

DOI: 10.11779/CJGE201804004

基于实域总势能计算渗流溢出点位置

侯兴民，孙伟建

(烟台大学土木工程学院，山东 烟台 264005)

摘要：渗流对坝体稳定有重要影响，溢出点位置的确定是求解渗流场的关键问题之一。目前求解渗流溢出点的方法以有限元数值计算为主，通过比较假定溢出点水头值与位置高程的大小确定溢出点位置，这类方法具有迭代次数多，不易收敛的缺点。为此提出了一种基于全域总势能计算渗流溢出点位置的新方法：计算出每个可能溢出点对应的全域总势能，其最小值所对应的位置即为溢出点位置。但是全域总势能包含了自由面以上区域（虚域）的势能，给计算结果带来了误差。在全域总势能的基础上，提出了实域总势能的概念，将自由面通过的单元分为干区和湿区两部分，并将干区及其以上单元中的虚域势能从全域总势能中扣除，以消除因计入虚域势能而产生的误差，进一步提高了计算精度。

关键词：全域总势能；实域总势能；溢出点；渗流自由面

中图分类号：TV139.14 文献标识码：A 文章编号：1000-4548(2018)04-0612-06

作者简介：侯兴民(1970-)，男，山东寿光人，教授，博士，主要从事岩土工程工作。E-mail: houxm@ytu.edu.cn。

Calculation of seepage spill point position based on total potential energy in real domain

HOU Xing-min, SUN Wei-jian

(School of Civil Engineering, Yantai University, Yantai 264005, China)

Abstract: Seepage plays an important role in dam stability, and the determination of spill point position (SPP) is one of the key problems when solving the seepage field question. The current methods for solving SPP are mainly the finite element ones by comparing the hydraulic head of a possible given spill point and its elevation value. This kind of method has disadvantages such as large iteration times and difficult convergence. Therefore, a new method based on the global total potential energy to calculate SPP is proposed: the global total potential energy corresponding to each possible point is calculated, and the position corresponding to the minimum value is just the SPP. However, the total potential energy of the global domain contains the energy of the region above the free surface (virtual domain) and inevitably introduces errors. On the basis of the global total potential energy, the concept of the total potential energy in the real domain is proposed. The whole domain is divided into the dry region and the wet region by the free surface, and the virtual potential energy in the dry region is deducted from the global total potential energy to eliminate the error caused by including the virtual domain so as to improve the calculation accuracy.

Key words: global total potential energy; total potential energy of real domain; spill point; seepage free surface

0 引言

渗流计算是评价坝体渗流安全及进行渗控方案设计的依据，也是评价边坡抗滑稳定性的重要基础。在各种水利工程及岩土工程的渗流分析中，常会遇到带自由面和溢出面的渗流计算问题。

在渗流场中，以上游最高入渗点为自由面的起始点，以溢出面最高点（即溢出点）为终止点，因此在求解渗流自由面时，需要首先确定溢出点的位置。目前，求解渗流自由面的主要方法有无网格法^[1-3]、虚单元法^[4]、虚节点法^[5]、节点虚流量法^[6]、初流量法^[7-9]、单元渗透矩阵调整法^[10-12]及其他方法^[13]。确定溢出点

的方法主要有沿坡面滑动法和二次曲线相交法^[14]。前者需溢出点与自由面一同迭代，计算量大且不易收敛；后者对确定二次曲线自由面上三点的精度要求太高，计算误差较大；文献[4]提出了通过比较溢出点上部一点的水头值与其位置高程大小确定溢出点，此方法为局部变网格法，需将自由面与溢出点共同迭代，计算量大。文献[11]指出，可将溢出面边界转化为第二类边界条件（流量边界条件）求解溢出点。但此方法受

基金项目：国家自然科学基金项目（41602284）；山东省专业学位研究生教学案例库建设项目（sdylk1684）

收稿日期：2017-01-04

起始条件的影响较大, 且收敛判别条件复杂, 需反复迭代计算。文献[12]提出在处理溢出段时, 根据水头与高程的关系将溢出面上的点定义为固定点与活动点, 通过迭代与线性插值最终找到溢出点位置。此方法也是将自由面与溢出点一同迭代, 需重复构造总渗透矩阵与自由项。

侯晓萍等^[15]提出了空气单元法求解渗流溢出面, 但其相对渗透系数确定较为困难。李远东等^[16]提出了基于全域总势能极小值原理求解溢出点的方法, 提高了溢出点的计算精度, 但未将虚域势能扣除, 造成了一定误差。

本文改进了全域总势能求解溢出点的方法, 将虚域势能从全域总势能中剔除, 提出了实域总势能的概念, 并基于实域总势能极小值求解溢出点, 提高了计算精度。从支配方程、实域总势能原理、工程算例3个方面阐述本文所提方法, 通过算例计算表明本文方法可精确、高效地计算出溢出点位置。

1 渗流的基本理论和边界条件

1.1 支配方程和边界条件

根据达西定律和地下水运动的连续性条件, 不考虑土和水的压缩性, 二维均质各向异性土体的稳定渗流满足偏微分方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial h(x, z)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial h(x, z)}{\partial z} \right) = 0, \quad (1)$$

式中, $h(x, z)$ 是水头函数, k_x , k_z 分别为 x , z 方向的渗透系数。

在稳定渗流计算中, 渗流溢出点的位置是未知的, 且必须同时满足第一类边界条件和第二类边界条件:

(1) 水头等于位置高程, 即 $h=z$;

(2) 有外渗流量, 即 $k_n \frac{\partial h}{\partial n} \leq 0$ 。

1.2 应用有限单元法求解渗流场

由变分原理可知, 渗流场基本微分方程(1)的定解问题等价于求解渗流能量泛函的极值问题, 构造如下泛函:

$$I(h) = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} k_x \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} k_z \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz. \quad (2)$$

式中 $k_x \frac{\partial h}{\partial x}$, $k_z \frac{\partial h}{\partial z}$ 分别为 x , z 方向的渗流速度;

$\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial z}$ 分别为 x , z 方向的水力坡降。根据变分原

理, 对泛函求极值 $\frac{\partial I}{\partial h_i} = 0$ ($i=1, 2, \dots, m$), 渗流控制方程转化为如下线性方程组:

$$[K]\{h\} = \{f\}. \quad (3)$$

$[K]$ 为总渗透矩阵, m 为节点数; $\{h\}$ 为待求 m 个节点的水头向量; $\{f\}$ 为自由项, 对于稳定渗流场 $\{f\} = \{0\}$ 。求解线性方程组(3)即可得到渗流场内各节点的水头值。

2 基于实域总势能确定溢出点的原理

2.1 全域总势能确定溢出点原理

在求解全域总势能时, 以上游坡面底部 A 为坐标原点, 水平方向向右为 x 轴正方向, 铅垂向上方向为 z 轴正方向, 建立直角坐标系, 选取三角形单元对全域进行划分, 定义每延米上的单个三角形单元的势能为

$$E_e = n \rho g \iint_e \sum_{i=1}^m N_i h_i dx dz. \quad (4)$$

式中 E_e 为每延米上单个三角形单元的势能 (J/m); ρ 为水的密度 (kg/m^3); g 为重力加速度 (m/s^2); N_i 为三角形单元的形函数; h_i 为单元节点水头值 (m); n 为土的孔隙率。

由三角形单元的形函数的特点可知:

$$\iint_e N_i dx dz = \frac{A_e}{3}, \quad (5)$$

式中, A_e 为三角形单元的面积。

每延米上全域总势能为

$$E = \sum E_e = \sum n \rho g (h_e^e + h_j^e + h_m^e) \frac{A_e}{3}. \quad (6)$$

在二维渗流场中, 以下游水平面上一点 O 为坐标原点, 水平方向向右为 x 轴正方向, 表示溢出点位置不同时在全域 Ω 中总势能的大小, 铅垂向上方向为 z 轴正方向, 表示不同溢出点位置, 建立直角坐标系。

如图1所示, 在已知真实溢出点的条件下, AG , BC , CD , DS 为不透水边界, 内外无流量交换; AB , FG 为上、下游水位边界, 满足水头条件 $h_1=a$, $h_2=b$; SF 为真实的溢出面边界, 应同时满足条件 $h=z$, $k_n \frac{\partial h}{\partial n} \leq 0$ (即存在向外流量); BS 为自由面边界, 满足条件 $h=z$, $k_n \frac{\partial h}{\partial n} = 0$ 。

由于真实溢出点的位置是未知的, 计算时需依次调整假定溢出点位置。当假定溢出点低于真实的溢出点 S 时, 如溢出点1, 2, 部分真实溢出段边界将被定义为不透水边界, 阻止了边界处的流量外泄, 使得此时全域总势能比真实情况下的全域总势能高即 $E_{S'} < E_2 < E_1$; 当假定溢出点高于真实的溢出点 S 时, 如溢出点 i , $m-1$, m , 应满足水头 $h < z$ 条件的部分边界被赋予了 $h=z$, 使得全域总势能比真实情况的全域总势能高即 $E_m > E_{m-1} > E_i > E_{S'}$ 。因此, 全域总势能随着赋予溢出点位置升高, 会呈现先减小后增大的

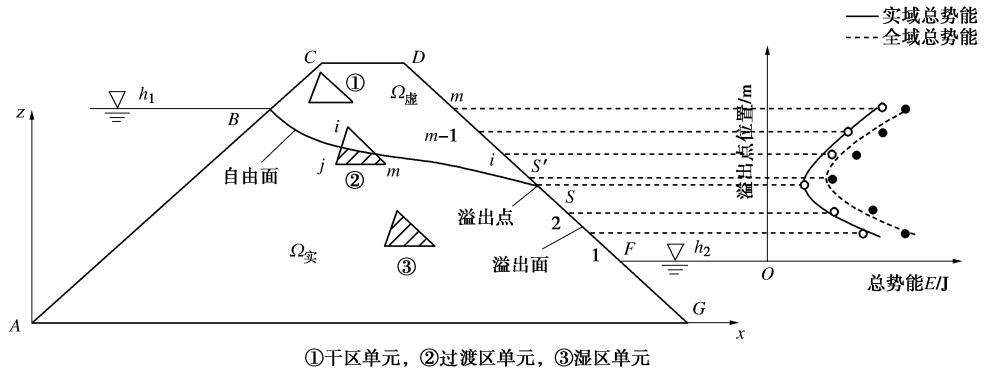


图 1 不同溢出点位置的总势能变化趋势示意图

Fig. 1 Variation of total potential energy with different spill points

变化趋势, 当全域总势能最小时, 对应的溢出点 S' 就是所求的溢出点位置。但由于真实的渗流区域是自由面以下的区域, 当采用全域总势能求解溢出点时, 忽略了自由面以上区域对真实渗流区域的影响, 所以, 采用全域总势能求解的溢出点位置 S' 与真实溢出点位置 S 有微小误差。

2.2 实域总势能及公式推导

以图 1 所示二维均质堤坝渗流计算模型为例, 自由面 BS 将全域 Ω 划分为实域 $\Omega_{\text{实}}$ (自由面以下的区域) 和 $\Omega_{\text{虚}}$ (自由面以上的区域)。将渗流场分为湿区、过渡区和干区, 若单元中节点水头与坐标的差值均不小于零, 则该单元为湿单元; 若单元中节点水头与坐标的差值均不大于零, 则该单元为干单元; 余下的单元则为过渡单元。

基于全域总势能 ($E_{\Omega} = E_{\text{实}} + E_{\text{虚}}$) 求解渗流溢出点, 在求解时未将虚域势能 $E_{\text{虚}}$ 从总势能中扣除, 造成了一定的误差。本文在此基础上提出了实域总势能的概念, 实域总势能 $E_{\text{实}}$ 是指湿区和过渡区中自由面以下区域的势能总和 (即图 1 中自由面以下阴影区域的势能总和)。在真实渗流情况下, 渗流自由面 BS 以上的区域是没有渗流的, 不存在渗流势能, 将虚域势能从总势能中扣除更加符合实际情况。渗流场中的能量以实域总势能 $E_{\text{实}}$ 来表示, 实域总势能随溢出点位置变化的关系示意图如图 1 所示。随着溢出点位置的升高, 实域总势能 $E_{\text{实}}$ 先降低后升高, 当为真实溢出点 S 时, 实域总势能取得最小值。

$$\text{实域总势能: } E_{\text{实}} = E_{\Omega} - \alpha E_{\text{过}}, \quad (7)$$

式中, E_{Ω} 为全域总势能, $E_{\text{实}}$ 为实域总势能, $E_{\text{过}}$ 为过渡单元的总势能, α 为过渡单元中虚区面积占单元总面积的比

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{S_{\text{空白}}}{S_{\text{总}}} & \text{虚区形成曲边三角形,} \\ \alpha &= 1 - \frac{S_{\text{阴影}}}{S_{\text{总}}} & \text{实区形成曲边三角形.} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

对过渡单元的处理:

(1) 第一类单元: 三角形单元中仅有一个节点在自由面以上, 以节点 i 在自由面以上为例 (如图 2 (a) 所示), 用线性插值求出自由面与三角形单元的交点坐标, 如图 3 所示, 以棱边 ij 为例:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_j + (x_i - x_j) \frac{\Delta_j}{\Delta_j - \Delta_i}, \\ z_1 &= z_j + (z_i - z_j) \frac{\Delta_j}{\Delta_j - \Delta_i}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中 x_i, x_j, z_i, z_j 分别为 i, j 的横坐标和纵坐标; x_1, z_1 为交点 1 的横坐标和纵坐标; Δ 为水头与纵坐标差值, $\Delta_i = h_i - z_i$ (自由面以上 $h_i < z_i$), $\Delta_j = h_j - z_j$ (自由面以下 $h_j > z_j$)。同理可求出交点 2 的坐标。

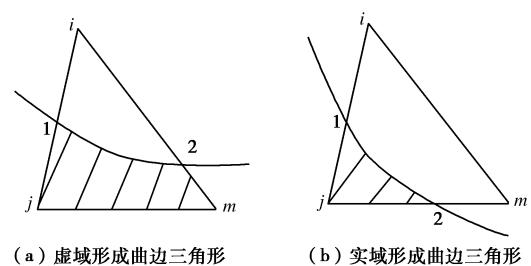


图 2 过渡单元类型

Fig. 2 Types of transitional elements

$$\text{由三角形单元的面积公式 } S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & z_i \\ 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_m & z_m \end{vmatrix} \text{ 计算出}$$

过渡区单元的总面积 S_{ijm} , 同样地可计算出过渡区单元自由面上三角形单元的面积 S_{i12} 。过渡区单元中虚区面积占单元总面积的比 $\alpha = \frac{S_{i12}}{S_{ijm}}$ 。同理可分别计算出节点 j, m 在自由面上时的面积比。

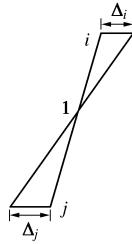


图3 自由面与棱边交点坐标的计算

Fig. 3 Calculation of intersection-point coordinate of free surface and edge

(2) 第二类单元: 三角形单元中有二个节点在自由面以上, 以节点 j 在自由面以下为例 (如图 2 (b) 所示)。由式 (9) 及三角形单元的面积公式求出过渡区单元中自由面以下三角形单元面积 S_{ij2} , 过渡区单元的面积比 $\alpha = 1 - \frac{S_{ij2}}{S_{ijm}}$ 。同理可分别计算出节点 i , m 在自由面以下时的面积比。

2.3 计算步骤

(1) 对土石坝进行有限元划分 (以三角形单元为例)。首先对坝体进行竖向和横向剖分, 得到规则的四边形单元和三角形单元, 再对各四边形单元进行同方向对角线连接, 剖分为三角形单元, 按照由上向下, 由左向右的顺序依次编号, 或直接生成三角形单元。

(2) 将已知上、下游各节点的水头值和假定溢出点的水头值 ($h=z$) 代入式 (3), 为编程方便, 将已知水头值节点在总渗透矩阵中所对应的主对角线元素变为 1, 其余为 0, 将已知水头值代入所对应的水头列向量, 无需对渗透矩阵、水头列向量及自由项进行降阶。再依据式 (3) 计算出各待求节点的水头值。

(3) 计算各节点的水头值与纵坐标的差值, 将渗流场划分为湿区、过渡区和干区, 通过对过渡区单元的计算, 依据式 (8) 计算出过渡区单元的面积比 α 。

(4) 将干区单元丢弃, 保持赋予溢出点的位置不变, 依据式 (3) 重新求解各节点水头值, 依据式 (6) 求解出此时的全域总势能, 将丢单元前计算出的面积比 α 代入式 (7) 中, 无需调整自由面, 计算出在当前溢出点位置时的实域总势能 $E_{\text{实}}$ 。

(5) 将假定溢出点位置升高一个节点, 重复步骤 (2)、(3)、(4) 求解出实域总势能 E_p , p 为执行此步骤的序号, 判断 E_p 与 E_{p-1} 的大小, 若 $E_p > E_{p-1}$, 执行下一步; 若 $E_p < E_{p-1}$, 重复计算步骤 (5)。

(6) 执行步骤序号 $p-2$, $p-1$, p 所对应的节点坐标分别为 (x_1, z_1) 、 (x_2, z_2) 、 (x_3, z_3) , 令 $x_2 = x_1 + (x_3 - x_1)q\beta / (z_3 - z_1)$, $z_2 = z_1 + q\beta$ (β 为溢出点最小误差限值), 并将 (x_2, z_2) 作为新的溢出点坐标, 重复步骤 (2)、(3)、(4) 求解实域总势能 E_q , q 为执行

此步骤的序号。

(7) 判断 E_q 与 E_{q-1} 的大小, 若 $E_q < E_{q-1}$, 令 $q = q+1$, 回到步骤⑥。若 $E_q > E_{q-1}$, 此时执行此步骤序号 $q-1$ 所对应的节点坐标即为真实溢出点坐标。程序流程图如图 4 所示。

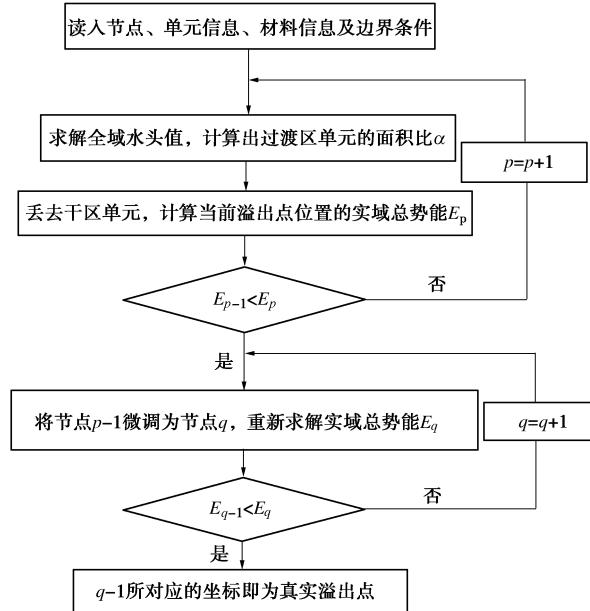


图4 有限元计算程序框图

Fig. 4 Block diagram of finite element calculation

3 算例

3.1 有解析解的均质矩形坝

以均质土坝为例进行分析, 尺寸为 $10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$, 土坝上、下游水位分别为 10 m 和 2 m , 底部为不透水边界, 该问题的自由面解析表达式为 $z^2 = 100 - 8x$, 其溢出点位置的解析解为 4.472 m 。将计算模型划分为 200 个单元, 以直角边长为 $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ 的三角形单元进行划分, 如图 5; 应用上文所提方法, 采用 Fortran 编写二维有限元程序求解溢出点位置。实域总势能的变化情况如表 1 所示, n 为孔隙率。

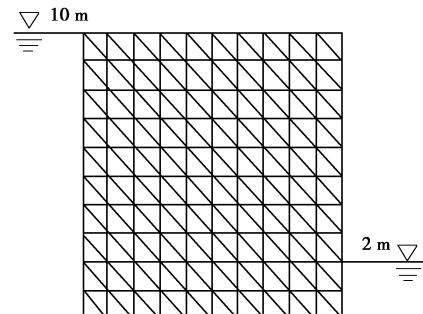


图5 均质矩形坝有限元划分

Fig. 5 Finite element division of homogeneous rectangular dam

表 1 实域总势能

Table 1 Total potential energy in real domain

纵坐标/m	实域总势能/(10 ⁴ nJ·m ⁻¹)
3.0	601.187
4.0	586.365
4.3	584.655
4.4	584.596
4.45	584.586
4.5	584.597
4.6	584.661
5.0	585.594
6.0	594.784

由表 1 可知,采用本文所提方法计算均质矩形坝,算得的溢出点位置为 4.45 m。当溢出点位置为 4.45 m 时,实域总势能最小。

由表 2 可知,本文方法算得的溢出点与解析解相比,绝对误差为 -0.022 m, 相对误差仅为 -0.49%, 精度比节点虚流量法、初流量法、改进的初流量法、改进的截止负压法、改进的丢单元法、全域总势能极小值法都高。节点虚流量法、初流量法、改进的初流量法、改进的截止负压法、改进的丢单元法网格划分为边长为 1 m×1 m×1 m 的八节点六面体。全域总势能法与本文方法划分网格一致。以往有限元计算方法通常根据溢出面上节点水头值与位置高程的大小迭代求解溢出点,容易产生迭代不收敛的问题,且影响计算精度。本文方法通过求解实域总势能确定溢出点位置,解决了迭代不收敛的问题,提高了计算精度。改进了以全域总势能求解溢出点位置的方法,将虚域势能从全域总势能中扣除,减少了因虚域势能造成的误差,提高了求解溢出点的计算精度。

表 2 精度对比

Table 2 Comparison of accuracy

计算方法	溢出点位置 /m	绝对误差 /m	相对误差 /%
解析解	4.472		
本文方法	4.45	-0.022	-0.49
全域总势能极小值法 ^[16]	4.55	0.078	1.74
节点虚流量法 ^[6]	4.33	-0.142	-3.18
初流量法 ^[9]	4.373	-0.099	-2.21
改进初流量法 ^[9]	4.375	-0.097	-2.17
改进截止负压法 ^[13]	4.344	-0.128	-2.86
改进丢单元法 ^[17]	4.62	0.148	3.31

3.2 有解析解的均质梯形坝

梯形坝渗流是工程中常见的渗流现象,比如用于挡水的土石坝和基坑开挖的围堰墙体等建筑物均属于梯形坝。现以不透水地基上均质土石坝为例,坝高 17 m, 坝长 97 m, 上游水位 15 m, 下游水位 4 m。本算例中网格划分为 714 个三角形单元, 网格划分单元见

图 6。利用本文编制的有限元程序求解坝体溢出点的位置见表 3。

表 3 实域总势能

Table 3 Total potential energy in real domain

纵坐标/m	实域总势能/(10 ⁴ nJ·m ⁻¹)
5.0	10289.569
6.0	10254.098
6.1	10253.644
6.2	10253.635
6.3	10258.522
6.4	10259.365
7.0	10272.879
8.0	10321.122

由表 3 可知,竖向 1 m 网格划分下,算得溢出点位置为 6.20 m(真实溢出点位置为 6.23 m),与解析解的差为 -0.03 m,相对误差为 -0.48%,满足工程精度要求。通过全域总势能求解溢出点位置为 6.40 m,相对误差为 2.72%。本文方法通过将虚域势能从全域总势能中扣除,减少了因虚域势能造成的误差。

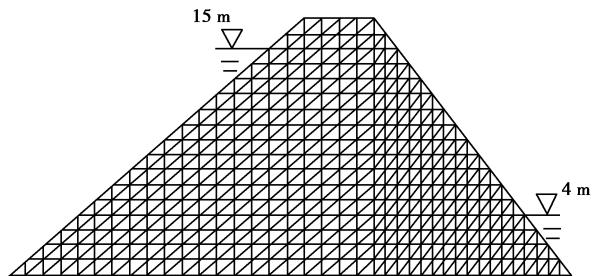


图 6 均质梯形坝有限元划分

Fig. 6 Finite element division of homogeneous trapezoidal dam

4 结 论

(1) 改进了全域总势能求解溢出点的方法,将虚域势能从全域总势能中扣除,提出了实域总势能的概念,减少了因虚域势能造成的误差,提高了求解溢出点的计算精度。

(2) 解决了以往采用有限元法求解溢出点时迭代条件复杂且不易收敛的问题,避免了以往求解溢出点时需同自由面一起迭代,提高了求解效率及计算稳定性。

(3) 通过求解计算模型与工程实例表明,本文方法较以往有限元计算方法可更精确地确定溢出点位置。

参考文献:

- [1] DARBANI M, OUAHSINE A, VILLON P, et al. Meshless method for shallow water equations with free surface flow[J]. Applied Mathematics and Computation, 2011(217): 5113 – 5124.

- [2] JIE Yu-xin, LIU Li-zhen, XU Wen-jie, et al. Application of NEM in seepage analysis with a free surface[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2013, **89**: 23 - 37.
- [3] TANG Jing, LIU Yong-biao. Penalty function element free method to solve complex seepage field of earth fill dam[J]. IERI Procedia, 2012(1): 117 - 123.
- [4] 吴梦喜, 张雪勤. 有自由面渗流分析的虚单元法[J]. 水利学报, 1994(8): 67 - 71. (WU Meng-xi, ZHANG Xue-qin. Imaginary element method for numerical analysis of seepage with free surface[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1994(8): 67 - 71. (in Chinese))
- [5] 凌道盛. 有自由面渗流分析的虚节点法[J]. 浙江大学学报(工学版), 2002, **36**(3): 243 - 246. (LING Dao-sheng. Virtual node method for seepage with free surface problem[J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2002, **36**(3): 243 - 246. (in Chinese))
- [6] 崔皓东, 朱岳明. 有自由面渗流分析的改进节点虚流量全域迭代法[J]. 武汉理工大学学报(交通科学与工程版), 2009, **33**(2): 238 - 241. (CUI Hao-dong, ZHU Yue-ming. Improved procedure of nodal virtual flux of global iteration to solve seepage free surface[J]. Journal of Wuhan University of Technology (Transportation Science and Engineering), 2009, **33**(2): 238 - 241. (in Chinese))
- [7] 张有天, 陈平, 王镭. 有自由面渗流分析的初流量法[J]. 水利学报, 1988(8): 18 - 26. (ZHANG You-tian, CHEN Ping, WANG Lei. Initial flow method for seepage analysis with free surface[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1988(8): 18 - 26. (in Chinese))
- [8] 李新强. 无压渗流有限元分析的改进初流量法[J]. 水利学报, 2007, **38**(8): 961 - 965. (LI Xin-qiang. Modified initial flow method for FEM analysis of unconfined seepage[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2007, **38**(8): 961 - 965. (in Chinese))
- [9] 潘树来, 王全凤, 俞缙. 利用初流量法分析有自由面渗流问题之改进[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(2): 202 - 209. (PAN Shu-lai, WANG Quan-feng, YU Jin. Improvement of analysis of free surface seepage problem by using initial flow method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(2): 202 - 209. (in Chinese))
- [10] 付延玲, 周志芳, 武永霞. 改进复合单元渗透矩阵调整法求解自由面三维渗流场[J]. 岩土工程学报, 2009, **31**(9): 1434 - 1439. (FU Yan-ling, ZHOU Zhi-fang, WU Yong-xia. Improved adjustment method of compound element conductivity matrix for calculating 3D seepage field with free surface[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, **31**(9): 1434 - 1439. (in Chinese))
- [11] 朱军, 刘光廷. 改进的单元渗透矩阵调整法求解无压渗流场[J]. 水力学报, 2001(8): 49 - 52. (ZHU Jun, LIU Guang-ting. An improved method for calculating unconfined seepage with changing element conductivity matrix[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2001(8): 49 - 52. (in Chinese))
- [12] 黄蔚, 刘迎曦, 周承芳. 三维无压渗流场的有限元算法研究[J]. 水力学报, 2001(6): 33 - 36. (HUANG Wei, LIU Ying-xi, ZHOU Cheng-fang. Finite element algorithm for 3-D unconfined seepage flow field[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2001(6): 33 - 36. (in Chinese))
- [13] 张乾飞, 吴中如. 有自由面非稳定渗流分析的改进截止负压法[J]. 岩土工程学报, 2005, **27**(1): 48 - 54. (ZHANG Qian-fei, WU Zhong-ru. The improved cut-off negative pressure method for unsteady seepage flow with free surface[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, **27**(1): 48 - 54. (in Chinese))
- [14] 毛昶熙, 段祥宝, 李祖贻, 等. 渗流数值计算与程序应用[M]. 南京: 河海大学出版社, 1999. (MAO Chang-xi, DUAN Xiang-bao, LI Zu-ji, et al. Numerical computation in seepage flow and programs application[M]. Nanjing: Hohai University Press, 1999. (in Chinese))
- [15] 侯晓萍, 徐青, 陈胜宏. 用空气单元法求解渗流场的逸出边界问题[J]. 岩土力学, 2015, **36**(8): 2345 - 2351. (HOU Xiao-ping, XU Qing, CHEN Sheng-hong. An air element method for overflow boundary problem in seepage analysis[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, **36**(8): 2345 - 2351. (in Chinese))
- [16] 李远东, 侯兴民, 郑珊珊, 等. 基于总势能极小原理的渗流溢出点位置计算方法[J]. 水利与建筑工程学报, 2016, **14**(4): 84 - 88. (LI Yuan-dong, HOU Xing-min, ZHENG Shan-shan, et al. Calculation method of seepage overflow point based on the principle of minimum total potential energy[J]. Journal of Water Resources and Architectural Engineering, 2016, **14**(4): 84 - 88. (in Chinese))
- [17] 张巍, 肖明. 有自由面渗流分析的丢单元法的改进及其在地下工程中的应用[J]. 水利与建筑工程学报, 2005, **3**(1): 32 - 36. (ZHANG Wei, XIAO Ming. Study on optimizing abandoning element method for numerical analysis of seepage with free surface and its application in underground engineering[J]. Journal of Water Resources and Architectural Engineering, 2005, **3**(1): 32 - 36. (in Chinese))