

DOI: 10.11779/CJGE201804006

指数量型岩石真三轴强度准则

张 强, 李 诚, 郭 强, 闵 明, 蒋斌松, 王延宁

(中国矿业大学力学与土木工程学院 深部岩土力学与地下工程国家重点实验室, 江苏 徐州 221116)

摘要: 岩石强度是工程岩体稳定性评价和结构优化设计的前提和基础, 通过岩石真三轴试验分析了岩石强度演变特征: ①随着最小主应力的增加, 岩石强度逐渐增大, 但增幅逐渐减小并趋于零; ②岩石广义压拉强度比随静水压力的增大呈先增大再减小的规律, 并最终趋于 1, 即在 π 平面上呈三角形向圆形转变的过程; ③岩石强度随中间主应力增大表现为先增大再减小的过程。三参数型指数函数完全符合岩石强度在子午面上的基本特点, 而 L_{WW} , L_{MN} 和 L_{YMH} 3 个罗德函数准确反映了中间主应力对岩石强度的影响, 且无条件满足拉压子午面区间光滑、连续、外凸性要求。利用 π 平面广义拉压强度比和罗德函数将指数量型拉压子午面结合, 构建了指数量型真三轴强度准则, 分析了强度参数对岩石强度的影响及其空间包络特征。最后采用 14 种岩石的真三轴试验数据对指数量型真三轴强度准则进行了最优拟合误差分析, 结果表明指数量型真三轴强度准则均具有良好的拟合精度, 可正确描述软-硬不同性质岩石的强度特征。

关键词: 岩石; 真三轴试验; 子午面; 罗德函数; 强度准则

中图分类号: TU452 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2018)04-0625-09

作者简介: 张 强(1982-), 男, 2005 年毕业于中国矿业大学土木工程专业, 现任副教授, 主要从事岩石力学与工程方面的科研与教学工作。E-mail: jakezhq@126.com。

Exponential true triaxial strength criteria for rock

ZHANG Qiang, LI Cheng, GUO Qiang, MIN Ming, JIANG Bin-song, WANG Yan-ning

(School of Mechanics and Civil Engineering, State Key Laboratory for Geomechanics and Deep Underground Engineering, China

University of Mining & Technology, Xuzhou 221116, China)

Abstract: The rock strength is the premise and foundation for stability evaluation of rock engineering and optimization design of structures. Based on the true triaxial test results, the evolution of rock strength are analyzed: (1) The rock strength increases with the minimum principal stress, however, its increasing amplitude gradually decreases and tends to be zero; (2) The ratio of generalized compression to the extension strength firstly increases then decreases, and finally tends to be one with the increasing minimum principal stress. The envelope of strength criteria on deviatoric plane varies from approximate triangle to circular; (3) During the process of the intermediate principal stress increasing from the minimum principal stress to the maximum one, the rock strength firstly increases and then decreases. The exponential function with three parameters satisfies the basic characteristics of rock strength on the meridian plane. And the Lode dependence functions of L_{WW} , L_{MN} and L_{YMH} well reflect the effect of the intermediate principal stress, and unconditionally satisfy the smooth, continuous and convex requirements. Then the exponential true triaxial strength criteria are proposed by combining the extension and compression meridian curves with the selected lode dependence functions. The influences of strength parameters and space characteristics are further analyzed. Finally, fourteen types of rock true triaxial test data are employed to validate the proposed criteria. The results show that the proposed exponential true triaxial strength criteria are of good accuracy in predicting rock strength, and can well reflect different types of rock ranged from soft to hard.

Key words: rock; true triaxial test; meridian plane; Lode dependence function; strength criterion

0 引言

岩石强度是工程岩体稳定性评价、结构设计优化和承载能力正确评估的基础。工程岩体理论和数值计算分析以经典的 Mohr-Coulomb 准则 (MC)、格列菲斯准则 (Griffith) 和 Hoek-Brown 准则 (HB) 为主,

主要是因为这 3 个经典强度准则数学表达式较为简单, 且各强度参数具有明确的物理意义, 但由于其均

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51204168, 51374199); 中国博士后基金项目 (2013M531424, 2015M580493); 江苏省博士后基金项目 (1301123C)

收稿日期: 2016-12-09

未考虑中间主应力的影响，往往对真三轴试验数据拟合精度不高^[1-2]。为提高工程岩体稳定分析准确性和精度，充分发挥岩体自身承载能力，亟需构建能正确描述多种岩石承载能力的普适强度准则。

近年来，在大量试验和理论分析的基础上，学者提出了多种多样的真三轴强度准则，大致可以归为两大类：①根据岩石强度理论和承载特点构建新函数形式的强度函数式，如考虑静水压力效应由 Misses 强度准则推导的 DP 强度准则^[3]，尤明庆基于试验数据提出了岩石真三轴强度准则，其在压子午面可能呈内凹特征，理论上违背了 Druker-Prager 假定^[4]，但其在围岩稳定分析中仍取得了一定的应用；李春光等基于 Mohr 理论建立了考虑岩石破裂角的双参数抛物线理论型的强度准则，解除了格列菲斯准则压拉强度比为 8 的限制，可视为格列菲斯强度准则的扩展，但该准则拉压子午面差值在压应力区为定值，与试验结果不符^[5]；考虑到 MC 准则在高围压状态下高估岩石强度的缺点，Singh 引入一指数函数对高围压状态进行了修正^[6]。②根据现有常规三轴强度准则进行中间主应力影响修正（主要是对 MC 和 HB 强度准则），如 Mogi 将中间主应力引入到 Mohr-Coulomb 准则中，构建了 Mogi 强度准则，虽然其对真三轴试验数据拟合精度有了明显的提高，但在偏平面内凹的特性同样不符合强度准则基本原理^[7]；俞茂宏同样考虑中间主应力的影响，将其线性引入 MC 强度准则中，建立了统一强度准则^[8]；Zhang 等基于 MC 准则分别提出了 MCWW 和 MCJP 强度准则^[9-10]；在 HB 准则基础上提出的中间主应力修正型真三轴强度准则主要有 HBWW^[10]、Z-Z^[11]、3D HB^[12]、HBMN^[13]及姜华等提出的修正模型等^[14]。对新提出的各种强度准则，学者均采用（真）三轴试验数据进行了拟合验证，但这些数据部分引自二次文献，数据不完整及错误现象较为普遍，影响了新强度准则的适用性评价。

因此,虽然众多学者提出了各种形式的强度准则,但这些研究成果大都是针对某种岩石三轴试验或理论模型对子午面函数式进行修正,使其能准确表征岩石在不同围压等级下的强度特性;或者是基于经典的MC和HB强度准则,对拉压过渡带岩石强度进行中间主应力作用修正,从而构建修订型真三轴强度准则。虽然HB准则广义压拉强度随着静水压力的增大趋于相等,但两者之间的差值是单调递增的;线性MC准则的适用性则更差。这决定了基于该两函数表达式构建的强度准则不能准确描述大范围围压作用下的强度特征,当真三轴试验包含的静水压力范围较大时,其拟合精度并无显著优点,尤其是受静水压力影响较大的岩石。

大量研究表明，在子午面上岩石强度随静水压力增大而增大，但其增幅先增大再减小并最终趋于零。而经典的 MC 和 HB 强度准则无法准确描述这一变化过程。在充分利用指型三轴强度准则拉压子午面强度的基础上，通过罗德函数引入中主应力影响，从而构建指型真三轴强度准则。同时从源文献搜集了 14 种岩石真三轴试验数据，对新强度准则适用性验证提供数据基础。

1 岩石强度准则基本特征

1.1 岩石强度应力效应

(1) 最小主应力效应

岩石强度随着最小主应力的增大而增大，但在高应力约束作用下，其微裂缝呈闭合状态，且临界破坏界面岩石颗粒变形受到限制，从而提高了岩石的强度，但其增幅随最小主应力的增大逐渐减小，并最终趋于零。对于常规三轴试验，不同围压下岩石破裂模式见图 1 所示：低围压时，岩石往往产生平行于最大主应力方向的张拉裂缝，形成劈裂破坏，破裂角度往往大于 85° ；中围压时，岩石以压剪破坏为主，伴随有宏观剪切断面，破裂角在 $55^\circ \sim 70^\circ$ 之间；在高围压作用下，岩石往往产生延性腰鼓状破坏，并无明显的宏观裂缝产生。



图1 不同厚度上埋出砂型技术

Fig. 1. Emission and absorption spectra of different samples of $\text{Fe}_{x}\text{O}_{y}$.

(2) 静水压效应

图 2 为静水压力作用下岩石真三轴强度特性。当静水压力较低时,其强度面在 π 平面上呈近似三角形,而随着围压的增大其拉压强度趋于相等,在 π 平面上其形状趋于圆形化。在三向受拉状态下,岩石具有极限强度,因此在拉应力端呈闭口特征,而静水压力较高时其拉压强度趋于相等,因此随着静水压力的增加,岩石压拉强度之比(压拉强度之差)均应先增大再减小,并最终趋于 1(0),但经典的 MC 和 HB 强度准则并非完全符合这一规律。虽然类土体材料在高静水压力条件下会产生破坏,但其破坏主要是颗粒结构破坏引起的大变形,如剑桥盖帽模型。而岩石材料本身

较为致密, 可能在极高静水压力下会产生类似于土体的结构型破坏, 但实际工程很难达到这一应力状态, 因此岩石强度准则在压应力端表现为开口状态。

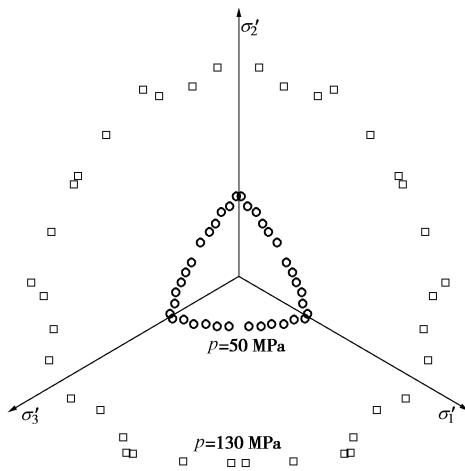


图 2 偏平面静水压力效应^[14]

Fig. 2 Effects of hydrostatic pressures on deviatoric plane

(3) 中间主应力效应

中间主应力从 σ_3 变化到 σ_1 过程中, 最大主应力经历先增大再减小的过程(见图 3), 其最大值约为 $\sigma_2 = \sigma_3$ 时的 1.3 倍, 且质地越硬的岩石表现出的这种变化规律越明显。这主要是由于中间主应力限制了亚稳定颗粒单元的变形, 致使其颗粒滑移方向区别于常规三轴应力状态。常用的 2D 强度准则仅为最大和最小主应力的函数, 由于未考虑中间主应力的影响, 导致其对真三轴试验数据拟合精度较低, 基于此计算出来的结果是偏向于安全的, 理论上不利于充分发挥岩体自身承载力。

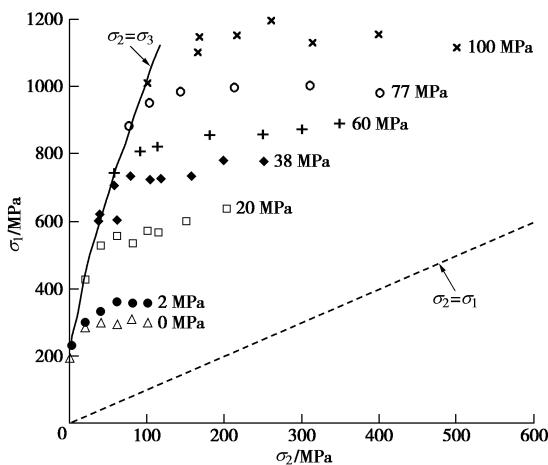


图 3 Westerly granite 岩石真三轴强度^[15]

Fig. 3 True triaxial strengths of Westerly granite^[15]

1.2 岩石强度空间描述

(1) 三维应力空间

虽然岩石强度特性可以用应力和应变进行描述,

但由于岩石材料离散性对应变造成的影响远大于对应力产生的影响, 因此既有强度准则多采用临界状态对应的应力进行描述。图 4 为主应力空间岩石强度特征。

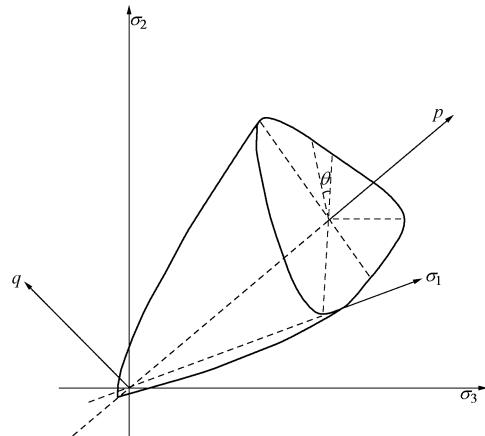


图 4 岩石强度准则应力空间描述

Fig. 4 Description of rock strength criteria in principal stress space

考虑到岩石强度关于静水压力轴对称, 采用 $p - q$ 不变量进行描述, 对于真三轴应力状态 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (拉应力为正, 压应力为负), 其主应力可表示为不变量的函数, 即

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} q \begin{Bmatrix} \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) \\ \sin(\theta) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) \end{Bmatrix} + p \quad , \quad (1)$$

式中, $p = \sigma_{ii}/3$, $q = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$, $\theta = \frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{-27J_3}{2q^3}\right)$, $J_3 = s_{ij}s_{jk}s_{ki}/3$ 为第三偏应力不变量, 且 $s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$ 。

在 $p - q$ 空间, 岩石强度准则可以统一表示为 p , q 和 θ 的函数, 即

$$F = q - f(\theta, p) = q - f(p)L(\theta) \quad , \quad (2)$$

式中, $f(p)$ 和 $L(\theta)$ 分别为子午面函数和罗德函数。

(2) 偏平面空间

根据 Drucker-Prager 稳定性假设, 理想的岩石强度准则罗德函数应在偏平面满足值域、连续、光滑可导和外凸要求。

拉压子午线端点罗德函数值应为

$$L(\pi/6) = \beta, \quad L(-\pi/6) = 1 \quad , \quad (3)$$

式中, β 为相同静水压力下广义拉压强度之比。

在拉压子午面上, 其需满足连续、可导性, 以保证其光滑, 即

$$dL/d\theta(\pm\pi/6) = 0 \quad . \quad (4)$$

在极坐标下外凸罗德函数还需满足外凸性要求, 即

$$\frac{d^2L}{d\theta^2} \leq L + \frac{2L_\theta^2}{L} \quad . \quad (5)$$

在静水压力作用下, 岩石的压拉强度比随静水压力而改变, 在低静水压力时其拉压强度比趋于 0.5, 在高压应力端趋于 1.0, 即

$$0.5 \leq \beta \leq 1.0 \quad . \quad (6)$$

(3) 子午面空间

由于罗德函数决定了强度准则中罗德角在 $(-\pi/6, \pi/6)$ 范围内的空间变化特征, 且在拉压子午线 $\theta = \pm \pi/6$ 处与拉压子午线共点, 因此罗德函数与子午面曲线联合决定了强度准则的空间形状。由于真三轴试验较为复杂、试验数据量相对较少, 因此既有的 2D 强度准则仅为最大和最小主应力的函数, 仅靠广义拉压子午面最优拟合曲线来表征复杂应力状态下的强度。但若所选择的子午面函数对常规三轴试验数据具有较高的拟合精度时, 则表示所选用的函数能够正确描述强度准则在拉压子午面上的岩石强度特征, 而这对于真三轴强度准则的提出是有益的。常规的 2D 强度准则可统一表示为

$$\sigma_1 - \sigma_3 = f(\sigma_3) \quad . \quad (7)$$

在拉压子午面上, 中间主应力分别等于 σ_1 和 σ_3 , 因此, 岩石强度拉压子午线应力不变量可表示为

$$p = \begin{cases} \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3} & (\theta = -\pi/6) \\ \frac{2\sigma_1 + \sigma_3}{3} & (\theta = \pi/6) \end{cases}, \quad (8)$$

$$q = \sigma_1 - \sigma_3 \quad .$$

图 5 为典型的岩石强度压子午线 $p-q$ 空间函数特征, 曲线上任意应力状态可由割线模量 M_c 描述。利用式(8)可求得压子午面强度曲线任一点的割线模量, 即

$$M_c = \frac{q}{p_c} = \frac{3(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sigma_1 + 2\sigma_3} = \frac{3f}{f + 3\sigma_3}.$$

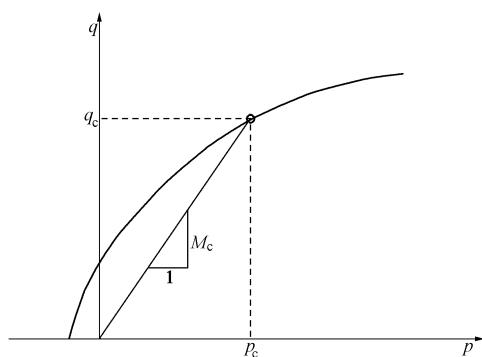


图 5 岩石强度压子午线 $p-q$ 空间特征

Fig. 5 Trace of meridian curves in $p-q$ space
压子午面曲线可由割线模量表示为

$$f_{pc} = q - M_c p \quad . \quad (9)$$

将式(1)和式(8)带入式(7)可得拉压子午线强度表达式(下标“t”和“c”分别表示岩石抗拉和抗压强度), 即

$$\left. \begin{aligned} q_c &= f(-q_c/3 + p) \quad (\theta = -\pi/6), \\ q_t &= f(-2q_t/3 + p) \quad (\theta = \pi/6). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

则罗德函数中岩石拉压应力比 β 可表示为

$$\beta = q_t/q_c \quad . \quad (11)$$

2 指数型真三轴强度准则

2.1 子午面函数

由岩石强度包络面的应力效应可知, 理想的强度准则包络面符合以下基本特征: ①随着静水压力的增大, 广义压拉强度差先增大后减小, 并趋于相等, 且最大差值对应的静水压力可调性强; ② π 平面函数连续、光滑、外凸, 函数形式表征中间主应力影响规律, 且尽可能不增加无实际物理意义的强度参数。MC 和 HB 强度准则广泛用于岩石力学特性分析, 与理想岩石强度准则相比, 两者存在以下主要缺点: ①在拉压子午线为不光滑奇异点, 容易导致数值计算不收敛; ②MC 准则在子午面为线性函数, 广义拉压强度比呈线性增加; 随着静水压力的增大, HB 强度准则广义压拉强度比虽然趋于 1, 但其广义压拉强度差同样随静水压力而增大, 最大广义压拉强度差对应的静水压力无穷大, 因此其子午面形态可调性差。尤明庆^[4]基于岩石强度空间演变特征提出的真三轴强度准则在压子午面为隐式函数, 且存在内凹问题, 因此, 本文采用其常规三轴指数函数式作为子午面函数, 即

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \tilde{f}(\sigma_3) \quad , \quad (12)$$

式中, $\tilde{f}(\sigma_3) = \sigma_\infty - (\sigma_\infty - \sigma_c) \exp[-K\sigma_3/(\sigma_\infty - \sigma_c)]$, σ_c 为岩石单轴抗压强度, σ_∞ 为最大偏应力, K 为最小主应力影响系数, 且 $K \geq 0$ 。

图 6 为指数型常规三轴强度准则 (EXP) 子午面和偏平面空间特征图。可以看出: 随着静水压力的增大, 拉压子午面强度差经历从零增至某一最大值, 再逐渐减小并趋于零的过程, 这与岩石强度静水压力效应是一致的, 也是其优于其它强度准则函数式的关键; 但在 π 平面广义拉压点非光滑, 且拉压区间呈近似线性过渡, 未反映中间主应力对最大主应力的影响规律。因此, 本文仅采用其子午面函数, 来构建新的真三轴强度准则。

2.2 罗德函数

岩石应力空间特征表明, 其在偏平面上需满足式(3)~(6)的要求, 以保证其连续光滑、外凸和与

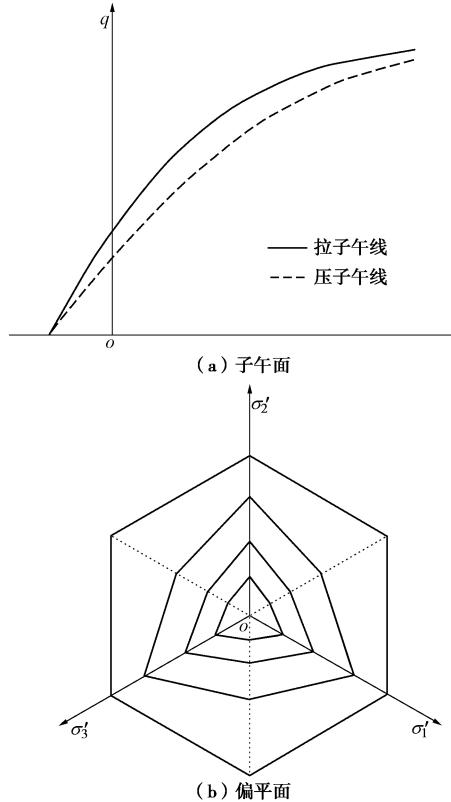


图 6 指数型强度准则空间特征

Fig. 6 Space characteristics of exponential strength criterion
拉压强度比的特点。许多学者针对罗德函数的这一要求进行了大量研究,提出了各种样式的罗德过渡函数,以合理表征中间主应力对岩石强度的影响。虽然这些函数大都基本能反映中间主应力的影响,但其往往具有一定的限制条件,如限制拉压强度比保证其外凸性、在拉压点具有奇异尖点(不可导)等。在这些罗德过渡函数中 L_{MN} , L_{WW} 和 L_{YMH} 无条件满足偏平面函数的所有要求,即式(13)~(15),且未引入其它强度参数,其函数表达式分别为^[16-18]

$$L_{WW}(\theta) = \frac{2(1-\beta^2)\cos(\pi/6-\theta)+(2\beta-1)\sqrt{4(1-\beta^2)\cos^2(\pi/6-\theta)+\beta(5\beta-4)}}{4(1-\beta^2)\cos^2(\pi/6-\theta)+(2\beta-1)^2}, \quad (13)$$

$$L_{YMH}(\theta) = \beta \sec(\pi/6+\theta) \cdot \frac{2(1-\beta^2)+(\beta-2)\sqrt{4(\beta^2-1)+(5-4\beta)\sec^2(\pi/6+\theta)}}{4(1-\beta^2)-(\beta-2)^2\sec^2(\pi/6+\theta)}, \quad (14)$$

$$L_{MN}(\theta) = \frac{\sqrt{3}\beta}{2\cos\kappa\sqrt{\beta^2-\beta+1}}, \quad (15)$$

式中,

$$\kappa = \begin{cases} \frac{1}{6}\cos^{-1}\left[-1 + \frac{27\beta^2(1-\beta)^2}{2(\beta^2-\beta+1)^3}\sin^2(3\theta)\right] & (\theta > 0) \\ \frac{\pi}{3} - \frac{1}{6}\cos^{-1}\left[-1 + \frac{27\beta^2(1-\beta)^2}{2(\beta^2-\beta+1)^3}\sin^2(3\theta)\right] & (\theta \leq 0) \end{cases} \quad (16)$$

2.3 真三轴强度准则函数

如前所述,EXP强度准则反映了岩石在子午面静水压力和最小主应力特征,而 L_{MN} , L_{WW} 和 L_{YMH} 正确表征了中间主应力效应,将两者融合的真三轴强度准则将完美反映岩石的空间应力特征。式(9)表征了真三轴强度准则在拉压子午面的函数形式,对于强度面上任意点 (p, q, θ) 的强度可用割线模量的变化来表示,因此,子午面为指数型函数(exponent function)、偏平面过渡函数分别为 L_{WW} , L_{MN} 和 L_{YMH} 的3个真三轴强度准则EWW, EMN 和 EYMH 可统一表示为

$$F = q - M_c L(\theta)p, \quad (16)$$

式中, $L(\theta)$ 为所选用任一的罗德过渡函数,即 L_{WW} , L_{MN} 和 L_{YMH} 。

图7为EWW准则空间包络图,其在拉压子午线间为曲线过渡,具有光滑、外凸性质,其变化规律与中间主应力效应一致。理论上讲EWW, EMN 和 EYMH 准则全面反映了岩石强度空间应力三特性,能够较好的表征岩石在真三轴应力下的强度特征。且与EXP准则外接,并未引入新的强度参数,因此,指数型真三轴强度准则与EXP强度准则而具有相同的强度参数,具体的确定方法为:①通过单轴压缩试验可确定岩石抗压强度 $\sigma_c = \sigma_1$;②采用极高围压常规三轴压缩试验近似确定最大偏应力 $\sigma_\infty = \sigma_1 - \sigma_3$ (可近似取 $\sigma_3 = (5 \sim 10) P_0$, P_0 为现场实测地应力最小主应力值);③通过巴西劈裂试验可确定岩石的抗拉强度 σ_t ,将其带入式(12)可获得最小主应力影响系数 K ,即

$$K = -\frac{(\sigma_\infty - \sigma_c)}{\sigma_t} \ln\left(\frac{\sigma_\infty + \sigma_t}{\sigma_\infty - \sigma_c}\right). \quad (17)$$

在试验条件允许的条件下,可通过巴西劈裂试验、单轴压缩试验和多组不同围压下的三轴压缩试验获得压子午面上多个数据点,通过最小二乘拟合确定3个强度参数,且该方法确定的强度参数更具有代表性,本文后续准则验证则采用了拟合方法。

与其它经验型强度准则一样,指数型真三轴岩石强度准则同样是在岩石强度试验基本规律的基础上建立起来的,不同之处在于该准则充分考虑了岩石在不同静水压力作用下承载特性,尤其是在高围压作用下其承载能力趋于稳定的特点,这与Singh提出的分段修正MC强度准则是一致的。但该准则仅通过简单改变参数 σ_∞ 和 K 的改变可适用于从软到硬、线性-非线性各类岩石的强度描述。简单的讲,本文所构建的指数型真三轴强度准则囊括了线性-非线性强度准则。虽然任一强度参数的变化均会引起强度准则空间强度面的变化,但3个参数对强度包络面的主控影响是不同的。

的。随着 K 的增大, 抗拉强度逐渐减小, 中等围压区强度增长速度较快, 高围压临界阀值减小; 在 σ_0 不变时, 随着 σ_c 增大岩石强度逐渐增大, 但抗拉强度增幅较小, 且高围压临界阀值同样减小; 而 σ_∞ 的增大主要引起子午面线性范围的改变。当 σ_∞ 足够大时, 其在子午面上呈近似线性增大规律, 且可通过 K 的变化改变其随 σ_3 的增长速度, 这与 MC 准则是相似的; 在高应力区, 通过 σ_∞ 的改变实现子午面强度随 σ_3 增速的变化, 并在高应力区使增速逐渐减小并趋于零, 这正是 HB 准则难以解决的问题。因此, 指数型真三轴强度准则在拉应力区、中围压区和高围压区具有包络形状调控性, 尤其是在高围压区符合岩石材料强度本质特征, 且强度参数相对较少, 这是其它强度准则难以达到的。

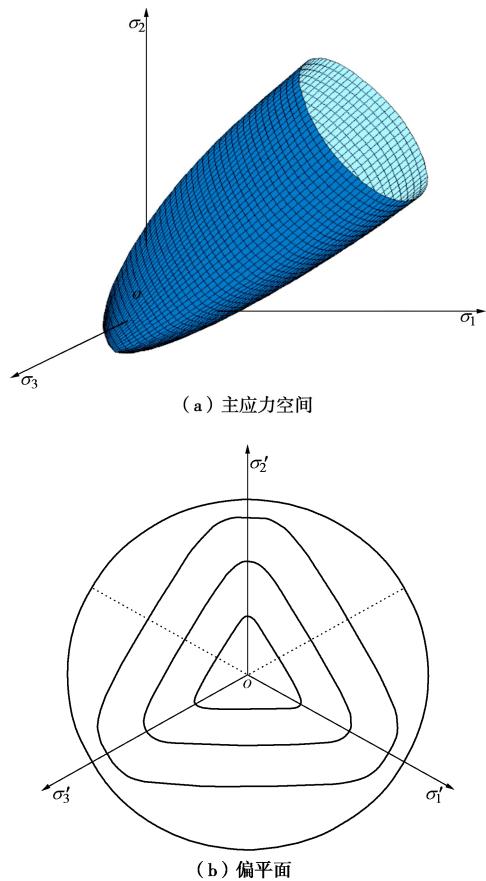


图 7 EWW 准则空间特征

Fig. 7 Spatial characteristics of EWW strength criterion

3 强度准则验证

3.1 误差计算方法

采用真三轴试验数据对强度准则拟合精度进行验证是合理反映强度准则正确性和适用性的手段。许多学者均采用该方法对所建立的强度准则进行了评价分析, 通过误差分析获得了强度准则拟合误差和强度预

测特征。不同之处是最小二乘拟合误差计算公式不同, 大多学者是采用最大主应力差的标准差值进行评判, 而 Lee 等认为其空间误差应采用第二不变量标准差值进行评价^[10]。虽然两种评价方法获得了强度参数和误差结果具有一定的差异, 但就两种强度准则误差对比而言, 其规律是一致的。

本文从已发表源文献中搜集了 14 种不同岩石的真三轴试验数据^[19-25], 避免了其它学者二次文献引用时造成的数据不完整、错误等问题, 采用最大主应力差的标准差进行最小二乘拟合误差对比, 即

$$RSD = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\sigma_{i,j}^{cal} - \sigma_{i,j}^{test})^2}, \quad (18)$$

式中, RSD 为拟合误差, m 某种岩石真三轴试验设计 σ_3 水平组数, n 为相同 σ_3 、不同 σ_2 数据组数, $\sigma_{i,j}^{cal}$ 和 $\sigma_{i,j}^{test}$ 分别为计算和试验最大主应力值。

3.2 拟合误差分析

(1) EXP, MC 和 HB 准则对比

表 1 为 14 种岩石真三轴试验数据 EXP, MC 和 HB 准则最优拟合强度参数和误差。其中, 有 11 种岩石 EXP 强度准则拟合误差最小, 3 种岩石 HB 强度准则拟合误差最小, 这 3 种岩石 HB 强度准则拟合误差与 EXP 准则拟合误差差值并不大(小于 5%)。另外, EXP 强度准则对低应力强度的预测精度较高, 对 11 种具有单轴试验数据的岩石单轴抗压强度预测中, 除闪岩和西风花岗岩两种岩石外, EXP 准则均具有最接近的拟合结果, 其中白云岩、索侯芬石灰岩、粗面岩、山口大理岩、安山岩和稻田花岗岩预测结果与试验值相同, 凝灰岩误差为 3.8%、二长岩误差为 10.8%、闪岩误差为 11.3%、西风花岗岩误差为 48.1%, 盐岩误差为 88.1%。其中 3 种强度准则对后两类岩石拟合误差均比较大。因此, 与 MC 和 HB 强度准则相比 EXP 强度准则更能准确反映岩石三轴强度特性。

(2) 真三轴强度准则对比

表 2 为 EMN, EWW, EYMH, MCWW, HB_{ED} 和 HB_{HD} 3 种真三轴强度准则对 14 种岩石真三轴试验数据拟合误差和最优强度参数。拟合结果表明, 考虑中主应力作用的强度准则比二维强度准则拟合误差明显降低。14 种岩石的最优拟合误差中, EWW 强度准则对 7 种岩石的拟合误差最小, EMN 对 2 种岩石拟合误差最小, 而 EYMH 强度准则对 3 种岩石具有最小拟合误差, HB_{ED} 对 2 种岩石具有最小拟合误差, 且均优于 2D 强度准则, 因此, 真三轴强度准则比既有的强度准则更适合描述岩石的强度特性。由于 EWW、EMN 和 EYMH 3 种真三轴强度准则在子午面具有相同的函数表达式, 表明 L_{WW} 比 L_{MN} 和 L_{YMH} 更能真实反映中间主应力对岩石强度的影响规律。3 种真三轴强度准

表 1 MC, HB 和 EXP 强度准则最优拟合参数

Table 1 Best fitting parameters for MC, HB and EXP criteria

岩石类型	MC			HB			EXP			
	RSD	σ_c	φ	RSD	σ_c	m	RSD	σ_c	σ_∞	K
白云岩	69.53	354.00	37.93	60.82	261.52	15.38	60.80	261.52	902.09	7.30
索侯芬石灰岩	32.71	314.26	36.12	29.92	310.06	8.55	30.42	310.00	859.63	4.14
砂岩	20.59	99.41	35.55	17.62	73.34	13.53	13.39	38.57	196.29	13.01
页岩	10.99	113.48	29.57	10.99	90.04	8.08	10.99	80.96	284.08	4.15
闪岩	101.44	345.90	46.68	85.41	279.59	26.80	85.01	280.66	1360.20	9.81
粗面岩	25.34	138.53	35.87	16.32	100.00	14.84	16.31	100.00	447.66	5.88
致密大理岩	41.40	101.56	39.45	39.96	87.11	16.39	40.86	97.66	937.40	4.05
西风花岗岩	61.62	326.76	51.67	50.80	289.94	32.03	53.01	297.75	1348.78	11.60
山口大理岩	18.33	86.23	43.05	22.54	82.01	24.05	16.56	82.03	1447.22	5.05
安山岩	78.69	262.01	43.59	56.36	173.44	29.10	32.85	139.94	765.79	18.03
稻田花岗岩	97.20	524.17	40.92	69.26	229.00	35.66	59.14	229.00	1344.76	12.92
二长岩	101.99	406.93	41.17	66.34	282.23	22.61	51.01	259.28	1072.02	13.15
凝灰岩	26.82	162.21	45.03	27.13	143.55	18.60	26.14	152.83	704.99	6.27
盐岩	11.12	53.13	26.85	10.53	51.76	4.18	9.96	43.26	97.75	4.27

注: 黑体表示某种岩石表中最小 RSD 误差。

表 2 EMN, EWW, EYMH, MCWW, HB_{ED} 和 HB_{HD} 准则最优拟合参数

Table 2 Best fitting parameters for EXP, EMN, EWW, EYMH, MCWW, HBWW and HBMN criteria

岩石类型	EMN				EYMH				MCWW ^[9]			HB _{ED} ^[12]			HB _{HD} ^[12]						
	RSD	σ_c	σ_∞	K	RSD	σ_c	σ_∞	K	RSD	σ_c	σ_∞	K	RSD	σ_c	φ	RSD	σ_c	m	RSD	σ_c	m
白云岩	20.45	301.95	995.79	5.28	17.61	301.97	947.19	5.33	17.50	301.95	927.08	5.39	33.95	357.60	31.62	29.62	273	10	25.37	281	9.0
索侯芬石 灰岩	16.55	358.20	3015.72	1.94	17.33	357.98	862.94	2.39	18.55	357.95	787.51	2.49	23.20	310.06	30.43	21.89	310	5.4	25.09	310	5.0
砂岩	8.98	37.89	218.75	10.58	9.03	34.87	221.62	10.07	9.24	36.50	224.03	9.48	12.80	80.57	34.35	9.84	59	13.3	9.84	56	13.3
页岩	9.18	0.00	243.75	9.59	9.55	0.00	244.93	9.08	9.88	0.00	244.36	8.94	7.85	98.22	26.70	7.59	76	7.2	8.27	76	6.9
闪岩	54.92	256.64	1486.89	8.89	55.68	246.84	1505.68	8.18	56.28	245.42	1499.75	8.06	84.13	306.17	43.25	62.79	236	23.5	62.23	228	22.4
粗面岩	9.53	115.63	377.73	7.33	11.30	115.50	385.03	7.22	10.12	115.47	373.74	7.40	25.07	149.22	30.96	16.85	128	8.5	18.51	130	8.1
致密大理 岩	28.32	88.28	416.80	5.53	27.17	85.29	411.22	5.44	26.60	84.56	407.56	5.46	34.95	98.54	34.66	32.73	81	12.6	32.05	78	12.4
西风花岗 岩	30.11	262.11	1360.56	13.28	36.13	227.62	1316.14	13.17	37.92	224.23	1304.93	13.22	47.25	265.92	49.85	28.59	243	30.7	32.46	211	32.5
山口大理 岩	9.91	107.52	1428.75	3.66	9.38	109.19	1756.64	3.37	9.34	109.94	2081.24	3.25	13.71	96.48	37.50	15.15	82	16	15.12	82	15.0
安山岩	16.20	161.72	910.54	16.41	19.74	161.63	938.30	14.28	21.39	161.64	942.60	14.04	44.93	262.01	43.59	27.73	140	35.7	24.20	140	34.2
稻田花岗 岩	36.66	264.45	1621.51	12.58	42.57	264.42	1613.01	12.26	43.95	264.47	1613.32	12.18	68.30	486.60	39.07	40.52	338	19.2	40.49	241	27.9
二长岩	37.16	340.85	1247.82	9.19	36.71	345.98	1275.05	8.11	37.14	346.07	1268.41	8.10	72.21	426.39	36.16	46.14	297	15.7	42.54	299	14.7
凝灰岩	25.37	168.36	941.45	7.11	25.63	168.96	1074.70	6.84	25.66	167.61	998.48	7.01	25.06	154.66	45.46	26.33	135	20.1	27.32	130	21.0
盐岩	6.25	37.50	105.08	8.61	6.12	39.58	111.42	6.57	5.96	38.90	111.56	6.62	10.81	54.13	25.85	10.33	52	4.2	10.02	49	5.0

注: 黑体表示某种岩石表中最小 RSD 误差, 下划线表示所有强度准则最小 RSD 误差。

则对页岩的最优拟合均显示其预测单轴抗压强度为 0, 而 EXP 强度准则的最优单轴抗压强度为 80.96 MPa, 表明修正后的真三轴强度准则对该岩石数据拟合效果较差。在 11 种具有单轴抗压试验的岩石中, 白云岩、索侯芬花岗岩、粗面岩、安山岩、稻田花岗岩和凝灰岩 6 种岩石的单轴抗压强度试验值和预测值误

差为 15%。就单轴抗压强度方面讲, 真三轴强度准则比 2D 准则可能稍有所降低, 但其增强了在高应力端的拟合精度。假三轴试验数据全部落在拉、压子午面上, 而传统的 2D 强度准则大都是基于该应力状态获得的, 真三轴数据点落在 $(-\pi/6, \pi/6)$ 之间, 可以综合考虑各个应力分量, 尤其是中间主应力对岩石强度

影响。对于 MCWW, HB_{ED} 和 HB_{HD} 准则, 其与 EWW 和 EMN 准则相比仅具有相同的罗德函数, 但 14 种岩石的最小二乘拟合中, EWW, HBWW 和 MCWW 3 种准则最小二乘拟合误差岩石种类分别为 7, 2 和 0, 表明非线性子午面函数更符合岩石在广义压拉子午面的强度特征, 而指型函数最优。

4 结 论

(1) 岩石强度随着静水压力的增大其压拉子午面强度差经历先增大再减小的过程, 对于不同岩石其最大差值对应的静水压力不同, 当静水压力足够大时, 岩石广义拉压强度趋于相等; σ_2 从 σ_3 增至 σ_1 的过程中, 岩石强度同样先增大再减小, 随着 σ_3 的增大岩石强度呈增大趋势, 但其增幅逐渐减小, 并最终趋于零;

(2) EXP 强度准则在拉压子午面强度曲线符合静水压力和最小主应力对岩石强度的影响规律: 拉压子午面强度差在拉应力端具有同一顶点, 随着静水压力的增大呈增大再减小的趋势, 当静水压力足够大时, 其拉压子午面强度相等, 这与岩石的强度特性试验规律相同; L_{WW} , L_{MN} 和 L_{YMH} 3 种罗德过渡函数满足岩石强度连续、光滑和外凸特性, 能正确反映中间主应力对岩石强度的影响规律;

(3) 通过融合 EXP 强度准则和 3 个罗德函数分别在子午面和偏平面的优点, 提出了构建岩石真三轴强度准则的方法, 并推导了 EWW, EMN 和 EYMH 真三轴强度准则表达式; 通过拟合 14 种不同种类岩石的真三轴试验数据, 分析了真三轴强度准则与常规三轴强度准则的优缺点, 结果表明本文提出的真三轴强度准则(尤其是 EWW 强度准则)具有更小的拟合误差, 更能正确反映岩石的强度特性。

参 考 文 献:

- [1] 何满潮. 深部岩体力学基础[M]. 北京: 科学出版社, 2010.
(HE Man-chao. The basis of deep rock mechanics[M]. Beijing: Science Press, 2010. (in Chinese))
- [2] 黄润秋, 黄 达. 高地应力条件下卸荷速率对锦屏大理岩力学特性影响规律试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(1): 21 - 33. (HUANG Run-qiu, HUANG Da. Experimental research on affection laws of unloading rates on mechanical properties of Jinping marble under high geostress[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(1): 21 - 33. (in Chinese))
- [3] DRUCKER D C, PRAGER W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1952, 10: 157 - 164.
- [4] YOU M Q. True-triaxial strength criteria for rock[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2009, 46(1): 115 - 127.
- [5] 李春光, 郑 宏, 葛修润, 等. 双参数抛物型 Mohr 强度准则及其材料破坏规律研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(24): 4428 - 4433. (LI Chun-guang, ZHENG Hong, GE Xiu-run, et al. Research on two-parameter parabolic mohr strength criterion and its damage regularity[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(24): 4428 - 4433. (in Chinese))
- [6] SINGH M, SINGH B. Modified Mohr-Coulomb criterion for non-linear triaxial and polyaxial strength of jointed rocks[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2012, 51: 43 - 52.
- [7] AL-AJMI A M, ZIMMERMAN R W. Relation between the Mogi and the Coulomb failure criteria[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2005, 42(3): 431 - 439.
- [8] YU M H, HE L N. A new model and theory on yield and failure of materials under the complex stress state[C]// Jono M, Inoue T, eds. Mechanical Behavior of Materials-VI, (ICM-6). Oxford: Pergamon, 1991: 841 - 846.
- [9] ZHANG Q, WANG Shui-lin, GE X R, et al. Modified Mohr-Coulomb strength criterion considering rock mass intrinsic material strength factorization[J]. Mining Science and Technology, 2010, 20(5): 701 - 706.
- [10] LEE Y, PIETRUSZCZAK S, CHOI B. Failure criteria for rocks based on smooth approximations to Mohr-Coulomb and Hoek-Brown failure functions[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2012, 56: 146 - 160.
- [11] ZHANG L, ZHU H. Three-dimensional Hoek-Brown strength criterion for rocks[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2007, 133(9): 1128 - 1135.
- [12] ZHANG Q, ZHU H, ZHANG L. Modification of a generalized three-dimensional Hoek-Brown strength criterion[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2013, 59: 80 - 96.
- [13] BENZ T, SCHWAB R, KAUTHER R A, et al. A Hoek-Brown criterion with intrinsic material strength factorization[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2008, 45(2): 210 - 222.

- [14] JIANG H, WANG Xiao-wo, XIE Yong-li. New strength criteria for rocks under polyaxial compression[J]. Canada Geotechnique Journal, 2011, **48**: 1233 – 1245.
- [15] DESCAMPS F. Study of the behavior of saturated porous rocks under great depth conditions[D]. Mons: The Faculty of Engineering, 2007.
- [16] HAIMSON B, CHANG CA new true triaxial cell for testing mechanical properties of rock, and its use to determine rock strength and deformability of Westerly granite[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Science, 2000, **37**: 285 – 296.
- [17] WILLIAM K J, WARNKE E P. Constitutive model for the triaxial behavior of concrete[C]// International Association for Bridge and Structural Engineering. Bergamo, 1975.
- [18] MATSUOKA H, NAKAI T. Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stress[J]. Doboku Gakkai Ronbunshu, 1974: **232**: 59 – 70.
- [19] 俞茂宏. 双剪理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1998. (YU Mao-hong. Twin-shear theory and its application[M]. Beijing: Science Press, 1998. (in Chinese))
- [20] MOGI K. Experimental rock mechanics[M]. Balkema: Taylor & Francis, 2006.
- [21] CHANG Chan-dong, BEZALEL H. True triaxial strength and deformability of the German Continental Deep Drilling Program (KTB) deep hole amphibolites[J]. Journal of Geophysical Research, 2000, **105**(B8): 18999 – 19013.
- [22] PAUL MICHELIS A M. Polyaxial yielding of granular rock[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2011, **111**(8): 1049 – 1066.
- [23] HAIMSON B, CHANG C. A new true triaxial cell for testing mechanical properties of rock, and its use to determine rock strength and deformability of Westerly granite[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2000, **37**: 285 – 296.
- [24] TAKAHASHI M, KOIDE H. Effect of the intermediate principal stress on strength and deformation behavior of sedimentary rocks at the depth shallower than 2000 m[C]// ISRM International Symposium Rock Mechanics. Pau, 1989: 19 – 26.
- [25] WANG R, KEMENY J M. A new empirical criterion for rock under polyaxial compressive stresses[C]// The 35th US Symposium on Rock Mechanics. Reno, 1995: 453 – 458.
- [26] TANAPOL S, CHAOWARIN W, KITTITEP F. True-triaxial compressive strength of Maha Sarakham salt[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2013, **61**: 256 – 265.