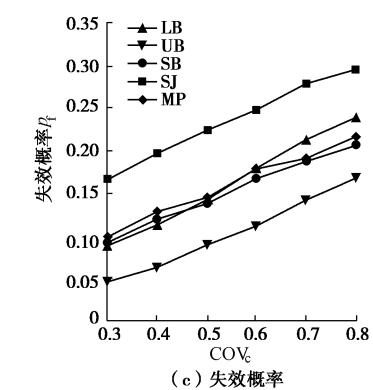
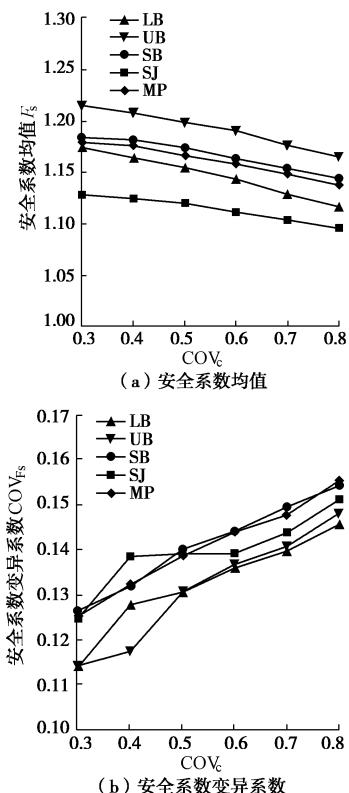


图 10 变异系数对边坡稳定性的影响

Fig. 10 Influences of variation coefficient on slope stability

比较图 10 (a) 与图 7 可见, 尽管采用 LE 法对于不同样本所得的边坡安全系数可能不位于 FELA 法的上下限中, 但边坡安全系数样本均值显示了与参数取均值时同样的特性, 即满足 MP 法和 SB 法所得安全系数均值在 FELA 的上下限内, 而不满足力矩平衡条件的 SJ 法的安全系数均值小于 FELA 下限解。且各 LE 法的安全系数变异性大于 FELA 法 (图 10 (b))。以 SJ 法变异系数的变化最为显著, 这使 LE 法的边坡失效概率总体偏大 (图 10 (c))。

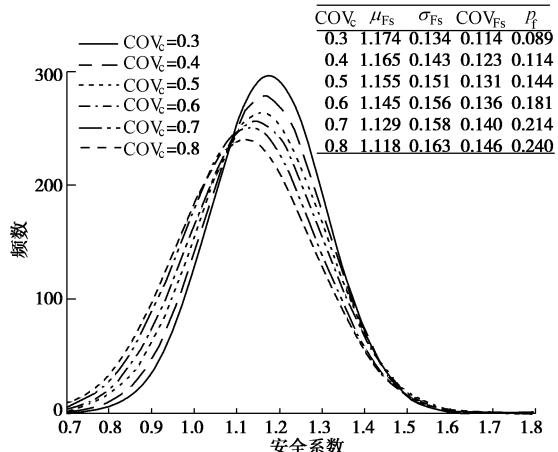


图 11 变异系数对安全系数概率密度曲线的影响

Fig. 11 Influences of variation coefficient on PDF of safety factor

### 4.2 坚向相关距离的影响分析

如前所述, 土体水平相关距离大致为坚直相关距离的 10 倍, 本文取水平相关距离  $l_h=40$  m, 大于边坡尺度 (20 m × 30 m), 可以认为边坡土体参数沿水平方向完全相关。Cho<sup>[3]</sup>、蒋水华等<sup>[20]</sup>、雷坚等<sup>[21]</sup>的研究表明, 坚向相关距离对边坡稳定性的影响较水平向显著, 故本文着重考虑土体强度参数坚直相关距离的影响。保持黏聚力  $c$  和摩擦角  $\varphi$  的相关距离为常数, 坚直相关距离依次取为 2, 4, 8, 12 m。坚直相关距离为无穷大时, 土性参数为随机变量。

由图 12 (a)、(c) 可知, 随着相关距离的增大,

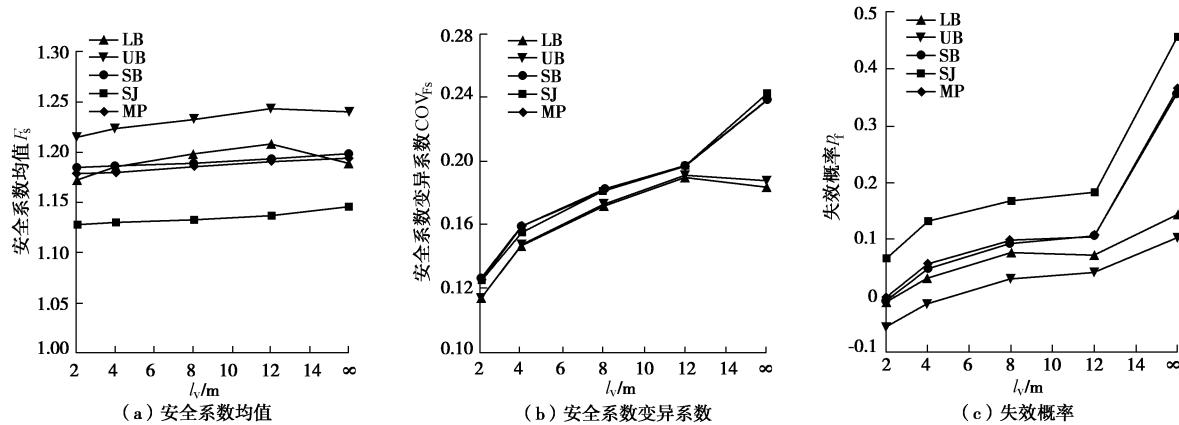


图 12 坚直相关距离对边坡稳定性的影响

Fig. 12 Influences of vertical correlation length on slope stability

安全系数均值由 1.129 增加到 1.237, 而失效概率由 0.0465 增加到 0.559。两者的变化规律看似矛盾。事实上, 从图 12 (b) 可以看出, 随着相关距离的增大, 安全系数的变异系数也显著增大, 安全系数频率分布趋于矮胖, 从而导致失效概率增加。由图 12 (c) 可知, 当相关距离为无穷大, 即采用随机变量模型分析边坡可靠性时, 计算的失效概率相对随机场模型偏高, 以极限平衡法尤为明显。

对比图 12 (a)、(b) 还可知, 随着坚向相关距离增大, FELA 计算所得安全系数均值比极限平衡法大, 而变异系数却更小, 即相对极限平衡来说, FELA 的安全系数概率分布是瘦高型的, 故 FELA 的失效概率较小。

## 5 结 论

本文基于塑性极限分析理论, 应用广义变分原理建立了边坡稳定有限元极限分析方法, 分析了参数空间变异性下的边坡稳定可靠性, 并与 3 种典型极限平衡方法进行了对比, 根据边坡安全系数分布特性, 给出了边坡参数设计值。主要结论如下:

(1) FELA 法可以有效搜索参数空间变异性条件下的多种可能临界滑移面, 并给出相应安全系数的严格上下限。对于简单均质土坡, FELA 法和 LE 法所得临界滑移面及其相应的边坡安全系数相差不大, LE 方法得到的安全系数大多位于极限分析的上下限内。而对参数空间变异性较大的土坡, 极限平衡法可能无法合理搜索临界滑移面, 并过高估计边坡安全系数, 所得安全系数也不再位于极限分析的上下限内。

(2) 土性参数的空间变异性导致边坡存在多种失效模式, 各失效模式的滑坡面积差别较大, 极限平衡法不能合理搜索各种滑移面, 而仅使用单值安全系数

也无法衡量滑坡形式不同造成的风险差异。

(3) 土体强度参数为对数正态分布时, FELA 法与 LE 法计算的边坡安全系数均服从对数正态分布。参数的坚向相关距离与参数方差对边坡安全系数的均值影响较小, 而对安全系数的方差及其分布形式影响显著, 从而导致边坡失效概率随参数空间变异性发生明显变化。因此, 参数空间变异性较强的边坡, 单值的安全系数无法合理描述边坡稳定可靠性。

## 参 考 文 献:

- [1] DUNCAN J M. State of the art: limit equilibrium and finite-element analysis of slopes[J]. Geotech Engng, 1996, 122(7): 577 - 596.
- [2] ELRAMLY H, MORGESTERN N R, CRUDEN D M. Probabilistic slope stability analysis for practice[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2002, 39(3): 665 - 683.
- [3] CHO S E. Probabilistic assessment of slope stability that considers the spatial variability of soil properties[J]. Journal of Geotechnical & Geoenvironmental Engineering, 2010, 136(7): 975 - 984.
- [4] GRIFFITHS D V, LANE P A. Slope stability analysis by finite elements[J]. Journal of Geotechnical & Geoenvironmental Engineering, 1999, 49(3): 387 - 403.
- [5] CHEN W F, LIU X L. Limit analysis in soil mechanics[M]. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1990.
- [6] 王敬林, 郑颖人, 陈瑜瑶, 等. 岩土材料极限分析上界法的讨论[J]. 岩土力学, 2003, 24(4): 538 - 544. (WANG Jing-lin, ZHENG Ying-ren, CHEN Yu-yao, et al. Discussion on upper-bound method of limit analysis for geotechnical material[J]. Rock and Soil Mechanics, 2003, 24(4): 538 - 544. (in Chinese))

[7] 王均星, 王汉辉, 吴雅峰. 土坡稳定的有限元塑性极限分析上限法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 23(10): 1867 – 1873. (WANG Jun-xing, WANG Han-hui, WU Ya-feng. Stability analysis of soil slope by finite element method with plastic limit upper bound[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 23(10): 1867 – 1873. (in Chinese))

[8] 赵明华, 张锐, 雷勇. 基于可行弧内点算法的上限有限单元法优化求解[J]. 岩土工程学报, 2014, 36(4): 604 – 611. (ZHAO Ming-hua, ZHANG Rui, LEI Yong. Optimization of upper bound finite element method based on feasible arc interior point algorithm[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, 36(4): 604 – 611. (in Chinese))

[9] LYSMER J. Limit analysis of plane problems in soil mechanics[J]. J Soil Mech Found, 1970, 96(SM4): 1311 – 1334.

[10] ANDERHEGGEN E, KNOPFEL H. Finite element limit analysis using linear programming[J]. Int J Solids Struct, 1972, 8(12): 1413 – 1431.

[11] MAKRODIMOPOULOS A, MARTIN C M. Upper bound limit analysis using simplex strain elements and second-order cone programming[J]. Int J Numer Analyt Methods Geomech, 2007, 31(6): 835 – 865.

[12] SLOAN S W. Geotechnical stability analysis[J]. Géotechnique, 2013, 63(7): 531 – 571.

[13] KRABBENHOFT K, LYAMIN A V. Strength reduction finite-element limit analysis[J]. Géotechnique Letters, 2015, 5(4): 250 – 253.

[14] YU S, ZHANG X, SLOAN S W. A 3D upper bound limit analysis using radial point interpolation meshless method and second - order cone programming[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2016, 108(13): 1686 – 1704.

[15] HUANG J, LYAMIN A V, GRIFFITHS D V, et al. Quantitative risk assessment of landslide by limit analysis and random fields[J]. Computers & Geotechnics, 2013, 53(3): 60 – 67.

[16] LYAMIN A V, SLOAN S W. Upper bound limit analysis using linear finite elements and non-linear programming[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2002, 12(2): 181 – 216.

[17] LI K S, LUMB P. Probabilistic design of slopes[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1987, 24(4): 520 – 535.

[18] PHOON K K, HUANG S P, QUEK S T. Implementation of Karhunen-Loeve expansion for simulation using a wavelet-Galerkin scheme[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2002, 17(3): 293 – 303.

[19] PHOON K K, KULHAWY F H. Characterization of geotechnical variability[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1999, 36(4): 612 – 624.

[20] 蒋水华, 李典庆, 曹子君, 等. 考虑参数空间变异性的边坡可靠度及其敏感性分析多重响应面法[J]. 防灾减灾工程学报, 2015, 35(5): 592 – 598. (JIANG Shui-hua, LI Dian-qing, CAO Zi-jun, et al. Multiple response surfaces method for probabilistic analysis and reliability sensitivity analysis of slopes considering spatially varying soil properties[J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2015, 35(5): 592 – 598. (in Chinese))

[21] 雷坚, 陈朝晖, 黄景华. 饱和渗透系数空间变异性对边坡稳定性的影响[J]. 武汉大学学报 (工学版), 2016, 49(6): 831 – 837. (LEI Jian, CHEN Zhao-hui, HUANG Jing-hua. Effects of the spatial variability of saturated permeability on slope stability[J]. Engineering Journal of Wuhan University, 2016, 49(6): 831 – 837. (in Chinese))