

DOI: 10.11779/CJGE201804009

# 边坡稳定分析的非连续面拓扑优化技术

贾苍琴<sup>1</sup>, 黄齐武<sup>\*1, 2</sup>, 王贵和<sup>1</sup>

(1. 中国地质大学(北京)工程技术学院, 北京 100083; 2. 北京市轨道交通建设管理有限公司, 北京 100068)

**摘要:** 土工结构稳定性的极限分析方法研究一直是热点问题。提出的非连续面拓扑优化技术(DTO)的主要特征之处在稳定性问题的极限分析根据节点及其连线而不是单元或实体来进行构造。替代的近似过程主要采用适量的栅格节点来离散问题几何域, 临界破坏机构则由节点间的连线集构造而成。基于 Mohr-Coulomb 屈服准则构造目标函数, 并通过优化来确定极限荷载系数。结合离散构造特征, 引入孔隙水压力和安全系数, DTO 可拓展处理涉及地下水的边坡稳定问题。DTO 是建立临界破坏模式和确定相应安全系数的有效工具, 而无需考虑滑移面的入口/出口限界或点的约束与假设。本研究以复杂条件下的边坡稳定性为例, 深入分析 DTO 和其他各种方法所得结果的一致性和差异性。相关比较表明, 对于材料特性要求高、几何边界和荷载作用条件复杂的边坡稳定分析而言, DTO 技术是一种可靠的替代分析手段。

**关键词:** 上限法; 拓扑优化; 边坡; 孔隙水压力; 非连续面

**中图分类号:** TU435      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-4548(2018)04-0655-10

**作者简介:** 贾苍琴(1976-), 女, 讲师, 主要从事岩土力学数值分析等方面的教学和科研。E-mail: jiacangqin@cugb.edu.cn。

## Slope stability using discontinuity topology optimization technique

JIA Cang-qin<sup>1</sup>, HUANG Qi-wu<sup>1, 2</sup>, WANG Gui-he<sup>1</sup>

(1. School of Engineering and Technology, China University of Geosciences, Beijing 100083, China; 2. Beijing MTR Construction Administration Corporation, Beijing 100068, China)

**Abstract:** Many efforts have been focused on the stability problems of geotechnical structures with the limit analysis methods. A key advance of the proposed method is that the problem is described only in terms of nodes and discontinuities connecting those nodes rather than elements or bodies. The alternative approximation procedure might involve discretization of a given body under consideration using a suitably large number of nodes laid out on a grid, with the failure mechanism comprising the most critical subset of potential discontinuities interconnecting these nodes. The discontinuity topology optimization (DTO) technique using the Mohr-Coulomb failure criterion to formulate the objective function is developed and the collapse load multiplier is determined from optimization. Incorporating the pore-water pressure and factor of safety is consistent with the formulation of nodal grid and inter-node connections, and the ability of the DTO procedure extended to handle the slope problems involving ground water pressures is demonstrated. The use of DTO can be an effective tool for establishing a critical failure mechanism and its corresponding safety factor without the constraints or assumptions regarding entrance/exit limits or points of the slip surface. The uses of various methods and DTO for several examples that focus on complex geotechnical scenarios are compared to illustrate the agreement and difference between the analyses. The developed techniques are shown to provide a viable alternative to analyze the stability of slopes with demanding material behavior, complex geometry and loading conditions.

**Key words:** upper bound theorem; topology optimization; slope; pore-water pressure; discontinuity

## 0 引言

对于诸如挡土墙、地基承载力以及边坡等岩土工程稳定性问题的安全性分析而言, 数值极限分析法是一种直接而又强大的方法。目前, 极限分析研究的重点是开发高效和功能强大的数值工具, 并在工程实践中应用。这些数值工具基于连续、半连续<sup>[1]</sup>或不

连续<sup>[2-3]</sup>理论来实现速度场或应力场的构造。这些构造需借助数值离散化策略和应用数学规划工具来解决。

基金项目: 国家自然科学基金项目(40902085, 41202219); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(2652013104)

收稿日期: 2016-11-28

\*通讯作者 (E-mail: richardhuangqw@163.com)

极限分析问题的数值求解一般分两步来实现<sup>[4]</sup>。第一步是通过引入离散策略来离散问题域(几何范围)。基于有限元的数值形式特别适合极限分析问题的建立<sup>[5-7]</sup>。适当的单元形函数和应力插值函数与所需的屈服准则一起使用,以确保在每个固体单元的内部应力是静力许可的,或流动法则是处处满足的。第二步是构造合适的优化问题,并应用数学规划技术进行求解。事实上,上、下限极限定理都可以以数学优化问题的形式来表述,其目标函数被最小化或最大化,约束于一系列等式和不等式条件。借助有效的数学规划技术可以直接获得极限荷载系数。

但是,在使用有限单元时,所获得的优化解对原始网格的几何形状具有高度的敏感性或依耐性,尤其是在应力或位移奇点区域。虽然采用  $h$  型自适应网格技术可以克服这些不足<sup>[8-12]</sup>,但这种方式使得问题求解复杂化,并需要大量的单元才能获得准确的结果。此外,在极限分析程序中,必须解决涉及线性或非线性优化问题。当屈服条件非线性时,最终的优化问题就是非线性的,致使求解过程困难重重。解决这一弊端的传统方式就是线性化非线性凸屈服准则,使得最终的优化问题简化为线性规划问题。虽然这类典型的线性规划可以采用高效的单纯形法(simplex method)<sup>[13]</sup>或内点法(interior point method)<sup>[14-15]</sup>进行求解,但是线性化过程产生大量的约束,增加获得精确解的计算成本。当然,也可采用非线性规划程序求解涉及精确凸屈服准则的问题。但是,非线性规划问题通常在计算上难以解决,从结果而言只有极少数问题可以求解。诸多困难导致数值极限分析方法在日常工程中未被广泛应用。因此,替代基于有限元的数值极限分析方法是一种值得探索的发展方向。

本研究集中于新型的离散化方法和确保优化问题可以快速有效地进行求解等内容。顾名思义,非连续面拓扑优化技术(discontinuity topology optimization, DTO)采用严密的数学优化技术来识别组成破坏模式的非连续面(或滑移线)的临界布置<sup>[4]</sup>。这些不连续面在岩土稳定性问题中通常称之为滑移面(线),用以界定运动刚性块体之间的边界,并最终形成破坏模式(或机构)。根据塑性理论,与破坏模式相关联的破坏荷载系数一般是极限荷载真值的上限。因此,从本质上而言,DTO 技术是岩土工程师应用多年传统极限分析上限解析法的复制和电算化实现。本文重点以 DTO 技术在岩土边坡稳定分析中进行应用,例证其有效性与准确性。

## 1 非连续面拓扑优化技术

在 DTO 构造中,其数学构造形式完全基于非连

续面的相对位移(本文为广义称谓,实际为应变率或速度),每个非连续面设置变量来定义相对滑动位移。当采用相对位移后,相容协调条件可直接通过节点的线性约束方程进行校验。最终的优化函数定义为含有运动变量的所有非连续面(滑移面)的总的能量耗散。位移变量为线性优化问题的变量。所获得的最优解界定优化的非连续面构建而成的相容破坏机构和最小能量耗散。DTO 从大规模的非连续面中优化确定速度非连续面的临界布置和最小的上限值。

问题研究域采用  $n$  个节点,  $m$  个节点间连线(非连续线)进行构造,每个非连续线均是潜在的破坏滑移面。非连续面通过节点间连线产生,每个非连续面赋予材料特性和参数,并定义边界条件,非连续面组成破坏模式,最终确定内部能量的极值。极限分析上限法非连续面拓扑优化的数学构造形式可表述为<sup>[16]</sup>

$$\begin{aligned} \min \lambda \mathbf{f}_L^T \mathbf{d} = & -\mathbf{f}_D^T \mathbf{d} + \mathbf{g}^T \mathbf{p} , \\ \mathbf{Bd} = & 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{subject to} \quad & \mathbf{Np} - \mathbf{d} = 0 , \\ & \mathbf{f}_L^T \mathbf{d} = 1 , \\ & \mathbf{p} \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{f}_L$  ( $2m$ ),  $\mathbf{f}_D$  ( $2m$ ) 分别为活载、恒载的切向和法向分量;  $\lambda$  为破坏荷载系数;  $\mathbf{g}$  ( $2m$ ) 为非连续面的长度  $l$  和黏聚力  $c$  的乘积,即  $\mathbf{g}^T = \{c_1 l_1, c_2 l_2, \dots, c_m l_m\}$ ;  $\mathbf{B}$  ( $2n \times 2m$ ) 为含有方向余弦的相容矩阵;  $\mathbf{N}$  ( $2m \times 2m$ ) 为塑性流动矩阵。在方程式(1)中,  $\mathbf{d}$  和  $\mathbf{p}$  为线性规划问题的未知量,且  $\mathbf{d}^T = \{s_1, n_1, s_2, n_2, \dots, n_m\}$ ,  $s_i$  和  $n_i$  分别为块体间非连续面  $i$  的相对剪切和法向位移,如图 1 所示,对于单纯的平动模式而言,  $n_i = 0$  ( $i=1, \dots, n$ );  $\mathbf{p}$  ( $2m$ ) 是塑性算子矩阵。

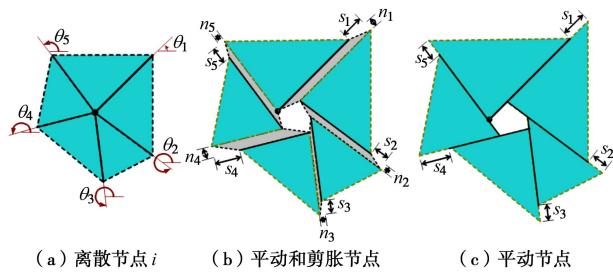


图 1 节点的相容性条件示意

Fig. 1 Compatibility conditions at a node

DTO 通过节点栅格离散和对潜在非连续面的搜索,能保证从全域角度获得最优解。事实上,DTO 构造形式最大的优点在于所研究的问题域是根据节点和节点间的连接线(或非连续面)来描述,而不是常规意义上的单元或是实体(如图 2)。潜在连接线可以是任意节点的连线,无论是预设的节点还是非连续面交叉或重叠产生的节点,在数学构造上也存在一定的优

势。以图 2 (a) 所示的  $3 \times 3$  离散节点为例, 包括 36 个潜在非联系面 (含重叠连线), 这些非连续面可以定义 56 个多边单元和 92 个接触面 (含边界)。在 DTO 程序中, 仅考虑非连续面, 无需考虑单元, 这将显著降低计算成本, 对大规模的节点计算影响尤为明显。从几何学角度而言, DTO 巧妙借助几何学对优化问题进行降维处理, 即将常规的二维域面问题转为二维域的点和线的问题。有理由相信, 推广至三维问题, 也将常规的体问题转化为面问题进行处理。

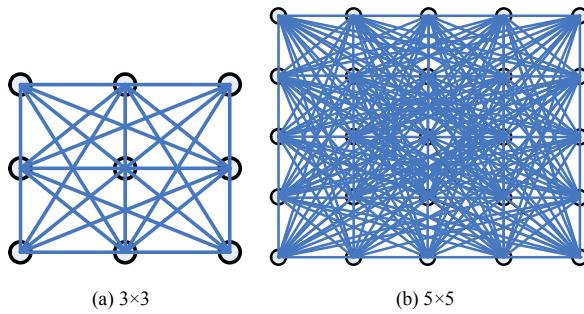


图 2 规则布置节点栅格和非连续面集

Fig. 2 Problem domains defined by regularly spaced nodal grids and with discontinuity sets

受桁架结构优化算法的启发<sup>[17-18]</sup>, DTO 采用相似方法能极大地降低内存存储需求和减少求解的时间。该算法的操作步骤如下<sup>[16]</sup>:

- (1) 建立初始基结构, 其节点间连线 (滑移线) 仅为竖直、水平和对角的邻近连接 (或短滑移线)。
- (2) 采用 DTO 技术构造规划问题, 利用这些短滑移线获得有效的上限解, 尽管该上限解准确度较差。
- (3) 利用该结果, 搜索所有的潜在节点间的连接线, 检验其是否违反屈服条件。
- (4) 若潜在的连接线满足屈服条件, 则增加该屈服连接线到线性优化问题集并重新求解。重复步骤 3。
- (5) 因为所有的潜在连接线都已列入原线性规划问题, 若连接线均没有违背屈服条件, 那么所获得的解即为最优解。

在线性规划问题中, 当非连续面并没有违背屈服条件时, 自适应程序就会终止。因此, 最终的解是包括所有可能非连续面的线性问题的全域最优解。自适应节点连接策略可有效应用于涉及大量潜在非连续面的问题。限于篇幅, 本文不在此赘述相关算法及流程。

## 2 孔隙水压力和安全系数

前节全面阐述基于非连续面拓扑优化上限法的构造形式, 对于边坡稳定性问题的应用则需要做些许的调整, 尤其是要考虑孔隙水压力或地下水的影响以及安全系数的定义。

### 2.1 孔隙水压力

在本研究中, 与基于有限元法的数值极限方法类似, 孔隙水压力作为外力功的形式加以实现, 源于该形式的物理意义更为清晰和明确。由于土体块体理想化为刚性, 仅考虑非连续面集合的孔隙水压力的影响。

为方便计, 在后续分析中  $c$  和  $\varphi$  代替不排水条件下的强度参数  $c'$  和  $\varphi'$  以及排水条件下的强度参数  $c_u$  ( $\varphi_u=0$ )。对于土体自重  $\gamma$ , 黏聚力  $c$  和摩擦角  $\varphi$  的 Mohr-Coulomb 材料而言, 若相邻块体非连续面 (或接触面)  $i$  的相对剪切位移为  $s_i$ , 则内力耗散功和全域的体力功可表述为

$$E = \sum_{i=1}^m c_i l_i s_i + \sum_{j=1}^b \gamma_j A_j v_j, \quad (3)$$

式中,  $m$  为接触面数量,  $b$  为块体数,  $c_i$  和  $l_i$  分别为非连续面  $i$  的剪切强度和长度,  $\gamma_j$ ,  $A_j$  和  $v_j$  分别为滑动块体  $j$  的单位重度、面积和绝对竖向位移。值得指出的是, 为简洁计, 本文提及的能量耗散和位移分别为能量耗散率和速度 (或应变率) 的简称。

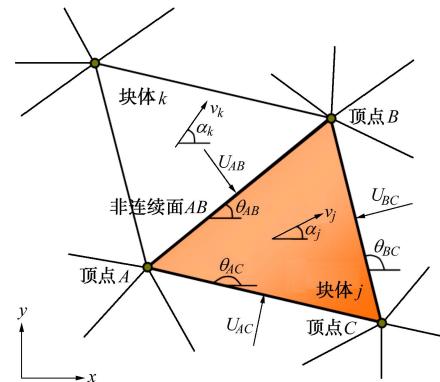


图 3 滑动土 (块) 体孔隙水压力作用示意图

Fig. 3 Effects of water forces on kinematic work equation

本节中首次在 DTO 程序中考虑孔隙水压力。如图 3 所示, 为部分滑移块体模型, 其中每个块体  $j$  均有绝对位移  $v_j$  和水平倾角  $\alpha_j$ 。孔隙水压力 ( $U$ ) 法向且向内作用在单元的任意面。作用在块体  $j$  的功  $E$  可以表述为

$$E_j = v_j \{ U_{AB} \cos[\alpha_j - (\theta_{AB} - \pi/2)] + U_{BC} \cos[\alpha_j - (\theta_{BC} - \pi/2)] + U_{AC} \cos[\alpha_j - (\theta_{AC} - \pi/2)] \}, \quad (4)$$

同样地, 对于块体  $k$  的功为

$$E_k = v_k \{ U_{AB} \cos[\alpha_k - (\theta_{AB} + \pi/2)] + \dots \}, \quad (5)$$

因此, 对于非连续面  $AB$ , 其功为

$$\begin{aligned} E_{AB} &= v_j \{ U_{AB} \cos[\alpha_j - (\theta_{AB} - \pi/2)] \} + \\ &\quad v_k \{ U_{AB} \cos[\alpha_k - (\theta_{AB} + \pi/2)] \} \\ &= U_{AB} \{ v_j \sin(\theta_{AB} - \alpha_j) - v_k \sin(\theta_{AB} - \alpha_k) \} \end{aligned}$$

$$= U_{AB} n_{AB} , \quad (6)$$

式中,  $n_{AB}$  为非连续面法向相对位移,  $U_{AB}$  为作用在非连续面  $AB$  的孔隙水压力。正如预期一样, 孔隙水压力仅对剪胀材料的塑性分析有影响<sup>[19]</sup>。

因此, 孔隙水压力在 DTO 构造形式中仅简单增加功方程额外项  $U_i n_i$ , 其中,  $U_i$  为非连续面作用力。对给定的孔隙水压力作用域, 无论涉及静水压力条件抑或是渗流条件, 直接的做法是沿非连续面集合孔隙水压力形成最终作用力。因此, 方程 (3) 变为

$$E = \sum_{i=1}^m (c_i l_i s_i + U_i n_i) + \sum_{j=1}^b \gamma_j A_j v_{zj} , \quad (7)$$

式中, 对于满足 Mohr–Coulomb 屈服准则的块体, 有  $n_i = |s_i| \tan \varphi_i$ 。

当然, 与非连续面  $i$  的耗散能量表述相一致, 方程 (7) 可以表述为

$$E = \sum_{i=1}^m (c_i l_i s_i + U_i n_i + W_i s_i \sin \theta_i + W_i n_i \cos \theta_i) , \quad (8)$$

式中,  $W_i$  为非连续面  $i$  上部条形块体重度, 可通过单位土重在土条区域进行双重积分获得, 如图 4 所示;  $\theta_i$  为非连续面  $i$  与水平方向夹角。

孔隙水压力可表述为

$$U = r_u \gamma z , \quad (9)$$

式中,  $r_u$  为孔隙水压力系数,  $\gamma$  为块体材料重度,  $z$  为滑移面到边坡的竖直距离。

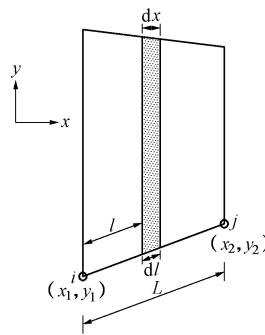


图 4 非连续面  $i$  上部土条重度示意图

Fig. 4 Strip weights above discontinuity  $i$  with nodes

## 2.2 安全系数

边坡安全系数的定义形式多样, 结合 DTO 法的数值构造形式, 本文采用强度折减法确定边坡安全系数 (factor of safety, FOS)。通过迭代折减土体的强度参数  $c$  和  $\varphi$  使土体达到极限平衡状态。在此, 安全系数与普遍使用的极限平衡法中的定义相一致, 即

$$c'_e = \frac{c}{FOS} , \quad (10a)$$

$$\tan \varphi'_e = \frac{\tan \varphi}{FOS} , \quad (10b)$$

如此, 仍可以确保以线性规划方法应对含有折减参数

$c'_e$  和  $\varphi'_e$  的流动准则和虚功率方程等约束条件。

传统的极限上限定理表述外力功率与机动容许速度场的塑性耗散内力功率之比不小于实际破坏荷载。对边坡稳定分析而言, 通过虚功率方程获得的安全系数大于或等于真值。因此, 根据线性规划, 边坡的极限分析上限最终表征为目标函数为安全系数的最小值问题。

## 3 算例与应用

1987 年, 澳大利亚计算机应用协会 (Association for Computer Aided Design, ACADS) 对澳大利亚所使用的边坡稳定分析程序进行一次调查。Monash 大学的 Donald 教授邀请国际上在边坡稳定分析程序方面做过较多工作的研究者提供裁判程序 (reference program) 答案。本研究以相关考题为例进行校核和比对, 验证 DTO 程序的有效性和准确性, 并在此基础上进行了拓展应用, 进一步例证 DTO 的潜力。

本文的算例均在 2.67 GHz Intel Core i7 处理器、4GB 内存和 32 位 Windows XP 系统笔记本电脑上完成。所引用的 CPU 耗时包括所有节点连接和建立、求解线性方程的时间。当采用自适应节点连接方案时, CPU 耗时也包括鉴别潜在非连续面进入下一步迭代计算的时间。

### 3.1 软弱层不排水黏土边坡

Griffiths 等首次采用有限元对排水黏土边坡稳定性进行分析。该边坡由一层薄的软弱层组成, 软弱层先平行于坡面然后水平坡脚。软弱层的存在影响边坡的稳定性, 在本例中采用不同的  $c_{u2}/c_{u1}$  值。

表 1 材料参数

Table 1 Material properties

$c_{u1}$ /kPa	$\gamma$ (kN·m <sup>-3</sup> )	$c_{u2}/kPa$				
		$c_{u2}/c_{u1}$ = 1.0	$c_{u2}/c_{u1}$ = 0.8	$c_{u2}/c_{u1}$ = 0.6	$c_{u2}/c_{u1}$ = 0.4	$c_{u2}/c_{u1}$ = 0.2
50	20.0	50	40	30	20	10

边坡几何尺寸和材料特性如图 5 所示。由图可知, 边坡几何尺寸和 3 种不同的离散节点密度。边坡的高度为 10 m, 边坡水平倾角为 26.57° (2:1)。土体的强度参数见表 1。边坡稳定分析采用不排水剪切强度值  $c_{u1}$  恒定, 而调整软弱层  $c_{u2}$  值和  $c_{u2}/c_{u1}$  不同比值 1.0, 0.8, 0.6, 0.4 和 0.2。不同  $c_{u2}/c_{u1}$  值的边坡 DTO 和有限元计算的临界破坏形式如图 5 所示。边坡稳定分析中分别使用 3 种不同节点密度或节点目标数 250 (粗)、500 (中) 和 1000 (细)。表 2 汇总罗列了 3 种不同节点密度下的计算统计数据。离散节点数量可以通过节点密度设置来实现。一般建议在初始计算时采用粗或

中等密度模式以便快速获得数值解; 对于确定最终的准确解, 可以采用密的节点密度来实现。

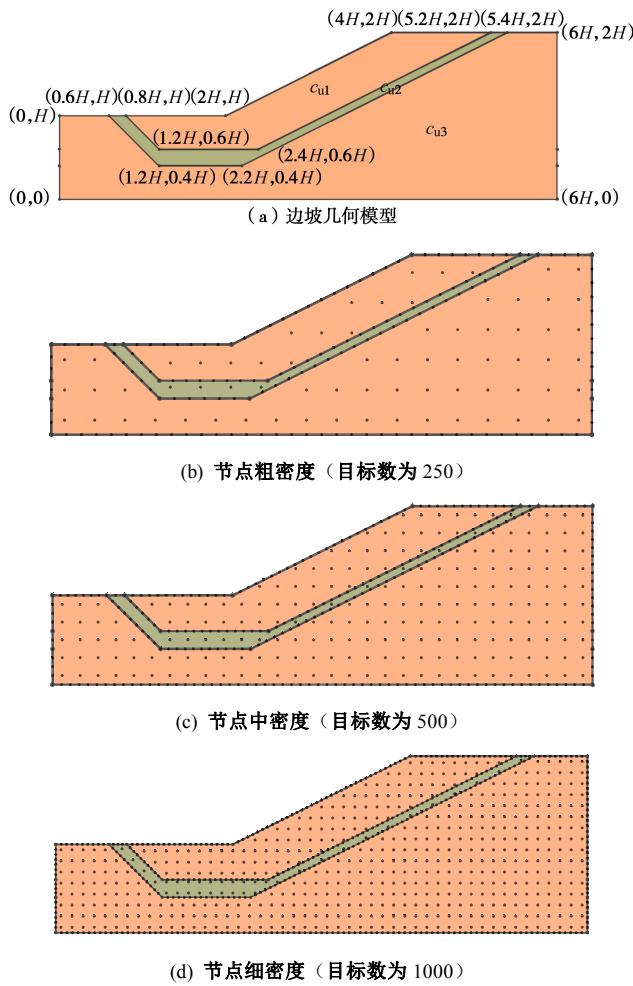


图 5 软弱层不排水黏土边坡几何尺寸和节点密度示意图  
Fig. 5 Geometry and nodal density for an undrained clay slope with a thin weak layer

表 2 软弱层边坡 DTO 计算结果统计表 ( $c_{u2}/c_{u1}=0.6$ )

Table 2 Statistic results for upper bound computations

节点密度及 潜在连接线	迭代步	变量	约束 方程	耗时 /s	安全系 数 FOS
234 节点 9774 连接线	6	6888	3568	4.031	1.397
484 节点 39981 连接线	9	14567	7234	16.219	1.388
967 节点 147940 连接线	9	29941	14344	38.288	1.379

DTO 法和有限元计算的边坡安全系数汇总在表 3 中。不同  $c_{u2}/c_{u1}$  值情况下采用上限法计算的安全系数和破坏模式与 Morgenstern-Price 法非常接近或相似。根据计算结果不难发现, 当  $c_{u2}/c_{u1}>0.6$  时, 软弱薄层的强度不影响边坡的安全系数, 相应的破坏模式滑移面为圆弧形。当  $c_{u2}/c_{u1}$  比值为 0.4 至 0.2 时, 边坡的破坏模式为非圆形, 其滑移面与软弱薄层的几何形态相一致。

表 3 存在软弱层边坡计算安全系数对比表

Table 3 Comparison of safety factors by different methods

$c_{u2}/c_{u1}$	安全系数 (FOS)		
	Morgenstern-Price 法	有限元法	本文方法
1.0	1.448	1.451	1.519
0.8	1.446	1.424	1.475
0.6	1.400	1.366	1.388
0.4	0.902	0.954	0.982
0.2	0.451	0.505	0.560

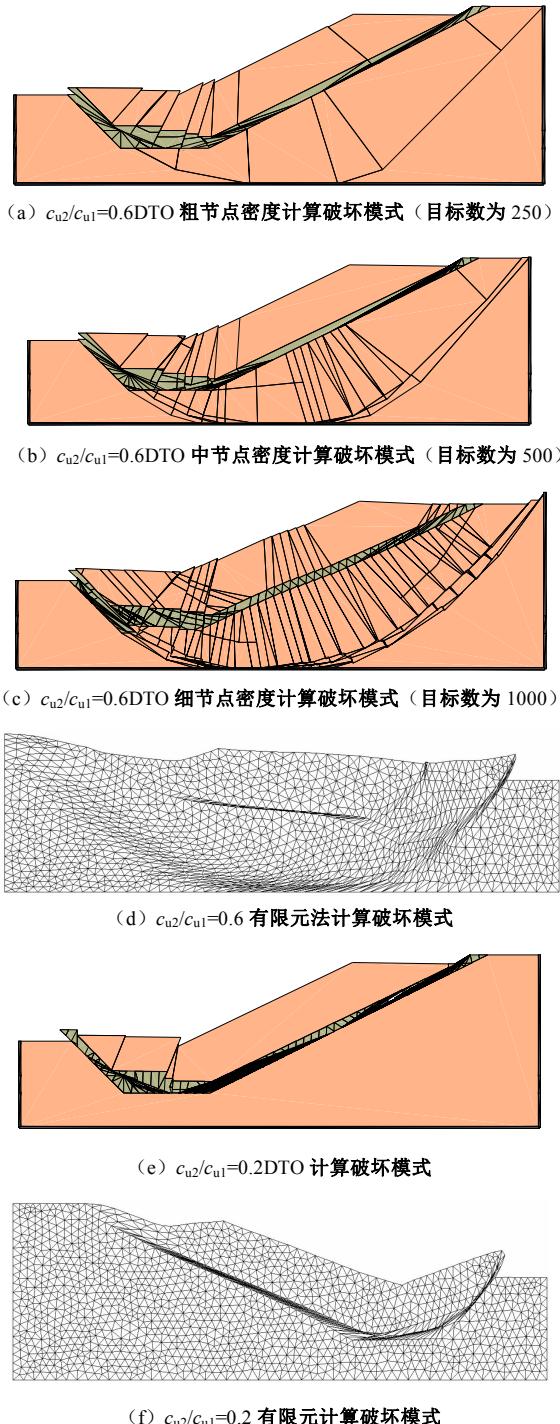


图 6 存在软弱层不排水黏土边坡 DTO 和 FEM 计算破坏模式

Fig. 6 Failure mechanism for an undrained clay slope with a thin weak layer using DTO and FEM

### 3.2 存在软弱薄层、浸润面和外荷载的边坡

ACADS 考题案例边坡几何尺寸、外加荷载以及浸润面如图 7 (a) 所示, 土体参数如表 4。DTO 计算的安全系数为 0.807, 与之相应的破坏模式见图 7(b)~(d)。不同的节点密度和计算统计结果详见表 5。

表 4 土体参数

Table 4 Material properties

类型	黏聚力 $c$ /kPa	摩擦角 $\varphi$ ( $^{\circ}$ )	重度 $\gamma$ ( $\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$ )
土层 1	28.5	20.0	18.84
土层 2	0.0	10.0	18.84

表 5 边坡计算参数统计表

Table 5 Statistic results for upper bound computations

节点密度及 潜在连接线	迭代 步	变量	约束	耗时 /s	安全 系数 FOS
229 节点 9496 连接线	8	15600	8721	9.406	0.830
476 节点 39740 连接线	9	33334	18476	27.844	0.807
953 节点 148993 连接线	14	64795	35853	147.750	0.804

Baker<sup>[21]</sup>, Donald<sup>[22]</sup>和其他研究人员对该案例 400 mm 厚软弱层进行详细的研究, 推荐最小安全系数为 0.78<sup>[23-24]</sup>。本文获得安全系数为 0.804, 大于推荐答案, 相应的破坏模式如图 7 所示。极限平衡法和有限元法等不同方法获得的安全系数如表 6 所示。该案例稳定性分析的最大难点在于软弱带的出现及其厚度。如果软弱带相对小, 临界滑移面的搜索中很难避免常规极限平衡方法局部最小化的不足。而且, 坡顶右侧的滑移线与边界条件区域重合, 因此, 获得的最优解未必为最小值。这些均为确定临界滑移面带来一定的困难。另外, 由于坡顶为梯形荷载, 本程序仅能采用均匀荷载(和集中荷载)实现, 对最终结果也造成一定的误差。

表 6 不同方法计算安全系数比较

Table 6 Comparison of safety factors by various methods

出 处	方 法	安全系数 FOS
本文方法	平动	0.804
Cheng <sup>[25]</sup>	Slope 2000	0.688
	Spencer 法 (Monte Carlo 法)	0.76
Slide <sup>[23]</sup>	General limit equilibrium (GLE)	0.721
	Janbu Corrected	0.734
Phase2 <sup>[24]</sup>	FEM-SSR (shear strength reduction)	0.69

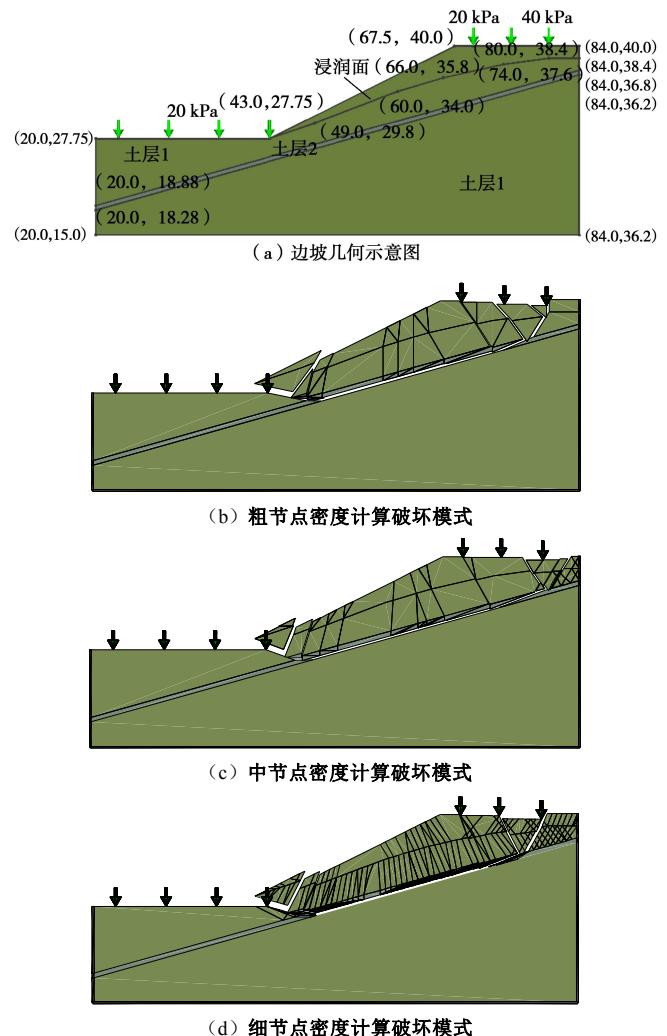


图 7 边坡几何尺寸和破坏模式

Fig. 7 Slope geometry and failure mechanism

### 3.3 存在软弱层的非均质边坡

边坡几何、土层剖面、强度参数以及土体重度如图 8 和表 7 所示。由图 8 不难发现, 相对软弱层位于土层中间。3 种不同节点密度情况下的数值解汇总于表 8。比较极限平衡法和有限元等不同方法的计算结果, 不难发现 DTO 同样适用于求解非均质边坡的稳定性问题。表 9 的最小安全系数的比较也侧面说明 DTO 技术与之前的研究结果趋于一致。

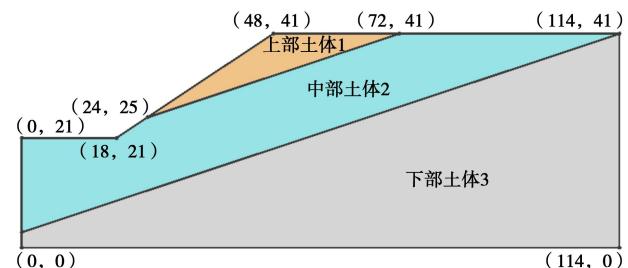


图 8 3 层不同土层非均质边坡的几何示意图

Fig. 8 Geometry on inhomogeneous slope with three layers of soil

表7 材料参数

Table 7 Material properties

土 体	黏聚力 $c$ /kPa	摩擦角 $\phi$ ( $^{\circ}$ )	重度 $\gamma$ ( $\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$ )
上部土体	29.4	12	18.8
中部土体	9.8	5	18.8
下部土体	29.4	40	18.8

表8 不同节点密度数值计算统计表

Table 8 Statistic results for upper bound computations

节点密度及 潜在连接线	迭代 步	变量 数	约束 数	耗时 /s	安全 系数 FOS
246 节点 14147 连接线	17	17467	9630	22.657	0.449
499 节点 53756 连接线	16	35257	19373	57.188	0.446
969 节点 186111 连接线	21	62926	34747	179.172	0.439

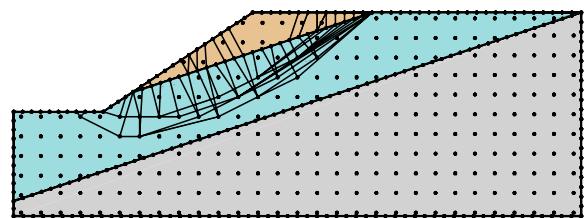
边坡破坏模式的非连续面临界布局如图 9 所示。边坡研究区域分别采用节点目标数为 500, 1000 两种不同密度进行离散 (如图 9 所示)。采用 DTO 技术进行安全系数分析, 如表 8 所示, 计算结果与节点细分的相关性趋于一致: 节点密度越大, 安全系数结果更趋准确或更接近真实解。当节点数量足够时, 获得的安全系数趋于一定值。正如表 9 所示, 考虑滑移模式的安全系数介于 Kim 等<sup>[26]</sup>的上限和下限值之间, 但大于 Spencer 法的计算结果<sup>[27]</sup>。图 9(c)进一步呈现 DTO 法获得机动容许速度场破坏模式。正如图 9 所示, 临界滑移面定位在软弱土层中, 并不是圆弧形滑移面。本文获得的临界滑移面与 Malkawi 法<sup>[28]</sup>的求解结果相类似, 其安全系数为 0.401。仔细比对滑移面的形状, 发现很大一部分滑移面穿过第一层土体。如果滑移面完全穿越第二层土体, 其安全系数会更小。Cheng 等<sup>[29]</sup>曾提及滑移面可以完全穿越软弱层的右侧端部。由于 DTO 从全域进行滑移面的搜索, 因此, 上述的滑移面模式仅是一种人为的设想或是期望。

表9 不同方法计算安全系数的比较

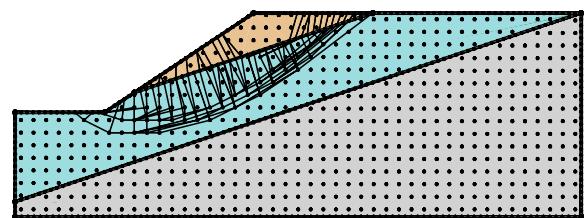
Table 9 Comparison of factor of safety by various methods

出 处	方 法	安全系数 FOS
本文方法	平动	0.446
Liu 等	平动	0.547
Greco	Spencer 法 (Monte Carlo 法)	0.39
Greco	Spencer 法 (pattern search method )	0.39
Kim 等	Bishop 法	0.43
Kim 等	FEM-based 下限法	0.40
Kim 等	FEM-based 上限法	0.45

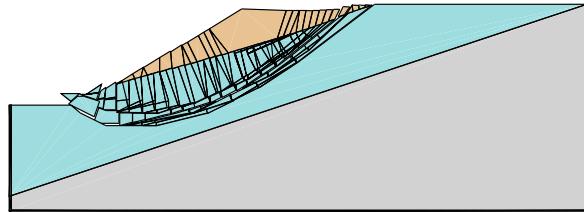
这些案例计算验证了 DTO 程序的有效性和便利性。在 DTO 程序中, 不需预先指定临界滑移面或滑移面出、入口限界。确定的破坏模式和安全系数可同时获得, 其可视化程度远胜于常规的有限元和极限平衡法, 尤其是随着边坡复杂程度的增加, DTO 程序的优越性越发显著。



(a) 破坏模式临界非连续面的布局 (节点目标数为 500)



(b) 破坏模式临界非连续面布局 (节点目标数为 1000)



(c) 破坏模式 (节点目标数为 1000)

图9 非均质边坡非连续面临界布局及破坏模式

Fig. 9 Critical layout of discontinuity and failure mechanism of inhomogeneous slope

### 3.4 外突悬崖 (overhang cliff)

为例证 DTO 程序的功能, 本算例选择几何尺寸更为复杂的外突悬崖进行分析。悬崖的几何和数值模型详见图 10 所示, 材料参数见表 10。常规极限平衡分析方法难以处理这样复杂的几何边坡问题。一般情况下, 进行简化处理忽视外突几何部分, 或采用平均值法进行边坡滑移和剪阻的分析。表 11 为 DTO 法数值计算结果统计, 离散节点和连接线数量、求解耗时及安全系数均罗列其中, 最终悬崖安全系数  $FOS=1.361$ 。

表10 悬崖数值模型参数表

Table 10 Material properties

类型	黏聚力 $c$ /kPa	摩擦角 $\phi$ ( $^{\circ}$ )	重度 $\gamma$ ( $\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$ )
地层 1	350	35.5	24
地层 2	120	28	21
地层 3	1000	45	25

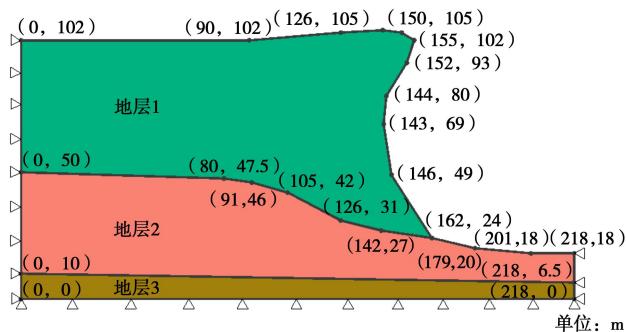


图 10 悬崖几何及计算模型

Fig. 10 Geometry and numerical modelling of overhang cliff

图 11 为离散节点目标数为 1000 的布局图。不难发现, 边界和接触面节点的密度大于边坡研究区域内的节点分布, 在本文采用这种处理方法的优势旨在极大化计算效率。因此, 在边界和接触面采用节点密度大于常规区域内节点密度的策略, 主要有以下两方面的考虑: ①非连续面不能直接贯穿区域边界 (有节点处除外); ②增加边界处节点, 以弥补非连续面不能贯穿的不足。此外, 对于特定应用范畴, 这一做法也有其特殊优越性, 尤其涉及土体-结构相互作用或考虑结构体的转动。

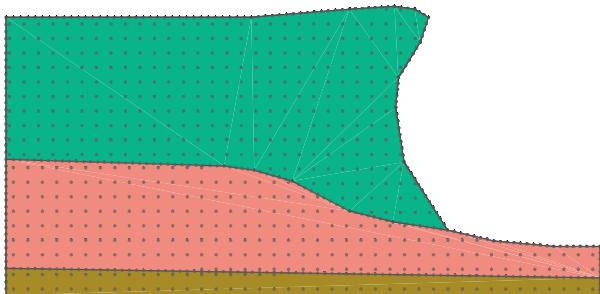


图 11 离散节点布局示意图 (节点目标数为 1000)

Fig. 11 Layout of nodes with target number of 1000

表 11 悬崖数值分析统计

Table 11 Statistical results of overhang cliff

节点密度及 潜在连接线	迭代 步	变量	约束	耗时 /s	安全 系数 FOS
240 节点 11249 连接线	15	14059	7877	11.781	1.406
482 节点 41681 连接线	23	26005	14665	35.312	1.382
972 节点 155397 连接线	38	74240	40389	246.645	1.368
2008 节点 577433 连接线	42	124511	68832	586.703	1.364
3001 节点 1155972 连接线	47	216063	117732	989.013	1.361

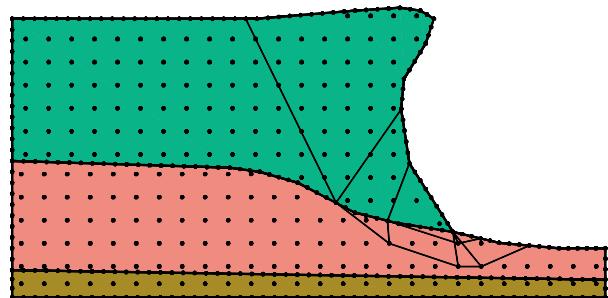


图 12 离散节点和临界非连续面布局 (482 个节点数)

Fig. 12 Node discretization and critical layout of discontinuities  
(node number of 482)

图 12 为 DTO 在节点数为 482 个 (中节点密度) 情况下计算的破坏模式和临界非连续面布置示意图。由图可知, 滑移面或非连续面是从节点间连接布置来实现的, 非连续面或滑移面的复杂形式与节点密度密切相关。图 13 为安全系数为 1.364 的悬崖破坏模式, 相应的节点目标数为 2008 个。图 14 为安全系数为 1.361 的破坏模式, 非连续面因节点密度增大而增加, 破坏模式也更为复杂。就图 13 和图 14 的破坏形式而言, 悬崖的破坏是滑移 (平动) 和分离 (剪胀特性) 的组合破坏模式; 从滑动体的构造来看, 其定位和排列与常规的竖直条分法差异挺大, 这也说明斜条分法或 Sarma 法分析边坡的必要之处。

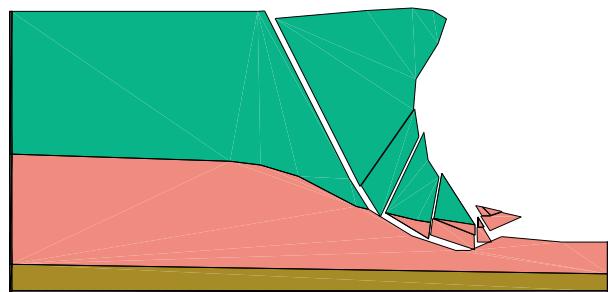


图 13 悬崖临界破坏模式 (安全系数 FOS=1.364)

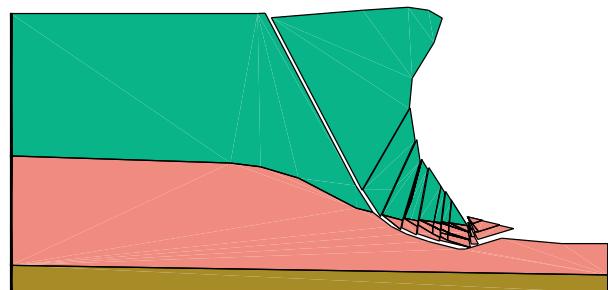
Fig. 13 Critical failure mechanism for overhang cliff with  
FOS=1.364

图 14 悬崖临界破坏模式 (安全系数 FOS=1.361)

Fig. 14 Critical failure mechanism for overhang cliff with FOS of  
1.361

## 4 结语

非连续面拓扑优化(DTO)技术的真正新颖之处在于极限分析问题的表达形式完全依据非连续面的布置, 而不是单元的布局。采用新近发展的自适应(节点)连接技术, DTO可以扩展为离散节点连接线的增加和剔除。优化解可以在常规配置的电脑上消耗合理时间即可获得, 即使是大规模优化问题。

与其他数值方法一样, DTO的求解精度受固体和边界离散节点密度的影响。DTO技术提供临界滑动块体破坏机构, 这些机构通过离散节点的连线构成滑动面组成。一般情况下, 离散节点目标数达到500左右即可得到足够精度的优化解, 部分则需超过2000节点数才能获得最优解。

结合点阵格离散方式, 引入孔隙水压力系数 $r_u$ 和边坡安全系数, 拓展DTO技术处理涉及地下水的边坡稳定性问题。通过基准算例的分析比对, 证实DTO技术在边坡稳定分析中的准确性和有效性。DTO技术可作为边坡稳定分析的一种可靠的替代手段, 且在确定复杂边坡(几何条件和受荷作用下)临界滑移面的优势较为明显。当然, 对于岩质边坡和三维边坡稳定分析有待进一步探讨和研究。

## 参考文献:

- [1] CHENG Y M, LAU C K. Slope stability analysis and stabilization: new methods and insight[M]. Abingdon: Routledge, 2008.
- [2] KRABBENHOFT K, LYAMIN A V, HJIAJ M, et al. A new discontinuous upper bound limit analysis formulation[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, **63**: 1069–1088.
- [3] ALWIS W A M. Discrete element slip model of plasticity[J]. Engineering Structures, 2000, **22**: 1494–1504.
- [4] SMITH C C, GILBERT M. Application of discontinuity layout optimization to plane plasticity problems[J]. Proceedings of the Royal Society A- Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2007, **463**(2086): 2461–2484.
- [5] LYSMER J. Limit analysis of plane problems in soil mechanics[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 1970, **96**(4): 1311–1334.
- [6] SLOAN S W, KLEEMAN P W. Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1995, **127**(1/2/3/4): 293–314.
- [7] MAKRODIMOPOULOS A, MARTIN C M. Lower bound limit analysis of cohesive-frictional materials using second-order cone programming[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, **66**(4): 604–634.
- [8] CHRISTIANSEN E, PEDERSEN O S. Automatic mesh refinement in limit analysis[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, **50**: 1331–1346.
- [9] BORGES L A, ZOUAIN N, COSTA C, FEIJOO R. An adaptive approach to limit analysis[J]. International Journal of Solids Structures, 2001, **38**: 1707–1720.
- [10] FRANCO J R Q, PONTER A R S, BARROS F B. Adaptive F E method for the shakedown and limit analysis of pressure vessels[J]. European Journal of Mechanics (A/Solids), 2003, **22**: 525–533.
- [11] LYAMIN A V, SLOAN S W. Mesh generation for lower bound limit analysis[J]. Advances in Engineering Software, 2003, **34**: 321–338.
- [12] CIRIA H, PERAIRE J, BONET J. Mesh adaptive computation of upper and lower bounds in limit analysis[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008, **75**: 899–944.
- [13] CHRISTIANSEN E. Computation of limit load[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1981, **7**: 1547–1570.
- [14] ANDERSEN K D, CHRISTIANSEN E. Limit analysis with the dual affine scaling algorithm[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1995, **59**: 233–243.
- [15] GONDZIO J, SARKISSIAN R. Column generation with a primal-dual method[R]. Geneva: University of Geneva, 1997.
- [16] HUANG Q W, JIA C Q, XIA B R, WANG G H. Novel computational implementations for stability analysis[J]. Applied Mechanics and Materials, 2011, **90-93**: 778–785.
- [17] DORN W C, GOMORY R E, GREENBERG H J. Automatic design of optimal structures[J]. J De Mechanique, 1964, **3**(1): 25–52.
- [18] GILBERT M, TYAS A. Layout optimization of large-scale pin-jointed frames[J]. Engineering Computations, 2003, **20**(8): 1044–1064.
- [19] SMITH C C, GILBERT M. New upper bound solutions for layered soil bearing capacity problems using discontinuity layout optimization[C]// 10th Australia New Zealand Conference on Geomechanics. Brisbane, 2007: 250–255.
- [20] GRIFFITHS D V, LANE P A. Slope stability analysis by finite elements[J]. Géotechnique, 1999, **49**(3): 387–403.

- [21] BAKER R. Determination of the critical slip surface in slope stability computations[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1980, **4**(4): 333 - 359.
- [22] DONALD I, GIAM P. The ACADS slope stability programs review[C]// Proceedings of the 6th International Symposium on Landslides. Christchurch, New Zealand, 1992: 1665 - 1670.
- [23] DUNCAN J M. State of the art: Limit equilibrium and finite element analysis of slopes[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1996, **122**(7): 577 - 596.
- [24] DAWSON E M, ROTH W H, DRESCHER A. Slope stability analysis by strength reduction[J]. Géotechnique, 1999, **49**(6): 835 - 840.
- [25] CHENG Y M. Location of critical failure surface and some further studies on slope stability analysis[J]. Computers and Geotechnics, 2003, **30**(3): 255 - 267.
- [26] KIM J, SALGADO R, LEE J. Stability analysis of complex soil slopes using limit analysis[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2002, **128**(7): 546 - 557.
- [27] GRECO V R. Efficient Monte Carlo technique for locating critical slip surface[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1996, **122**(7): 517 - 525.
- [28] MALKAWI H A I, HASSAN W F, SARMA S K. Global search method for locating general slip surface using Monte Carlo techniques[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2001, **127**(8): 688 - 698.
- [29] CHENG Y M, LI L, CHI S C. Performance studies on six heuristic global optimization methods in the location of critical slip surface[J]. Computers and Geotechnics, 2007, **34**(6): 462 - 484.
- [30] LIU J, ZHAO J. Limit analysis of slope stability by rigid finite-element method and linear programming considering rotational failure[J]. International Journal of Geomechanics, 2013, **13**(6): 827 - 839.

## 《岩土工程学报》征订启事

《岩土工程学报》创办于 1979 年, 是我国水利、土木、力学、建筑、水电、振动等六个全国性学会联合主办的学术性科技期刊。由南京水利科学研究院承办, 国内外公开发行。主要刊登土力学、岩石力学领域中能代表当今先进理论和实践水平的科学的研究和工程实践成果等。报道新理论、新技术、新仪器、新材料的研究和应用。欢迎国家自然科学基金项目及其他重要项目的研究成果向本刊投稿, 倡导和鼓励有实践经验的作者撰稿, 并优先刊用这些稿件。主要栏目有黄文熙讲座、综述、论文、短文、工程实录、焦点论坛、讨论和简讯等。

本刊被《中文核心期刊要目总览》连续多年确认为核心期刊, 并在建筑类核心期刊中位于前列; 本刊被科技部“中国科技论文统计源期刊”(中国科技核心期刊)及“中国科技论文与引文数据库”收录; 本刊被中国科学院“中国科学引文数据库”收录; 本刊被“中国知网”全文收录及“中国学术期刊综合评价数据库”收录; 本刊被“工程索引 Ei Compendex 数据

库”和“日本科学技术振兴机构数据库 JST”等国际数据库收录。本刊网址 ([www.cgejournal.com](http://www.cgejournal.com)) 全文发布本刊所有刊载文章。

本刊读者对象为土木建筑、水利电力、交通运输、矿山冶金、工程地质等领域中从事岩土工程及相关专业的科研人员、设计人员、施工人员、监理人员和大专院校师生。

本刊为月刊, A4 开, 双栏排版, 192 页, 每月中旬出版, 每期定价 40 元, 全年定价 480 元。

本刊国际标准刊号 ISSN 1000 - 4548, 国内统一刊号 CN 32 - 1124/TU, 国内发行代号 28 - 62, 国外发行代号 MO 0520。欢迎广大读者在全国各地邮局订购, 也可在编辑部订购(不另收邮费)。编辑部订购地址: 南京虎踞关 34 号《岩土工程学报》编辑部; 邮编: 210024; 联系电话: 025-85829534, 85829543, 85829553, 85829556; 传真: 025-85829555; E-mail: ge@nhr.ac.cn。

(本刊编辑部)