

DOI: 10.11779/CJGE201804019

离散元中破碎自组织对颗粒破碎影响研究

张科芬^{1, 2}, 张升^{*1, 2}, 滕继东^{1, 2}, 盛岱超^{1, 3}

(1. 中南大学土木工程学院, 湖南 长沙 410075; 2. 中南大学高速铁路建造技术国家工程实验室, 湖南 长沙 410075;
3. 纽卡斯尔大学工程学院, 澳大利亚 NSW2308)

摘要: 从数学领域的阿波罗填充法入手, 建立了4种破碎自组织, 并借助线性膨胀法保证破碎前后质量守恒。在此基础上, 开展了不同破碎自组织的数值试验, 研究了破碎自组织对级配演化以及材料的宏细观力学特性等的影响。结果表明: 颗粒级配曲线的分形维数和颗粒间的平均应力随破碎自组织中颗粒数目增多而下降, 而相对破碎率 B_r 和材料的压缩性随自组织中颗粒数目增多而增大。加载过程中的法向接触和接触力玫瑰图表明, 自组织中颗粒数目愈多, 材料的各向异性程度愈低, 颗粒法向接触数目愈多, 而法向接触力愈小。另外, 配位数及接触力的概率密度也与破碎自组织存在密切联系。

关键词: 离散元; 颗粒破碎; 破碎自组织; 阿波罗填充

中图分类号: TU431 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2018)04-0743-09

作者简介: 张科芬(1993-), 女, 硕士, 主要从事岩土材料颗粒破碎特性等方面的研究。E-mail: kfzhang0314@163.com。

Influences of self-organization of granular materials on particle crushing based on discrete element method

ZHANG Ke-fen^{1, 2}, ZHANG Sheng^{1, 2}, TENG Ji-dong^{1, 2}, SHENG Dai-chao^{1, 3}

(1. School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, China; 2. National Engineering Laboratory for High Speed Railway Construction, Changsha 410075, China; 3. School of Engineering, The University of Newcastle, NSW2308, Australia)

Abstract: Starting from the Apollonian sphere packing method in mathematics, four kinds of self-organization of breakage are established, and the linear expansion method is introduced to guarantee the mass conservation. On this basis, the numerical experiments on different self-organizations are carried out, and the influences of self-organization on gradation evolution and macro and micro mechanical behaviors of granular materials are studied. It is found that the fractal dimension and the average inter-particle stress decrease with the increase of fragment number, while the relative breakage B_r and the compressibility increase with the increase of particle number in the self-organization. The anisotropic rose diagram of contact orientation and contact normal force show that the larger the number of particles in the self-organization is, the lower the anisotropy of the specimens at the end of loading is. In addition, the number of particle contact increases with the increase of self-organized particles, while the normal contact force decreases. Furthermore, the probability distributions of coordination number and contact force are also closely related to the self-organization of fragmentation.

Key words: discrete element method; particle breakage; self-organization of grain breakage; Apollonian sphere packing

0 引言

堆石料作为典型的散粒体材料, 具有显著的易碎性, 而颗粒破碎引发的一系列工程问题越来越引起岩土工程研究者的重视^[1-5]。由于物理试验离散性大、影响因素难以控制等局限性, 越来越多的学者采用离散单元法(DEM)进行颗粒破碎的研究。目前, 离散元模拟破碎主要有绑定法^[6-9]和替代法^[10-14]。绑定法能够考虑颗粒形状对破碎的影响, 但是难以考虑多次破碎、颗粒强度的尺寸效应等因素。因此, 采用若干子颗粒替代破碎母颗粒的替代法日益引起关注。在替代法中,

母颗粒破碎强度准则的选取和子颗粒分布组成的确定是该方法中的两个关键问题。

针对母颗粒破碎强度准则, Zhou 等^[10]选取了拉应力截断的摩尔库伦准则作为判别准则。基于单一颗粒破碎物理试验结果, McDowell 等^[11]提出了考虑颗粒强度尺寸效应的判别准则。Bono 等^[12]系统的探究了不

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(“973”计划)项目(2014CB047001); 中南大学研究生自主探索创新项目(2017zzts520)

收稿日期: 2017-01-18

*通讯作者(E-mail: zhangsheng@csu.edu.cn)

同破碎强度准则对破碎的影响, 指出基于八面体剪应力的 q 准则和最大接触力的 F_{\max} 准则能够更为准确地模拟破碎。

而对于子颗粒分布组成, 尤其是子颗粒分布对材料宏细观力学特性影响的研究, 目前较少有报道。Ben-Nun 等^[13]将破碎后的子颗粒分布组成定义为破碎自组织, 并开展了二维的离散元试验。指出破碎自组织是影响破碎的关键因素, 尤其将显著影响材料的级配演化, 但未深入探究其对力学性能的影响。Elghezal 等^[14]开展了破碎自组织中颗粒数目分别为 6, 8, 10 的二维试验, 仅讨论了破碎自组织对试样偏应力和体积应变等宏观行为的影响, 未考虑破碎自组织对材料破碎程度、细观结构等的影响。因此, 进一步研究破碎自组织对颗粒破碎的微观机制及宏观力学行为的影响, 具有重要意义。

基于上述分析, 本文将从数学领域的阿波罗填充入手, 提出 4 种破碎自组织并借助于线性膨胀法保证破碎前后试验的质量体积守恒; 在此基础上, 基于离散元软件 PFC 开展不同破碎模式的一维压缩试验, 探究破碎自组织对材料破碎程度、级配演化、体积变形、各向异性和颗粒间作用力等的影响。

1 颗粒破碎模型

1.1 破碎准则

本文采用 Russell 等^[15]的两参数破碎准则作为数值模拟中的破碎准则, 即

$$F_{\max} \geq \frac{\kappa}{f(\chi, v)} \pi R^2 \sin^2 \theta_0 \quad . \quad (1)$$

将式(1)的右侧可改写为

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{f(\chi, v)} \pi R^2 \sin^2 \theta_0 &= \sigma_{\lim} A_F = F_{\lim} \\ \Rightarrow \sigma_{\lim} &= \frac{\kappa}{f(\chi, v)} \quad . \end{aligned} \quad (2)$$

式中 κ 为颗粒固有强度, v 为泊松比; χ 为反映材料微观结构的一个参数; F_{\max} 为作用在颗粒上的最大法向接触力。结合式(1)与式(2), 可得

$$F_{\max} \geq F_{\lim} = \sigma_{\lim} A_F \quad . \quad (3)$$

可见, 该准则属于 Bono 等^[12]归纳的 4 种准则中的基于大接触力 F_{\max} 的准则。式(3)中, A_F 是作用域面积, 可根据赫兹接触理论确定。 σ_{\lim} 是与材料参数相关的材料极限强度值, 且存在尺寸效应。由于颗粒的破碎强度满足 weibull 分布, 因此引入尺寸因子 f_{size} 来考虑不同直径颗粒的平均强度值, 即

$$\sigma_{\lim} = \sigma_{\lim, 0} f_{\text{size}}(d) \quad , \quad (4)$$

$$f_{\text{size}}(d) = \left(\frac{d}{d_0} \right)^{-3/m} \quad . \quad (5)$$

式中, m 为量纲为 1 的 weibull 模量, 随强度提高而减小, 土体取值一般在 5~10; $\sigma_{\lim, 0}$ 为粒径为 d_0 的颗粒的极限强度; d_0 为参考直径, 本文选为 3 mm。此外, 为了提高计算效率, 设定了一个能发生破碎的最小颗粒尺寸 d_{limit} , 小于该尺寸的颗粒将不再继续破碎, 称为破碎极限。本文将采用的极限尺寸 $d_{\text{limit}}/d_{\min} = 0.25$, d_{\min} 为模型中初始最小颗粒的直径^[16]。

1.2 破碎自组织

本文的破碎自组织需满足以下两个条件: ①子颗粒间无重叠, 不产生内部接触力; ②破碎前后质量守恒, 不引入额外的孔隙。为了避免自组织内子颗粒间的相互重叠而引起额外的作用力, 借助数学领域的阿波罗填充 (apollonian sphere packing) 形成破碎后的自组织: 首先在一个大球体内生成 4 个相互外切的球体, 并同时与原球体内切; 然后生成分别与这 5 个球体中 4 个相切的新球体; 依次循环, 直至球体间的空隙被更小的球体填满。此时该模型的分形维数为 2.47^[17], 而颗粒破碎达到极限状态后的分形维数在 2.50 左右, 与之相接近。由于阿波罗填充是由颗粒一层一层填充上级母颗粒, 且颗粒间无重叠, 每层颗粒的尺寸逐渐减小, 因此可以借助不同的阿波罗填充层数来模拟不同的破碎自组织。随填充层数增多, 颗粒数目依次增多, 最大的颗粒数目不变, 小颗粒数量增加。本文采取的 4 种破碎自组织分别是一、二、三、四层阿波罗填充, 分别包含 4, 9, 21, 45 个颗粒。生成 4 种无相互重叠的破碎自组织的过程如图 1 中阶段 1 所示。为了保证破碎前后颗粒的质量、体积守恒, 本文借鉴 Ben-Nun 等^[13]二维的膨胀法, 并将之拓展到三维, 如图 1 中阶段 2 所示。在颗粒膨胀阶段, 借助局部时步的内部循环消除破碎自组织子颗粒间的不平衡力和内部应力。且此阶段子颗粒不发生破碎, 以免子颗粒间的内部膨胀对数值结果产生影响。

本文采用直径为 60 mm, 高为 15 mm 的圆柱形颗粒集合作为数值试样, 初始颗粒粒径服从 2.5~5.0 mm 之间的均匀分布。加载前的数值试样如图 2(a)所示, 数值模型参数如表 1 中所述。先采用半径膨胀法使试样达到相对密度的目标值, 然后将颗粒的线速度和角速度均置零。随后对试样施加 100.0 kPa 的各向同性固结压力, 以获取初始应力场。最后以 0.01 m/s 的速度控制上下加载板对试样进行一维压缩, 当试样竖向位移达 3.75 mm 时, 停止加载。加载过程中, 实时监控颗粒的受力状态, 当颗粒所受外力满足破碎准则, 则颗粒发生破碎。

表1 离散元法数值模拟的参数

Table 1 Input parameters of discrete-element method for simulation

接触模型	D/mm	H/mm	e_{int}	f_u	G/GPa	ν	$\sigma_{\text{lim},0}/\text{MPa}$	m	d_{max}/mm	d_{min}/mm	$d_{\text{limit}}/\text{mm}$	$\rho_s/(\text{g}\cdot\text{cm}^{-3})$
赫兹接触模型	60.0	15.0	0.63	0.577	3.0	0.3	3000	10	5.0	2.5	$0.25d_{\text{min}}$	2.65

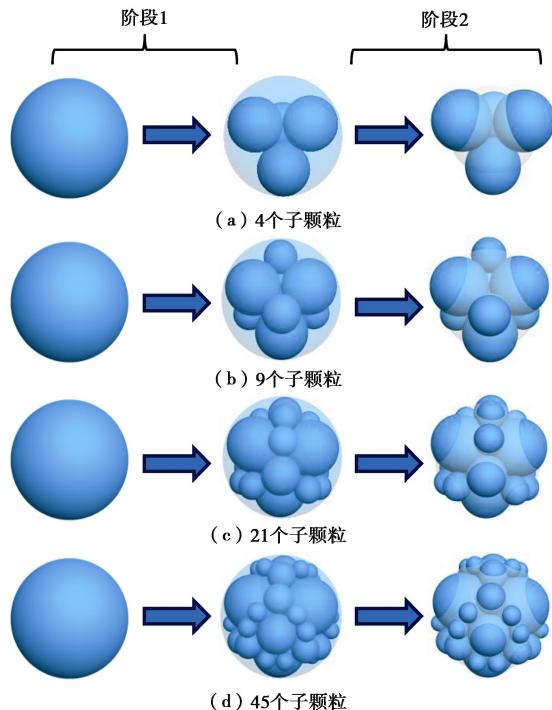


图1 4种不同的子颗粒布局

Fig. 1 Four alternative configurations of post-crushing replacement

2 数值试验结果

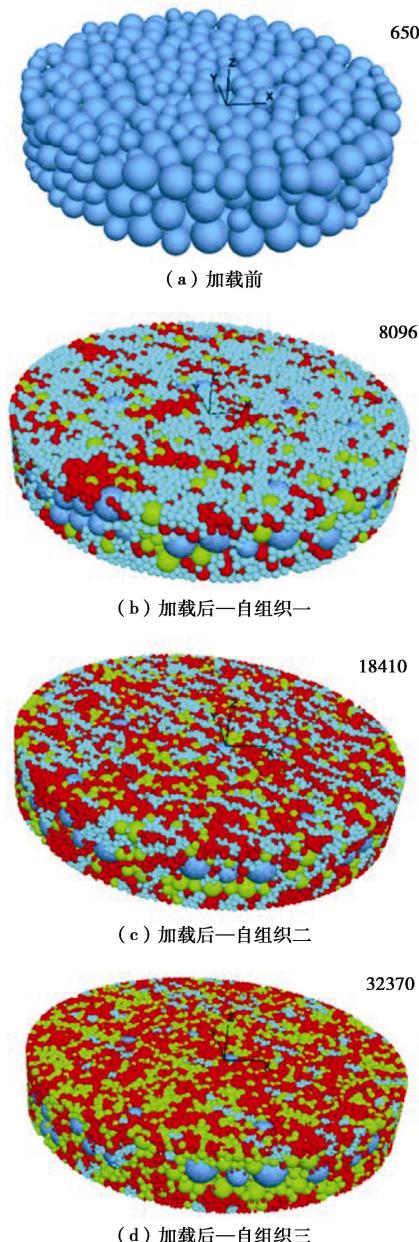
本数值试验采用控制变量法进行加载。即加载前试样的几何条件、力学条件均保持一致，消除了试样颗粒的初始架构对颗粒破碎的影响；加载过程中的加载方式、加载速度一致，试验结束时的加载位移一致，消除了与试验方法有关的因素影响。

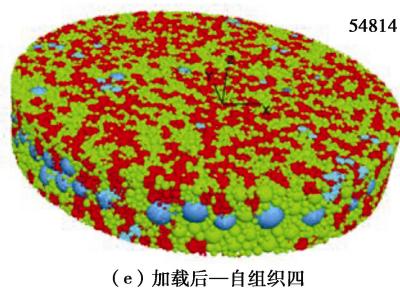
2.1 破碎分布分析

加载结束后，对试样中的颗粒按破碎级数进行了染色区别。图2(b)~(e)分别表示采用图1(a)~(d)破碎自组织的加载后模型图，颗粒的颜色代表颗粒所处的破碎状态。从图2中可以直观看出，采用不同的破碎自组织，破碎到各级颗粒的分布情况不同，且破碎后试样中颗粒总数目随破碎自组织中颗粒数目的增多而增多，具体如表2~4所示。

表2是处于破碎各级状态的颗粒质量百分比。4种破碎自组织中未发生破碎的颗粒质量百分比相近，或者说破碎自组织对初始的破碎颗粒量影响不显著。但是，随破碎自组织中颗粒数目的增多，试样中发生

两级破碎颗粒质量百分比下降，即保持在一级破碎状态的颗粒百分比增多（如表2第3列）。如表中最后一列所述，处于三级破碎状态的颗粒质量百分比随自组织中颗粒数目增多而下降。亦可自图2观察所见，从图2(b)至2(e)，代表处于三级破碎的蓝色颗粒越来越少。另外，处于三级破碎状态的颗粒只能由处于二级破碎状态的颗粒破碎而来，且试样中无四级破碎状态的颗粒。这说明试样中发生三级破碎的颗粒质量百分比也随自组织中颗粒数目增多而减小。





注：蓝色（深灰）代表原始未发生破碎的颗粒；绿色（灰）是由蓝色颗粒发生一级破碎后的颗粒；红色（黑）是由绿色颗粒破碎后的颗粒，即发生了二级破碎；浅灰是由红色颗粒破碎后的颗粒，即发生了三级破碎。图片右上角数字代表了试样中的颗粒数目。

图 2 数值试样

Fig. 2 Numerical specimens

表 3 是处于各级破碎状态的颗粒数目及百分比统计。随破碎自组织中颗粒数目的增多，处于三级破碎状态的颗粒数目百分比减小，处于一级和二级破碎状态的颗粒数目及百分比均增大。为直观明确各级破碎的颗粒数目，表 4 统计了整个试验过程中发生颗粒破碎的颗粒数目。如表所示，随着自组织中子颗粒数目的增多，在相同的加载位移下，颗粒破碎的总数量越来越少；发生一级破碎的颗粒数目相近；而发生三级破碎的数目却逐渐减少；后文将从颗粒间接触力分析其内在原因。

表 2 处于破碎各级状态的颗粒质量百分比

Table 2 Mass percentage of particles in every crushing state

颗粒	未破碎	一级破碎	二级破碎	三级破碎
4 子颗粒	43.1%	26.6%	15.4%	14.9%
9 子颗粒	41.0%	32.2%	20.1%	6.7%
21 子颗粒	41.7%	40.4%	16.3%	1.6%
45 子颗粒	42.2%	43.3%	13.9%	0.6%

表 3 处于破碎各级状态的颗粒数目及百分比

Table 3 Number and percentage of particles in every crushing state

颗粒	未破碎	一级破碎	二级破碎	三级破碎
4 子颗粒	280/3.5%	676/8.3%	1908/23.6%	5232/64.6%
9 子颗粒	272/1.5%	2322/12.5%	8933/48.0%	7083/38.0%
21 子颗粒	272/0.9%	6994/21.6%	19560/60.4%	5544/17.1%
45 子颗粒	279/0.5%	15901/29.0%	35664/65.1%	2970/5.4%

表 4 颗粒破碎数目

Table 4 Amount of crushing

颗粒	破碎总数目	一级破碎	二级破碎	三级破碎
4 子颗粒	2482	370	804	1308
9 子颗粒	2245	378	1080	787
21 子颗粒	1586	378	944	264
45 子颗粒	1231	371	794	66

2.2 级配演化

在加载的过程中，试样每被压缩 0.375 mm，就记

录一次试样的级配曲线，级配演化曲线分别如图 3~6 所示，其中图 (a) 是颗粒数目的级配曲线，图 (b) 是颗粒质量的级配曲线。Turcotte^[18]认为在达到分形状态后，颗粒数目满足

$$N(D > d) = kd^{-\alpha} \quad (6)$$

式中 α 为分形维数； k 为拟合参数； d 为颗粒粒径； $N(D > d)$ 为粒径大于 d 的颗粒数目。根据 Einav^[19]的研究，上式可以转换为分形状态下的颗粒累积质量分布函数，即

$$F(d) = \frac{d^{3-\alpha} - d_m^{3-\alpha}}{d_M^{3-\alpha} - d_m^{3-\alpha}} \quad (7)$$

式中， d_m 为最小粒径， d_M 为最大粒径。

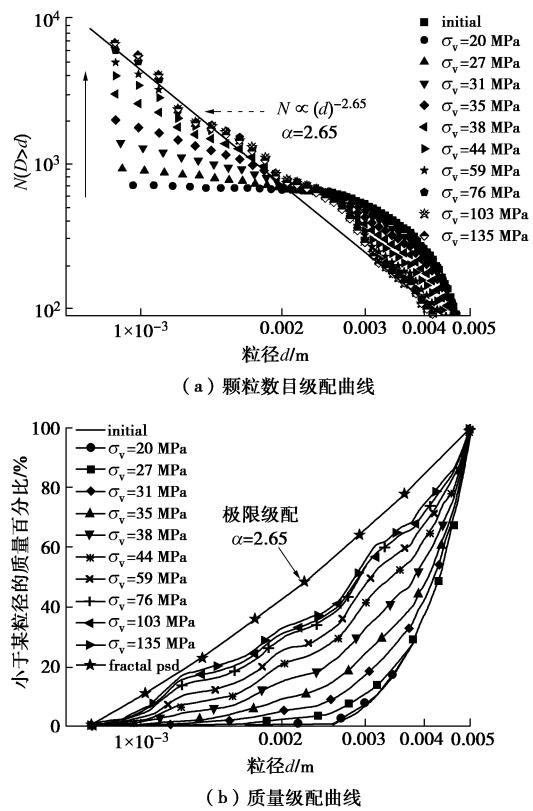
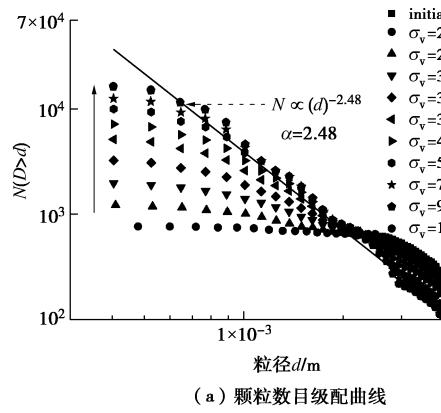


图 3 按自组织 1 破碎后的级配曲线

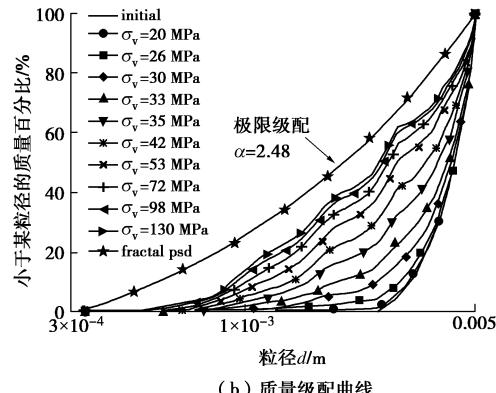
Fig. 3 Evolution of particle-size distribution using configuration 1

图 3 (a) ~6 (a) 是双对数坐标下的颗粒数目级配曲线，并给出了最终试验级配的拟合曲线，根据式 (6) 知该曲线的斜率就是分形维数 α 。4 个试验都在结束时颗粒数目级配曲线达到了幂函数状态，只是分形维数有所不同，4 种破碎自组织的分维数分别为 2.65, 2.48, 2.42, 2.39。即随自组织中颗粒数目增多、小颗粒所占比重增大，分形维数逐渐减小。这说明破碎自组织会通过影响幂指数的数值而改变试样最终破碎状态时的拓扑关系。

按照式 (7) 可以得到每种自组织的质量级配曲线的极限级配，如图 3~6 中的 (b) 图所示。许多学者



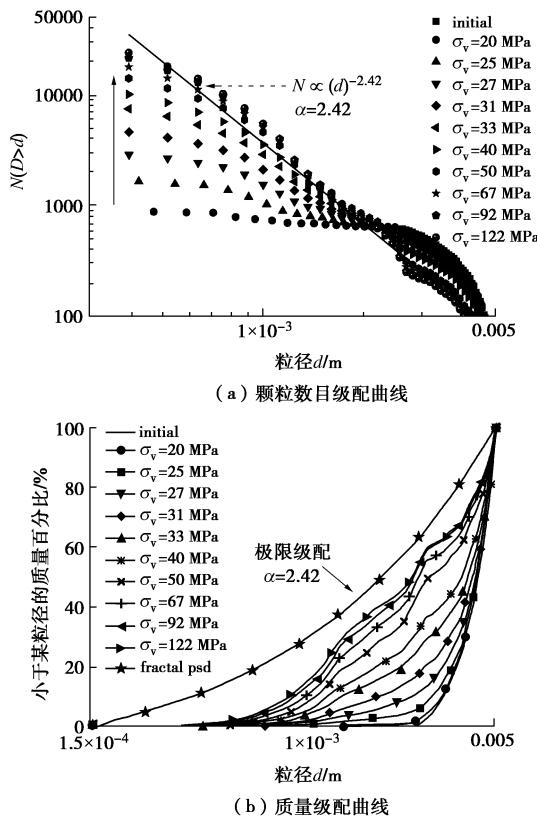
(a) 颗粒数目级配曲线



(b) 质量级配曲线

图4 按自组织2破碎后的级配曲线

Fig. 4 Evolution of particle-size distribution using configuration 2



(a) 颗粒数目级配曲线

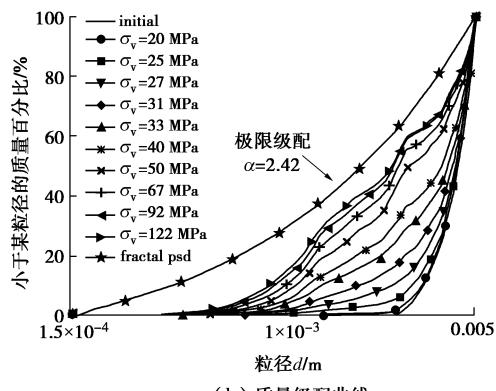
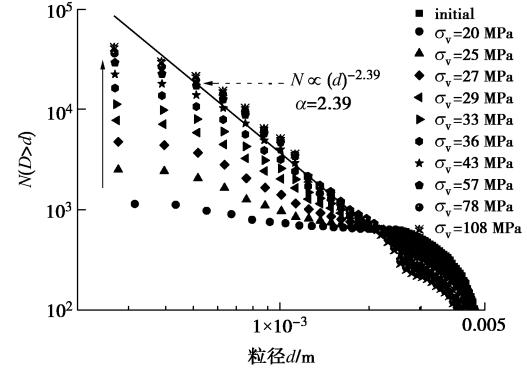
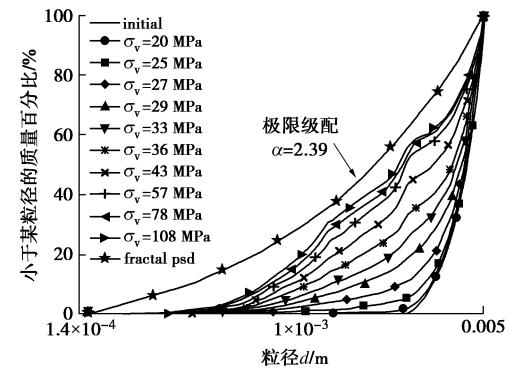


图5 按自组织3破碎后的级配曲线

Fig. 5 Evolution of particle-size distribution using configuration 3



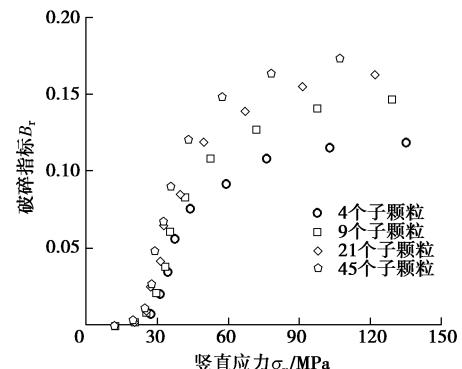
(a) 颗粒数目级配曲线



(b) 质量级配曲线

图6 按自组织4破碎后的级配曲线

Fig. 6 Evolution of particle-size distribution using configuration 4
通过追踪破碎过程中质量级配曲线演化, 提出了不同的破碎量化参数^[20-23]。其中, Hardin^[23]提出的相对破碎率 B_r 被广为接受, 即: 将颗粒级配曲线与 0.074 mm 粒径竖线所围成的面积定义为破碎势 B_p , 它代表颗粒的破碎潜力。颗粒破碎前后 B_p 的差值为破碎量 B_t , 则 B_r 为 B_t 与破碎前 B_p 的比值。本数值试验中的 B_r 演化规律如图 7 所示, 自组织中颗粒数目愈多, 相对破碎率 B_r 的值愈大。而表 4 表明破碎总次数与自组织中颗粒数目呈负相关, 这说明决定破碎量大小的, 不仅包括颗粒破碎次数还包括破碎后的颗粒分布。自组织中颗粒数目愈多, 表明破碎愈充分, 即破碎量愈大。

图7 破碎指标 B_r 的演化规律Fig. 7 Evolution of crushing index B_r

2.3 宏细观力学分析

一维压缩下的颗粒材料体积变形特征, 是研究材

力学行为的基础。普遍认为,低应力下,岩土材料的体积变形主要来源于颗粒的重新排列,随着应力的增大,颗粒破碎对体积应变的影响占主导地位。图 8 是在 4 种破碎自组织下的压缩曲线,在低应力条件下,颗粒尚未发生破碎或仅少量破碎,4 种模式的压缩曲线一致,拥有相同的屈服应力 p_y ($p_y=24$ MPa); 随着应力水平增高,材料发生大量的破碎,压缩曲线逐渐开始分离。随着所采用的破碎自组织中颗粒数目和小颗粒的增多,小颗粒会填充大颗粒之间的孔隙,导致试样的压缩性增大。

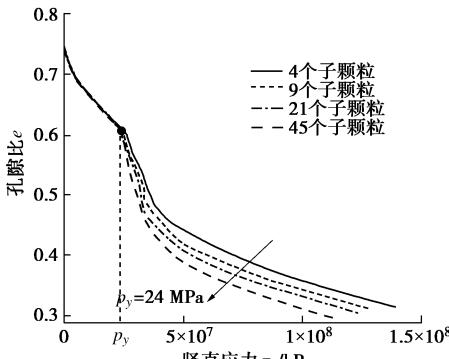


图 8 一维压缩曲线

Fig. 8 One-dimensional normal compression curves

试验材料宏观力学行为的差异,可以从细观角度开展研究。图 9 为 4 种自组织破碎模式中,所有颗粒间平均应力与竖直应力的关系。首先通过作用在颗粒上的接触力可以求得该颗粒的应力张量,再采用公式 $p = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$ 计算出单个颗粒的平均应力,最后可计算出整个试样内部的颗粒间平均应力。在屈服应力之前,颗粒尚未大量破碎,颗粒的平均应力大小相同。在屈服应力之后,平均应力的演化开始呈现差异; 在相同的竖直应力下,随着自组织中子颗粒数目的增多、小颗粒增多,颗粒间平均应力值减小,从而颗粒就越难达到破碎应力,相应地发生破碎的次数下降。这与表 4 中随着自组织中颗粒数目增多,试样颗粒破碎总数量下降的结果吻合。

2.4 各向异性分析

组构张量是衡量材料结构各向异性的一个指标,对球形颗粒,其定义如下^[24]:

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{N_C} \sum_{N_c} n_i n_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad , \quad (8)$$

式中, N_C 为总的接触数目, n_i 为接触方向的单位向量在 i 方向的投影。根据式(8)可计算出组构张量的特征值以及特征向量,并求得该张量的 3 个主值 Φ_1, Φ_2, Φ_3 ($\Phi_1 \geq \Phi_2 \geq \Phi_3$)。而组构主值差 $\Phi_1 - \Phi_3$ 是度量材料微观结构各向异性的一个重要指标,其值越大表示材料的各向异性程度越大。图 10 是 4 种数值试验中组构主值差伴随竖直应力的演化规律,可见随着加载的进

行,颗粒不断发生破碎,结构最终的各向异性程度与加载初期相比均下降,而自组织结构中包含的颗粒数目越多,其各向异性程度就越小。这是因为自组织中包含的子颗粒越多,替代相同的母颗粒条件下,小颗粒的数目亦越多,颗粒各个方向的接触数目均更多,分布更加均匀,导致各向异性程度有所下降。

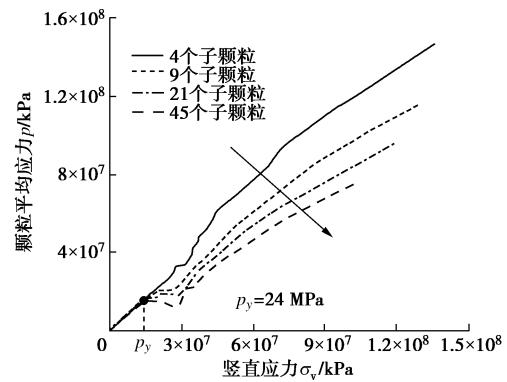


图 9 颗粒平均应力随竖直应力的变化

Fig. 9 Average particle stress as a function of applied vertical stress

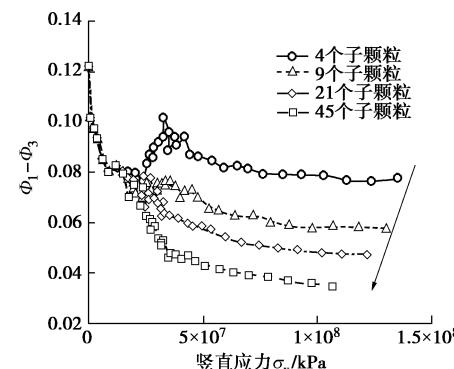


图 10 组构主值差的演化规律

Fig. 10 Evolution of deviator fabric

另外,在 4 和 9 个子颗粒为破碎自组织的试样中,其组构主值在刚开始发生明显破碎时有所增大,随后随着加载的进行再逐渐下降。而在 21 和 45 个子颗粒作为破碎模式的试样中,其组构主值在加载过程中一直持续下降。这是由于在刚开始破碎时,试样已经经过了低应力下的颗粒重排列达到了一个较稳定的状态,瞬间的颗粒破碎引入较大的不均匀性,子颗粒数目越少,不均匀性越大。

为了更加直观地观察加载过程中的细观各向异性演化规律,选取破碎模式为 4 个子颗粒和 21 个子颗粒的试样,做法向接触数目和法向接触力各向异性玫瑰图,并投影到 XY 平面,如图 11, 12 所示。随着破碎的发生,试样中颗粒数目增多,在所有方向颗粒接触数目均增多。破碎模式为 4 个子颗粒的试样,沿水平方向的接触最多,垂直方向次之,与水平方向成 10°, -20° 的方向最少。破碎模式为 21 个子颗粒的试样,其接触分布较 4 个子颗粒的更为均匀,各向异性程度

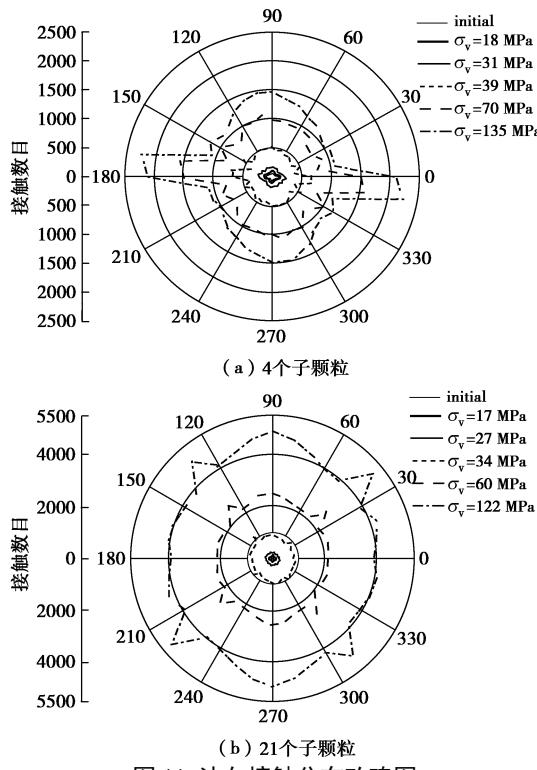


图 11 法向接触分布玫瑰图

Fig. 11 Rose diagrams of contact orientation anisotropy

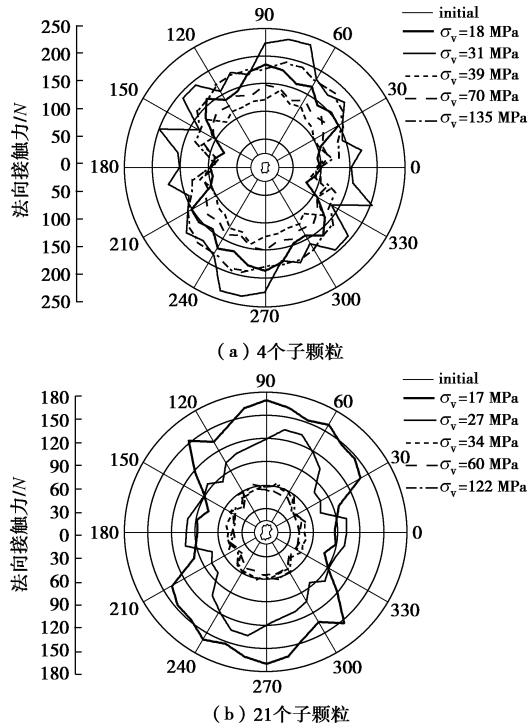


图 12 法向接触力玫瑰图

Fig. 12 Rose diagrams of contact force anisotropy

较低, 仅在垂直方向、与水平方向夹 40° , -50° 方向接触分布较多。法向接触力的演化规律较接触分布来说更加复杂, 加载初始法向接触力较小, 随着加载的不断进行, 4 个子颗粒的接触力先增大后减小最后再增大; 而 21 个子颗粒的接触力先增大后减小, 而无最后的再次增大阶段, 如图 12 所示。笔者认为这与试

样中的颗粒破碎阶段有关, 从图 3 可知在加载后期颗粒级配曲线越来越密集趋于重合, 即仅有少量颗粒破碎发生, 外力的加载使得颗粒间接触力再次增大。由图 5 可见, 对 21 个子颗粒的破碎模式, 在加载后期级配曲线较接近, 仍有大量的颗粒破碎发生, 所以外力加载导致颗粒不断破碎, 颗粒间接触力减小。

为了探究 4 种破碎模式间颗粒法向接触分布及接触力规律, 在试验加载结束时, 统计其分布情况, 如图 13 所示。随着破碎模式中颗粒数目的增多, 最终的接触数目在各个方向均增多, 且分布更加均匀, 各向异性程度降低。但与接触分布规律相反的是, 随着破碎模式中颗粒数目的增多, 颗粒法向接触力逐渐减小。这也正解释了表 4 中随自组织中颗粒数目的增多, 颗粒破碎总数目减小的原因。即在相同的外加载条件下, 颗粒间接触力减小, 使得颗粒的受力条件更难满足破碎准则, 更不易发生破碎, 破碎数目下降。

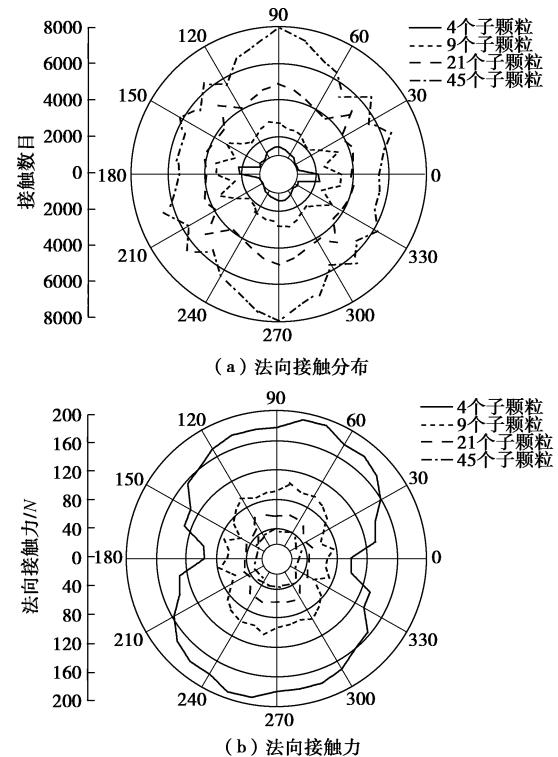


图 13 加载结束时 4 种模拟的玫瑰图

Fig. 13 Rose diagrams of four configuration samples in post-tests

2.5 概率密度分析

上文是从颗粒间平均应力等整体角度衡量粒间作用力, 而如何进行细观评价也已经引起研究者的关注。Liu 等^[25]提出可以采用概率密度的方式来度量颗粒间力链的大小, 借此可以直观观察颗粒间力链的分布情况。接触力的概率密度其定义与数学中的概率密度一致, 即是衡量接触力出现在某一范围的概率。对散粒体系, 其接触力大小是离散且有限的。因此力链的概率密度可用 $dx=d(f_n/\langle f_n \rangle)=0.05$ 代入式 (9) 中进行计

算, 其中自变量 $f_n/\langle f_n \rangle$ 为颗粒间法向接触力与其均值之比, 无量纲。

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1, \\ p(a < x \leq b) = \int_a^b p(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

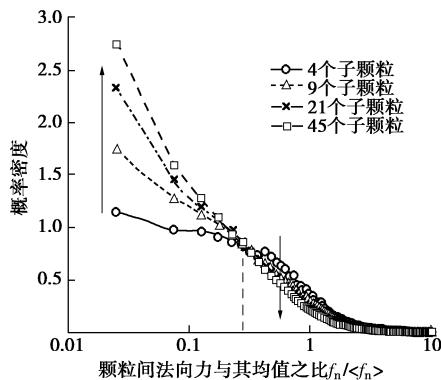


图 14 法向接触力的概率密度函数

Fig. 14 Probability distribution functions of normalized normal contact force by average normal contact force

那么破碎自组织是否会影响颗粒间的力链分布呢? 为此在加载结束时统计 4 种试样的颗粒间力链分布, 如图 14 所示。4 种模式均随着颗粒间接触力增加, 概率密度逐渐减小, 即出现较小接触力的概率更大。但随着自组织颗粒数目的增多, 出现较小接触力的概率逐渐增大。而在 $f_n/\langle f_n \rangle$ 大于 0.275 后, 自组织中颗粒数目愈多, 其概率愈小, 即自组织中颗粒数目越少出现较大接触力的概率越大。这说明破碎自组织会影响颗粒间的力链分布, 进而会引起宏观行为的不同。

除了力的概率密度分布外, 配位数的概率密度分布也是一个重要的问题。配位数的大小决定颗粒的受荷形式, 在配位数较大时可认为颗粒处于各向同性加载, 在配位数小于等于 3 时, 颗粒的受荷类似于直径压缩试验。图 15 统计了加载结束时 4 种试样颗粒的配位数概率密度。如图中所示, 出现较大配位数的概率较小, 出现配位数大于 20 的概率几乎为零。而配位数为 4~6 之间的概率均较大, 且概率密度函数峰值所对应的配位数随破碎模式中颗粒数目的增多而减小。在概率密度达到峰值之前, 随着自组织颗粒数目的增多, 出现小配位数的概率越大。纵观整条概率密度曲线, 发现随自组织颗粒数目的增多, 出现小配位数的概率增大, 出现的最大配位数值也增大。这说明破碎自组织中颗粒数目越少, 其配位数值越集中, 自组织中颗粒数目越多, 其配位数值越发散。

破碎自组织的不同会导致试样内部的力链分布和配位数的大小均存在差异, 这说明破碎自组织亦会影响破碎后材料的微观结构。

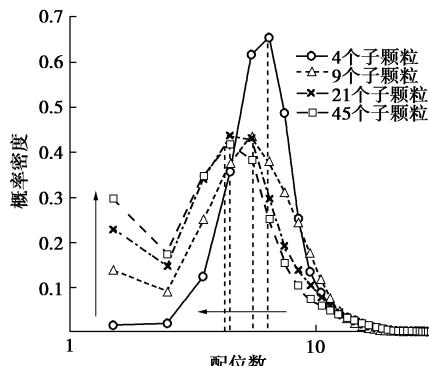


图 15 配位数的概率密度函数
Fig. 15 Probability distribution functions of coordination number

3 结 论

本文基于阿波罗填充建立了 4 种不同破碎自组织的三维离散元模型, 破碎的颗粒满足质量守恒和无相重叠。并考虑了破碎自组织对材料的破碎情况、级配演化以及宏细观力学响应等的影响, 发现破碎自组织对材料的分形维数、破碎分布以及各向异性程度演化等方面都起到关键作用, 具体如下:

(1) 破碎自组织会影响材料的破碎分布情况。随破碎自组织中颗粒数目增多, 总的颗粒破碎数目下降, 发生两次破碎和 3 次破碎的颗粒质量百分比均下降, 而发生一次破碎的颗粒质量百分比却相近。

(2) 破碎自组织不仅会改变最终状态的分形维数; 也会影响破碎量化指标—相对破碎率 B_r 的大小。材料的分形维数随自组织中颗粒数目增多而减小, 而 B_r 的值随颗粒数目增多而增大, 即破碎愈充分。

(3) 在达到屈服条件之后, 4 种不同破碎自组织材料的压缩曲线和颗粒间平均应力曲线均开始呈现差异性。自组织中颗粒破碎愈多, 试样压缩性能愈好, 而颗粒间平均应力值愈小。

(4) 破碎自组织中包含的颗粒数目增多, 其小颗粒所占比重增多, 破碎后材料的各向异性程度下降愈多。另外, 法向接触和法向接触力的玫瑰图演化规律也随破碎自组织的不同而不同。

(5) 颗粒间法向接触力和配位数的概率密度大小均与破碎自组织存在关联。破碎自组织中颗粒数目越多, 出现小接触力的概率越大, 而出现大接触力的概率越小。配位数的概率密度峰值所对应的数值随自组织中颗粒数目的增多而减小。内在的宏细观联系需要进一步研究。

参 考 文 献:

- [1] 孔宪京, 刘京茂, 邹德高, 等. 紫坪铺面板坝堆石料颗粒破碎试验研究[J]. 岩土力学, 2014, 35(1): 35~40. (KONG Xian-jing, LIU Jing-mao, ZOU De-gao, et al. Experimental

- study of particle breakage of Zipingpu rockfill material[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2014, **35**(1): 35 – 40. (in Chinese))
- [2] 蒋明镜, 孙渝刚. 考虑砂土颗粒破碎的圆孔扩张半解析分析[J]. *岩土工程学报*, 2009, **31**(11): 1645 – 1651. (JIANG Ming-jing, SUN Yu-gang. Semi-analytical solution to cavity expansion in crushable sands[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2009, **31**(11): 1645 – 1651. (in Chinese))
- [3] 张季如, 祝杰, 黄文竞, 等. 侧限压缩下石英砂砾的颗粒破碎特性及其分形描述[J]. *岩土工程学报*, 2008, **30**(6): 783 – 789. (ZHANG Ji-ru, ZHU Jie, HUANG Wen-jing, et al. Crushing and fractal behaviors of quartz sand-gravel particles under confined compression[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2008, **30**(6): 783 – 789. (in Chinese))
- [4] SHENG D S, YAO Y Y, CARTER J P C P. A volume–stress model for sands under isotropic and critical stress state[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2008, **45**(11): 1639 – 1645.
- [5] YAO Y P, YAMAMOTO H, WANG N D. Constitutive model considering sand crushing[J]. *Soils and Foundations*, 2008, **48**(2): 12 – 15.
- [6] 张家铭, 邵晓泉, 王霄龙, 等. 沉桩过程中钙质砂颗粒破碎特性模拟研究[J]. *岩土力学*, 2015, **36**(1): 272 – 278. (ZHANG Jia-ming, SHAOXiao-quan, WANG Xiao-long, et al. Discrete element simulation of crushing behavior of calcareous sands during pile jacking[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2015, **36**(1): 272 – 278. (in Chinese))
- [7] THORNTON C, CIOMOCOS M T, ADAMS M J. Numerical simulations of agglomerate impact breakage[J]. *Powder Technology*, 1999, **105**(1–3): 74 – 82.
- [8] 刘君, 刘福海, 孔宪京. 考虑破碎的堆石料颗粒流数值模拟[J]. *岩土力学*, 2008, **29**(增刊1): 111 – 116. (LIU Jun, LIU Fu-hai, KONG Xian-jing. Particle flow code numerical simulation of particle breakage of rockfill[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2008, **29**(S1): 111 – 116. (in Chinese))
- [9] 史旦达, 周健, 贾敏才, 等. 考虑颗粒破碎的砂土高应力一维压缩特性颗粒流模拟[J]. *岩土工程学报*, 2007, **29**(5): 736 – 742. (SHI Dan-da, ZHOU Jian, JIA Min-cai, et al. Numerical simulations of particle breakage property of sand under high pressure 1D compression condition by use of particle flow code[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2007, **29**(5): 736 – 742. (in Chinese))
- [10] ZHOU W, YANG L, MA G, et al. Macro–micro responses of crushable granular materials in simulated true triaxial tests[J]. *Granular Matter*, 2015, **17**(4): 497 – 509.
- [11] McDOWELL G R, DE BONO J P. On the micro mechanics of one-dimensional normal compression[J]. *Géotechnique*, 2013, **63**(11): 895 – 908.
- [12] DE BONO J P, McDOWELL G R. Particle breakage criteria in discrete-element modelling[J]. *Géotechnique*, 2016, **66**(12): 1014 – 1027.
- [13] BEN-NUN O, EINAV I. The role of self-organization during confined comminution of granular materials[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 2010, **368**(1910): 231 – 247.
- [14] ELGHEZAL L, JAMEI M, GEORGOPoulos I O. DEM simulations of stiff and soft materials with crushable particles: an application of expanded perlite as a soft granular material[J]. *Granular Matter*, 2013, **15**(5): 685 – 704.
- [15] RUSSELL A R, WOOD D M. Point load tests and strength measurements for brittle spheres[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2009, **46**(2): 272 – 280.
- [16] 张科芬, 张升, 滕继东, 等. 颗粒破碎的三维离散元研究[J]. *岩土力学*, 待刊. (ZHANG Ke-fen, ZHANG Sheng, TENG Ji-dong, et al. A numerical study on particle breakage based on 3D discrete element method[J]. *Rock and Soil Mechanics*, in press. (in Chinese))
- [17] BORKOVEC M, DE PARIS W, PEIKERT R. The fractal dimension of the apollonian sphere packing[J]. *Fractals*, 1994, **2**(4): 521 – 526.
- [18] TURCOTTE D L. Fractals and fragmentation[J]. *Journal of Geophysical Research Solid Earth*, 1986, **91**(B2): 1921 – 1926.
- [19] EINAV I. Breakage mechanics—part I: theory[J]. *Journal of the Mechanics & Physics of Solids*, 2007, **55**(6): 1274 – 1297.
- [20] MARSAL R J. Large-scale testing of rockfill materials[J]. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 1967, **93**(2): 27 – 43.
- [21] LADE P V, YAMAMURO J A, BOPP P A. Significance of particle crushing in granular materials[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1996, **122**(4): 309 – 316.
- [22] ZHANG S, TONG C X, LI X, et al. A new method for studying the evolution of particle breakage[J]. *Géotechnique*, 2015, **65**(11): 911 – 922.
- [23] HARDIN B O. Crushing of soil particles[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1985, **111**(10): 1177 – 1192.
- [24] THORNTON C. Numerical simulations of deviatoric shear deformation of granular media[J]. *Géotechnique*, 2000, **50**(1): 43 – 53.
- [25] LIU C H, NAGEL S R, SCHECTER D A, et al. Force fluctuations in bead packs[J]. *Science*, 1995, **269**(5223): 513 – 515.