

DOI: 10.11779/CJGE201803018

基于 Mindlin 解的矩形均布荷载作用下的附加应力

何春保, 王林彬, 李高扬*

(华南农业大学水利与土木工程学院, 广东 广州 510642)

摘要: 基础沉降计算一般首先采用 Boussinesq 解或考虑埋深的 Mindlin 解来计算附加应力系数, 再考虑分层土特性和地区经验系数, 现有的文献在计算半无限弹性体内作用竖向矩形均布荷载的附加应力系数时, 为了简化积分, 往往将坐标轴置于矩形的角点, 计算矩形角点下某点的系数, 因此相关解答具有一定的局限性。为了使得解答更具一般性, 在集中荷载作用的 Mindlin 解基础上, 通过积分重新推导了在半无限体内部竖向矩形均布荷载作用于水平面内的应力解以及作用在竖向面内时的 σ_z 解表达式, 通过与既有文献对比验证了其正确性, 并对不同位置和不同泊松比情况下的附加应力系数变化规律进行了分析, 相关结论可以为工程计算应用参考。

关键词: Mindlin 解; 竖向荷载; 应力解

中图分类号: TU471 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2018)03-0533-07

作者简介: 何春保(1974-), 男, 博士, 副教授, 研究方向为土与结构物的共同作用。E-mail: hcb1238@163.com.

Stresses induced by vertical rectangular uniform loads within ground based on Mindlin solution

HE Chun-bao, WANG Lin-bin, LI Gao-yang

(College of Water Conservancy and Civil Engineering, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China)

Abstract: The calculation of foundation settlement is usually based on the Boussinesq's solution or Mindlin's solution, which is suitable for considering the embedding depth to calculate the additional stress coefficient. In order to simplify the integration process, in the existing literatures the coordinate origin is often placed at the corner of rectangle in calculating the additional stress coefficient of vertical rectangular uniform loads acting on a semi-infinite elastic body, and the coefficients at a point under the corner of rectangle are calculated, so the relevant solutions have obvious limitations. In order to make the solution more general, on the basis of Mindlin's solution of concentrated load, the analytic expressions for stress distribution at any point in a semi-infinite body suffering vertical rectangular uniform loads on horizontal area and the analytic expression for σ_z with vertical rectangular uniform loads on vertical area are deduced. Their correctness is verified by comparing with the existing literature, and the change laws of stress coefficient at different positions under different Poisson's ratios are analysed. The conclusions can be applied in engineering calculation.

Key words: Mindlin solution; vertical load; stress solution

0 引言

有关地基应力和位移的计算是岩土工程很重要的研究课题, 荷载作用于半无限空间体表面的Boussinesq解^[1]和考虑埋深的Mindlin解^[2]是两种经典的解答形式, 两者给出的都是集中荷载作用下的应力和位移解析解表达式。由于实际工程中荷载往往是面荷载, 如矩形、条形或圆形等, 而且基础一般都有一定的埋深, 因此还需要对Mindlin解进行积分, 为此很多学者进行了研究, Geddes^[3]给出了垂直平面内竖向均布荷载作用下的Mindlin解积分形式, 袁聚云等^[4-5]推导了竖向矩形和条形分布荷载作用面角点的Mindlin应力解表达式, 王士杰等^[6]给出了类似的竖向矩形分布荷载作用

面角点下竖向应力 σ_z 表达式。王洪新^[7]在袁聚云等^[4]的基础上进行了重新推导和修正。以上的解答常以图形和表格的形式列出, 而且给出的主要矩形荷载面角点或条形荷载侧边点及其下方点的表达式或结果。对于其他计算点, 则必须使用分块叠加的方法来计算, 因此有很大的局限性。对于任意点的应力计算, 邱明兵等^[8]通过简化, 将单柱端阻、矩形分布侧阻、正三角形分布侧阻产生的应力表达为各分项阻力与相应附加应力系数的乘积, 给出了考虑桩径影响的竖向荷载

基金项目: 广东省自然科学基金项目 (2015A030310164)

收稿日期: 2017-05-22

*通讯作者 (E-mail: li_gaoyang@sina.com)

下Mindlin应力解，但是其解答是一种近似的Mindlin应力解。

地基基础共同作用分析^[9-10]是岩土工程的研究热点，矩形均布荷载作用下的解对于解决方桩与地基的共同作用时较为便利。而既有文献在推导有关矩形荷载作用时Mindlin解的积分过程中存在的主要不足包括：①基于工程应用方便，计算点一般仅考虑竖向荷载作用在水平面上区域角点下某点的附加应力，而对竖向荷载作用在竖面内考虑较少，因此公式具有一定的局限性；②由于将坐标轴原点置于矩形区域角点，因此对于有多个荷载作用于不同位置情况，需要进行坐标变换，较为繁琐。为了便于在土与结构物共同作用计算分析应用，本文在Mindlin解的基础上，通过积分整理得到均匀矩形荷载作用于水平面内的应力解以及作用在竖向面内时的 σ_z 解，通过积分区域变化即可得到条形荷载作用下的解答。并对均匀矩形荷载作用于水平面内时不同深宽比和泊松比以及不同深度位置的附加应力系数变化情况进行了分析。

1 矩形均匀荷载作用下的 Mindlin 应力解

1.1 集中荷载作用下的 Mindlin 应力解

为了表达方便简洁，定义以下符号和物理量： E 为变形模量； G 为剪切模量； ν 为泊松比； P, q 分别为集中荷载和均匀荷载； c 为埋深； h 为计算点到荷载加载面的竖向距离； x, y, z 为直角坐标系； ξ, η, ζ 为加载区域某点坐标。

$$\begin{aligned} \beta &= 8\pi(1-\nu); X = \xi - x; Y = \eta - y; Z_a = z - \zeta, \\ Z_b &= z + \zeta; Z_1 = z - c, Z_2 = z + c; R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \\ R_1 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - c)^2}; R_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + c)^2}; K = \\ &\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}, K_1 = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (z - \zeta)^2}, \\ K_2 &= \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (z + \zeta)^2}. \end{aligned}$$

如图1所示，Mindlin[2]给出了竖向集中力作用于半空间内部一点 $(0, 0, +c)$ 时的应力解，在半空间任意点 $M(x, y, z)$ 处产生的应力为

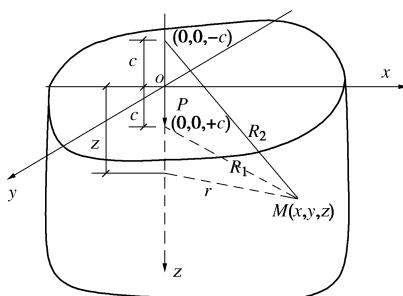


图 1 竖向集中力作用于半空间内部

Fig. 1 Vertical centralized loads in elastic semi-infinite ground

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{P}{\beta} \left\{ \frac{-(1-2\nu)(z-c)}{R_1^3} + \frac{3x^2(z-c)}{R_1^5} - \right. \\ &\quad \frac{(1-2\nu)[3(z-c)-4\nu(z+c)]}{R_2^3} + \\ &\quad \frac{3(3-4\nu)x^2(z-c)-6c(z+c)[(1-2\nu)z-2\nu c]}{R_2^5} + \\ &\quad \frac{30czx^2(z+c)}{R_2^7} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)}. \\ &\quad \left. \left[1 - \frac{x^2}{R_2(R_2+z+c)} - \frac{x^2}{R_2^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{P}{\beta} \left\{ \frac{-(1-2\nu)(z-c)}{R_1^3} + \frac{3y^2(z-c)}{R_1^5} - \right. \\ &\quad \frac{(1-2\nu)[3(z-c)-4\nu(z+c)]}{R_2^3} + \\ &\quad \frac{3(3-4\nu)y^2(z-c)-6c(z+c)[(1-2\nu)z-2\nu c]}{R_2^5} + \\ &\quad \frac{30czy^2(z+c)}{R_2^7} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)}. \\ &\quad \left. \left[1 - \frac{y^2}{R_2(R_2+z+c)} - \frac{y^2}{R_2^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{P}{\beta} \left\{ \frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_1^3} - \frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_2^3} + \frac{3(z-c)^3}{R_1^5} + \right. \\ &\quad \frac{3(3-4\nu)z(z+c)-3c(z+c)(5z-c)}{R_2^5} + \frac{30cz(z+c)}{R_2^7} \left. \right\}, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{Pxy}{\beta} \left\{ \frac{(3z-c)}{R_1^5} + \frac{3(3-4\mu)(z-c)}{R_2^5} - \right. \\ &\quad \left. \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2^2(R_2+z+c)} \left(\frac{1}{R_2+z+c} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{30cz(z+c)}{R_2^7} \right\}, \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{Px}{\beta} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{R_1^3} - \frac{(1-2\nu)}{R_2^3} + \frac{3(z-c)^2}{R_1^5} + \right. \\ &\quad \left. \frac{3(3-4\nu)z(z+c)-3c(3z+c)}{R_2^5} + \frac{30cz(z+c)^2}{R_2^7} \right\}, \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \frac{Py}{\beta} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{R_1^3} - \frac{(1-2\nu)}{R_2^3} + \frac{3(z-c)^2}{R_1^5} + \right. \\ &\quad \left. \frac{3(3-4\nu)z(z+c)-3c(3z+c)}{R_2^5} + \frac{30cz(z+c)^2}{R_2^7} \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

1.2 水平面上矩形均匀荷载作用下的Mindlin应力解

对于方桩的桩端荷载作用，如图2所示，当矩形均匀荷载作用于埋深 ζ 的面积 $(\xi_1 \sim \xi_2) \times (\eta_1 \sim \eta_2)$ 上时，在点 $M(x, y, z)$ 处产生的附加应力可以通过对式(1)~(6)积分得到。在矩形面积上积分用到的主要的积分量包括：

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{K_1^3} d\xi d\eta, \quad \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{K_2^3} d\xi d\eta,$$

$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{K_1^5} d\xi d\eta$, $\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{K_2^5} d\xi d\eta$, $\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{K_2^7} d\xi d\eta$ 等。在文献[4, 7]也有相关类似的积分推导, 但其积分区域为 $(0 \sim A) \times (0 \sim B)$, 因此不具一般性, 对于积分区域为 $(\xi_1 - \xi_2) \times (\eta_1 - \eta_2)$ 时, 得到的积分结果如下:

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{K_1^3} d\xi d\eta = \left[\left\{ \frac{1}{Z_a} \arctan \frac{XY}{Z_a K_1} \right\}_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} \right]_{y=\eta_1}^{y=\eta_2}, \quad (7)$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{K_2^3} d\xi d\eta = \left[\left\{ \frac{1}{Z_b} \arctan \frac{XY}{Z_b K_2} \right\}_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} \right]_{y=\eta_1}^{y=\eta_2}, \quad (8)$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{K_1^5} d\xi d\eta = \frac{1}{3Z_a^3}.$$

$$\left[\left\{ \arctan \frac{XY}{Z_a K_1} + \frac{XYZ_a (K_1^2 + Z_a^2)}{(K_1^2 Z_a^2 + X^2 Y^2) K_1} \right\}_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} \right]_{y=\eta_1}^{y=\eta_2}, \quad (9)$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{K_2^5} d\xi d\eta = \frac{1}{3} \left[\left\{ \frac{1}{Z_b^3} \arctan + \frac{XY}{(K_2^2 Z_b^2 + X^2 Y^2)} \right\}_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} \right]_{y=\eta_1}^{y=\eta_2}.$$

$$\frac{XY}{Z_b K_2} \left(\frac{K_2}{Z_b^2} + \frac{1}{K_2} \right) \Big|_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} \Bigg\}_{y=\eta_1}^{y=\eta_2}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{K_2^7} d\xi d\eta &= \frac{1}{5\zeta z Z_b} \left[\left\{ \frac{\zeta z}{Z_b^2} \arctan \frac{XY}{Z_b K_2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{2\zeta z Y Z_b^3}{X(X^2 + Z_b^2) K_2} \left(\frac{1}{X^2} - \frac{1}{K_2^2} - \frac{2}{(X^2 + Z_b^2)} \right) \right\}_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} \right]_{y=\eta_1}^{y=\eta_2} \end{aligned}$$

$$\frac{\zeta z Y K_2}{X^3 (Y^2 + Z_b^2)} \left(\frac{6(X^2 - Z_b^2)}{Z_b} + \frac{4Z_b K_2^2}{(Y^2 + Z_b^2)} \right) \Big|_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} \Bigg\}_{y=\eta_1}^{y=\eta_2}, \quad (11)$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{X^2}{K_1^5} d\xi d\eta = \frac{1}{3Z_a} \left[\left\{ \arctan \frac{XY}{Z_a K_1} - \frac{XYZ_a}{(X^2 + Z_a^2) K_1} \right\}_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} \right]_{y=\eta_1}^{y=\eta_2}, \quad (12)$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{X^2}{K_2^5} d\xi d\eta = \frac{1}{3Z_b} \left[\left\{ \arctan \frac{XY}{Z_b K_2} - \frac{XYZ_b}{(X^2 + Z_b^2) K_2} \right\}_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} \right]_{y=\eta_1}^{y=\eta_2}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{X^2}{K_2^7} d\xi d\eta &= \frac{1}{15Z_b^3} \left[\left\{ \arctan \frac{XY}{Z_b K_2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{XYZ_b [2X^2 Z_b^2 (2X^2 + Y^2 + Z_b^2)]}{(X^2 + Z_b^2)^2 (Y^2 + Z_b^2) K_2^3} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{XYZ_b [Z_b^2 (Y^2 + Z_b^2)^2 - Z_a^2 (X^2 + Y^2)^2]}{(X^2 + Z_b^2)^2 (Y^2 + Z_b^2) K_2^3} \right\}_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} \right]_{y=\eta_1}^{y=\eta_2}, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{K_2(K_2 + Z_b)} \left[1 - \frac{X^2}{K_2(K_2 + Z_b)} - \frac{X^2}{K_2^2} \right] d\xi d\eta =$$

$$\left[\left\{ \arctan \frac{Y}{X} - \arctan \frac{YZ_b}{X K_2} \right\}_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} \right]_{y=\eta_1}^{y=\eta_2}, \quad (15)$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{Y}{K_1^3} d\xi d\eta = \left[\left\{ -\ln(X + K_1) \right\}_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} \right]_{y=\eta_1}^{y=\eta_2}, \quad (16)$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{Y}{K_2^3} d\xi d\eta = \left[\left\{ -\ln(X + K_2) \right\}_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} \right]_{y=\eta_1}^{y=\eta_2}, \quad (17)$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{Y}{K_1^5} d\xi d\eta = \left[\left\{ \frac{-X}{3(Y^2 + Z_a^2) K_1} \right\}_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} \right]_{y=\eta_1}^{y=\eta_2}, \quad (18)$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{Y}{K_2^5} d\xi d\eta = \left[\left\{ \frac{-X}{3(Y^2 + Z_b^2) K_2} \right\}_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} \right]_{y=\eta_1}^{y=\eta_2}, \quad (19)$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{Y}{K_2^7} d\xi d\eta = \left[\left\{ -X \left(\frac{1}{K_2} + \frac{2}{Y^2 + Z_b^2} \right) \right\}_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} \right]_{y=\eta_1}^{y=\eta_2}. \quad (20)$$

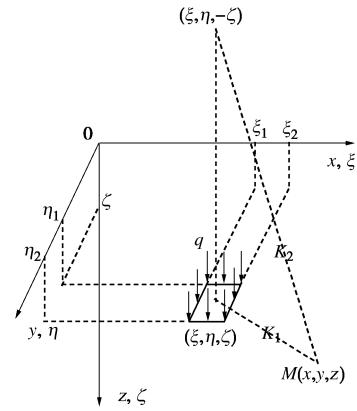


图 2 矩形均布荷载作用示意图

Fig. 2 Model of vertical rectangular uniform load in an elastic semi-infinite ground

利用以上积分结果 (7) ~ (20), 即可得到图 2 中矩形局部荷载作用下在点 $M(x, y, z)$ 处产生的应力解为

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{q}{\beta} \cdot \\ &\left[\left\{ 2v \arctan \frac{XY}{Z_a K_1} - \frac{XYZ_a}{(X^2 + Z_a^2) K_1} + 2v(3-4v) \arctan \frac{XY}{Z_b K_2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{(3-4v) XYZ_a}{(X^2 + Z_b^2) K_2} - \frac{2\zeta XY(z - 2v Z_b)}{Z_b K_2} \left[\frac{1}{(X^2 + Z_b^2)} + \frac{1}{(Y^2 + Z_b^2)} \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{2\zeta z XY}{Z_b K_2^3} \left[\frac{X^2}{Y^2 + Z_b^2} + \frac{X^2 (X^2 + K_2^2) - Z_b^2 (Y^2 + Z_b^2)}{(X^2 + Z_a^2)^2} \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 4(1-v)(1-2v) \left(\arctan \frac{Y}{X} - \arctan \frac{YZ_b}{X K_2} \right) \right\}_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} \right]_{y=\eta_1}^{y=\eta_2}, \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y = & \frac{q}{\beta} \left[\left\{ 2\nu \arctan \frac{XY}{Z_a K_1} - \frac{XYZ_a}{(Y^2 + Z_a^2)K_1} + 2\nu(3-4\nu) \arctan \frac{XY}{Z_b K_2} - \right. \right. \\ & \frac{(3-4\nu)XYZ_a}{(Y^2 + Z_b^2)K_2} - \frac{2\zeta XY(z-2\nu Z_b)}{Z_b K_2} \left[\frac{1}{(Y^2 + Z_b^2)} + \frac{1}{(X^2 + Z_b^2)} \right] + \\ & \frac{2\zeta zXY}{Z_b K_2^3} \left[\frac{Y^2}{X^2 + Z_b^2} + \frac{Y^2(Y^2 + K_2^2) - Z_b^2(X^2 + Z_b^2)}{(Y^2 + Z_a^2)^2} \right] + \\ & \left. \left. 4(1-\nu)(1-2\nu) \left(\arctan \frac{X}{Y} - \arctan \frac{XZ_b^2}{YK_2} \right) \right\}_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} \right]_{y=\eta_1}^{y=\eta_2}, \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = & \frac{q}{\beta} \left[\left\{ 2(1-\nu) \arctan \frac{XY}{Z_a K_1} + 2(1-\nu) \arctan \frac{XY}{Z_b K_2} + \right. \right. \\ & \frac{XYZ_a}{K_1} \left[\frac{1}{X^2 + Z_a^2} + \frac{1}{Y^2 + Z_a^2} \right] - \\ & \frac{(3-4\nu)zZ_b^2 - \zeta Z_b(5z - \zeta)}{Z_b^2 K_2} \left(\frac{XY}{X^2 + Z_b^2} + \frac{XY}{Y^2 + Z_b^2} \right) + \\ & \frac{2\zeta zYZ_b^3}{X(X^2 + Z_b^2)K_2} \left[\frac{1}{X^2} - \frac{1}{K_2^2} - \frac{2}{(X^2 + Z_b^2)} \right] + \\ & \left. \left. \frac{\zeta zYK_2}{X^3(Y^2 + Z_b^2)} \left[\frac{6(X^2 - Z_b^2)}{Z_b} + \frac{4Z_b K_2^2}{Y^2 + Z_b^2} \right] \right\}_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} \right]_{y=\eta_1}^{y=\eta_2}, \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = & \frac{q}{\beta} \cdot \\ & \left[\left\{ 2\nu \arctan \frac{XY}{Z_a K_1} - \frac{XYZ_a}{(X^2 + Z_a^2)K_1} + 2\nu(3-4\nu) \arctan \frac{XY}{Z_b K_2} - \right. \right. \\ & \frac{(3-4\nu)XYZ_a}{(X^2 + Z_b^2)K_2} - \frac{2\zeta XY(z-2\nu Z_b)}{Z_b K_2} \left[\frac{1}{(X^2 + Z_b^2)} + \frac{1}{(Y^2 + Z_b^2)} \right] + \\ & \frac{2\zeta zXY}{Z_b K_2^3} \left[\frac{X^2}{Y^2 + Z_b^2} + \frac{X^2(X^2 + K_2^2) - Z_b^2(Y^2 + Z_b^2)}{(X^2 + Z_a^2)^2} \right] + \\ & \left. \left. 4(1-\nu)(1-2\nu) \left(\arctan \frac{Y}{X} - \arctan \frac{YZ_b^2}{XK_2} \right) \right\}_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} \right]_{y=\eta_1}^{y=\eta_2}, \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = & \frac{q}{\beta} \left[\left\{ (1-2\nu) \ln \frac{Y+K_1}{Y+K_2} + \frac{YZ_a^2}{K_1(X^2 + Z_a^2)} + \right. \right. \\ & Y \left[\frac{3z^2 - 4\nu z^2 - 4\nu \zeta z - \zeta^2 + \frac{2\zeta z Z_b^2}{K_2^2} + \frac{4\zeta z Z_b^2}{X^2 + Z_b^2}}{K_2(X^2 + Z_b^2)} \right] \left. \right. \\ & \left. \left. \right\}_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} \right]_{y=\eta_1}^{y=\eta_2}, \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = & \frac{q}{\beta} \left[\left\{ (1-2\nu) \ln \frac{X+K_1}{X+K_2} + \frac{XZ_a^2}{K_1(Y^2 + Z_a^2)} + \right. \right. \\ & X \left[\frac{3z^2 - 4\nu z^2 - 4\nu \zeta z - \zeta^2 + \frac{2\zeta z Z_b^2}{K_2^2} + \frac{4\zeta z Z_b^2}{Y^2 + Z_b^2}}{K_2(Y^2 + Z_b^2)} \right] \left. \right. \\ & \left. \left. \right\}_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} \right]_{y=\eta_1}^{y=\eta_2}. \quad (26) \end{aligned}$$

1.3 坚直面上矩形均布荷载作用下的Mindlin应力解

对于方桩侧摩阻力作用情况, 如图 3 所示, 当矩形荷载作用在 $y=\eta_1$ 面上 ($\xi_1 \sim \xi_2$) \times ($\zeta_1 \sim \zeta_2$) 区域时, 由于应力中起主要作用的是竖向应力 σ_z , 在作用面上积分给出 σ_z 解如式 (27)。

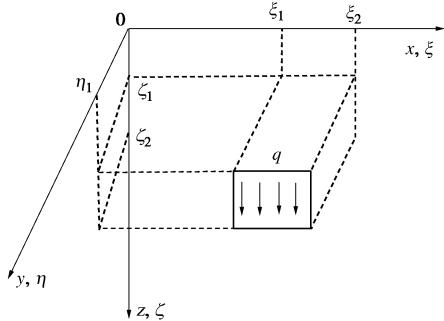


图 3 坚直面上作用矩形均布荷载

Fig. 3 Model of vertical rectangular uniform loads acting on vertical area

$$\begin{aligned} \sigma_z = & \frac{q}{\beta} \left[\left\{ (3-2\nu) \ln \frac{X + \sqrt{X^2 + (y - \eta_1)^2 + Z_a^2}}{X + \sqrt{X^2 + (y - \eta_1)^2 + Z_b^2}} + \right. \right. \\ & \frac{XZ_a^2}{[(y - \eta_1)^2 + Z_a^2] \sqrt{X^2 + (y - \eta_1)^2 + Z_a^2}} + \arctan \frac{XY}{Z_a K_1} + \\ & \frac{X [4\nu z Z_b - (5z^2 + 4\zeta z + \zeta^2)]}{[(y - \eta_1)^2 + Z_b^2] \sqrt{X^2 + (y - \eta_1)^2 + Z_b^2}} + \\ & \frac{2\zeta z XZ_b^2}{[(y - \eta_1)^2 + Z_b^2] \sqrt{X^2 + (y - \eta_1)^2 + Z_b^2}} \cdot \\ & \left. \left. \left(\frac{X^2}{X^2 + (y - \eta_1)^2 + Z_b^2} - 3 \right) \right\}_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} \right]_{z=\zeta_1}^{z=\zeta_2}. \quad (27) \end{aligned}$$

对于矩形荷载分别作用在 $y=\eta_2$ 面上 ($\xi_1 \sim \xi_2$) \times ($\zeta_1 \sim \zeta_2$) 区域、 $x=\xi_1$ 面上 ($\eta_1 \sim \eta_2$) \times ($\zeta_1 \sim \zeta_2$) 区域、 $x=\xi_2$ 面上 ($\eta_1 \sim \eta_2$) \times ($\zeta_1 \sim \zeta_2$) 区域等方桩另外 3 个坚向矩形面上时, 对公式 (27) 分别进行相应的坐标变换即可得到坚向应力 σ_z , 如式 (28) ~ (30) 所示。

$$\begin{aligned} \sigma_z = & \frac{q}{\beta} \left[\left\{ (3-2\nu) \ln \frac{X + \sqrt{X^2 + (y - \eta_2)^2 + Z_a^2}}{X + \sqrt{X^2 + (y - \eta_2)^2 + Z_b^2}} + \right. \right. \\ & \frac{XZ_a^2}{[(y - \eta_2)^2 + Z_a^2] \sqrt{X^2 + (y - \eta_2)^2 + Z_a^2}} + \\ & \arctan \frac{XY}{Z_a K_1} + \frac{X [4\nu z Z_b - (5z^2 + 4\zeta z + \zeta^2)]}{[(y - \eta_2)^2 + Z_b^2] \sqrt{X^2 + (y - \eta_2)^2 + Z_b^2}} + \\ & \frac{2\zeta z XZ_b^2}{[(y - \eta_2)^2 + Z_b^2] \sqrt{X^2 + (y - \eta_2)^2 + Z_b^2}} \cdot \end{aligned}$$

$$\left(\frac{X^2}{X^2 + (y - \eta_2)^2 + Z_b^2} - 3 \right) \left\{ \begin{array}{l} x = \xi_2 \\ x = \xi_1 \end{array} \right\} \left[\begin{array}{l} z = \zeta_2 \\ z = \zeta_1 \end{array} \right], \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = & \frac{q}{\beta} \left[\left\{ (3-2\nu) \ln \frac{Y + \sqrt{(x-\xi_1)^2 + Y^2 + Z_a^2}}{Y + \sqrt{(x-\xi_1)^2 + Y^2 + Z_b^2}} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{YZ_a^2}{[(x-\xi_1)^2 + Z_a^2] \sqrt{(x-\xi_1)^2 + Y^2 + Z_a^2}} + \right. \right. \\ & \left. \left. \arctan \frac{XY}{Z_a K_1} + \frac{Y[4\nu z Z_b - (5z^2 + 4\zeta z + \zeta^2)]}{[(x-\xi_1)^2 + Z_b^2] \sqrt{(x-\xi_1)^2 + Y^2 + Z_b^2}} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{2\zeta z Y Z_b^2}{[(x-\xi_1)^2 + Z_b^2] \sqrt{(x-\xi_1)^2 + Y^2 + Z_b^2}} \right\} \begin{array}{l} y = \eta_2 \\ y = \eta_1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} z = \zeta_2 \\ z = \zeta_1 \end{array}, \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = & \frac{q}{\beta} \left[\left\{ (3-2\mu) \ln \frac{Y + \sqrt{(x-\xi_2)^2 + Y^2 + Z_a^2}}{Y + \sqrt{(x-\xi_2)^2 + Y^2 + Z_b^2}} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{YZ_a^2}{[(x-\xi_2)^2 + Z_a^2] \sqrt{(x-\xi_2)^2 + Y^2 + Z_a^2}} + \right. \right. \\ & \left. \left. \arctan \frac{XY}{Z_a K_1} + \frac{Y[4\nu z Z_b - (5z^2 + 4\zeta z + \zeta^2)]}{[(x-\xi_2)^2 + Z_b^2] \sqrt{(x-\xi_2)^2 + Y^2 + Z_b^2}} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{2\zeta z Y Z_b^2}{[(x-\xi_2)^2 + Z_b^2] \sqrt{(x-\xi_2)^2 + Y^2 + Z_b^2}} \right\} \begin{array}{l} y = \eta_2 \\ y = \eta_1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} z = \zeta_2 \\ z = \zeta_1 \end{array}. \quad (30) \end{aligned}$$

2 条形分布荷载解答和分层地基中的应用

2.1 条形分布荷载

对于条形分布荷载作用下的解答, 只需令图2中荷载作用面长度 $\xi_1 \rightarrow -\infty$, $\xi_2 \rightarrow +\infty$, 宽度 $\eta_2 - \eta_1$ 为单位量, 即可得到条形分布荷载作用下的解答。

2.2 分层地基的沉降计算

由于实际岩土工程应用中, 地基内部土都是分层的, 因此第 i 层土的沉降可以采用以下积分计算:

$$w_i = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{\sigma_z}{E_{si}} dz. \quad (31)$$

地基总沉降为 $w = \psi \sum_{i=1}^n w_i$, 其中 E_{si} 为第 i 层土的压缩模量, ψ 为地区经验系数, n 为土层数。

3 算例分析

3.1 与既有算例对比

为了验证以上公式的正确性, 取文献[7]的矩形荷载和条形荷载解答两个算例进行对比。

算例 1: 矩形受荷面积埋深 $c = 2$ m, $A = 2$ m, $B = 3$ m, $\nu = 0.35$ 。分别计算矩形受荷面积角点下不同深度处的附加应力系数 α (α 为均布荷载 $q = 1$ 时的应力分量), 计算结果对比见表 1。

表 1 角点下的解答对比

Table 1 Comparison of analytic solutions of stresses under corner

z/m	方法	附加应力系数/10 ⁻⁴					
		α_x	α_y	α_z	α_{zz}	α_{yz}	α_{xy}
4	文献[7]	118	222	1343	418	520	156
	本文	117.73	222.12	1342.59	417.75	519.73	155.77
5	文献[7]	31	94	1011	241	321	73
	本文	31.36	93.42	1010.02	240.90	320.41	73.16

算例 2: 条形受荷面积埋深 $c = 2$ m, 单位宽度, $\nu = 0.35$ 。计算条形受荷面积侧边缘下不同深度处的附加应力系数 α , 计算结果对比见表 2。

表 2 条形荷载作用侧边缘下的解答对比

Table 2 Comparison of analytic solutions of stresses under edge of strip load

z/m	方法	附加应力系数/10 ⁻⁴					
		α_x	α_y	α_z	α_{zz}	α_{yz}	α_{xy}
4	文献[7]	491	—	3184	963	—	—
	本文	490.68	1286.03	3182.23	962.21	0	0
5	文献[7]	250	—	2651	617	—	—
	本文	249.37	1015.25	2649.87	616.46	0	0

表 1, 2 的计算结果表明与文献[7]的解答是一致的, 但由于文献[7]给出的是荷载区域角点下的解答, 对其它点需按分块叠加的方式计算, 因此有很大的局限性。

为了便于与表 1, 2 的计算结果对比, 取算例 1 和算例 2 的计算参数不变, 得到矩形和条形荷载作用下中心点的附加应力系数如表 3 所示。

表 3 矩形和条形荷载作用下中心点下各应力分量的解析解

Table 3 Comparison of analytic solutions of stresses under center of rectangular and strip loads

z/m	荷载形式	附加应力系数/10 ⁻⁴					
		α_x	α_y	α_z	α_{zz}	α_{yz}	α_{xy}
4	矩形	-16.62	100.08	2471.01	0	0	0
	条形	209.90	1436.57	3880.22	0	0	0
5	矩形	-38.55	0.67	1506.28	0	0	0
	条形	101.08	1081.38	2974.34	0	0	0

比较表 1~3 的计算结果, 同一深度处, 中心点下的竖向附加应力 α_z 大于角点下的值。矩形荷载作用下中心点下的 α_x , α_y 小于角点下的值。条形荷载作用下的 α_x , α_y 值则与条形荷载方向有关, 当条形方向沿 x 轴时, 中心点的 α_x 小于角点值, 中心点的 α_y 大于角点值。

3.2 参数分析

(1) 埋深对附加应力系数的影响

如图2所示,取方形受荷面积的边长分别为 $A=B=1, 2, 4\text{ m}$ 三种情况, $\nu=0.3$, 考虑不同深宽比, 计算荷载作用面中心点和角点下的附加应力系数, 结果如图4所示。

图4表明: ①不同荷载面宽度情况下, 附加应力系数随深宽比 c/A 的变化规律基本一致, 说明附加应力系数主要与深宽比相关。②荷载的影响深度主要在1倍基础宽度以内, 深度为1倍基础宽度处, 中心点和角点的 α_z 收敛量已经达到了总量的84%, 55%。③当 h 取2倍、3倍基础宽度时, α_z 收敛量分别达到95.8%, 98.4%。

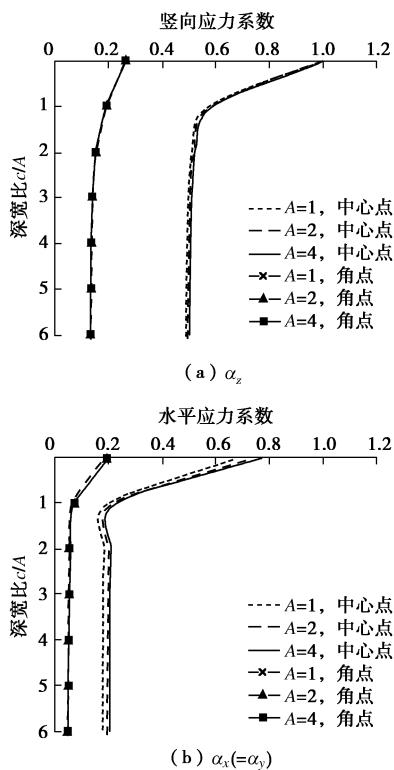


图4 埋深对附加应力的影响

Fig. 4 Influences of embedding depth on additional stress

(2) 泊松比对附加应力系数的影响

取方形受荷面积埋深 $c=2\text{ m}$, 边长 $A=B=2\text{ m}$, 分别取 $\nu=0.1, 0.3, 0.5$ 。计算方形中心点和角点下不同深度 z 处的 α_z 变化, 如图5所示。

图5表明: ①随着 ν 取 $0.1\sim 0.5$, 中心点和角点的竖向附加应力系数 α_z 随深度增加而减小。②在同一深度上, α_z 随 ν 增大而增大。当 $\nu=0.5$ 时中心点和角点下的 α_z 值分别比 $\nu=0.1$ 时大32.7%和28%, 说明 ν 值对附加应力系数的影响是明显的。③在同一深度上, $\alpha_x (= \alpha_y)$ 随 ν 增大而增大, 深度超过3倍基础宽度时, $\alpha_x (= \alpha_y)$ 逐渐收敛为0。

(3) 附加应力系数空间变化

取方形受荷面边长 $A=B=2\text{ m}$, $c=2\text{ m}$, $\nu=0.3$, 方形中心点下不同深度 z 处的 α_z 空间变化如图6所示。

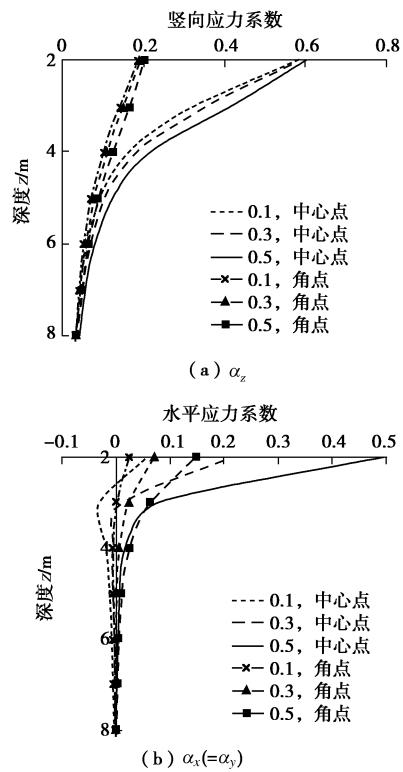
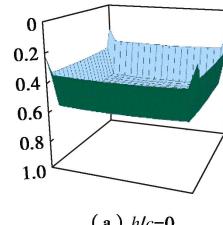
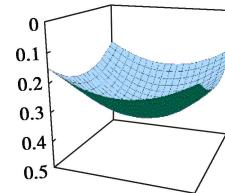


图5 不同 ν 值对应的附加应力系数变化

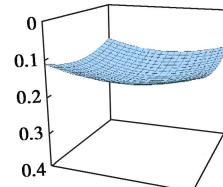
Fig. 5 Variation of additional stress coefficient with different values of ν



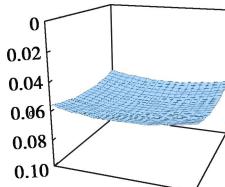
(a) $h/c=0$



(b) $h/c=0.5$



(c) $h/c=1$



(d) $h/c=2$

图6 不同深度处的 α_z 空间图

Fig. 6 Spatial map of α_z at different depths

图6表明竖向应力在荷载作用面中部位置变化相对缓慢, 而在作用面边缘变化较快。随着计算点深度从 $h/c=0$ 增加到 $h/c=2$, 中部位置和边缘处的 α_z 收敛并逐渐趋于一致。

4 结 论

本文通过积分给出了半无限体内部均布矩形荷载作用于水平面内的应力解以及作用在竖向面内时的 σ_z 解表达式, 得到以下3点主要结论。

(1) 附加应力系数主要与深宽比 c/A 有关, 荷载的影响深度主要在1倍基础宽度以内, 计算深度取2~3倍基础宽度时, α_z 收敛量分别达到95.8%, 98.4%。

(2) α_z 随 v 增大而增大, v 值的变化对附加应力的影响是明显的。

(3) 竖向应力在荷载作用面中部位置变化缓慢, 而在作用面边缘变化较快。随着深度增加, 中部位置和边缘处的 α_z 收敛并逐渐趋于一致。

本文系统的给出了方桩侧面和端面矩形荷载作用下的附加应力解 α_z , 便于在分析方桩与地基共同作用时采用。

致谢: 本文是在贝尔法斯特女王大学访学期间完成, 在此对国家留学基金委的资助和贝尔法斯特女王大学提供的便利条件表示衷心的感谢。

参考文献:

- [1] Geddes J D. Stresses in foundation soils due to vertical subsurface loading[J]. *Géotechnique*, 1966, **16**(3): 231 - 255.
- [2] MINDLIN R D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid[J]. *Journal of Applied Physics*, 1936, **7**(5): 195 - 202.
- [3] GEDDES J. Stresses in foundation soils due to vertical subsurface loading[J]. *Géotechnique*, 1966, **16**(3): 231 - 255.
- [4] 袁聚云, 赵锡宏. 竖向均布荷载作用在地基内部时的土中应力公式[J]. 上海力学, 1995, **16**(3): 213 - 222. (YUAN Ju-yun, ZHAO Xi-hong. Formulas for the calculations of stresses in soil subjecting to distributed loading beneath the surface of the ground[J]. *Shanghai Journal of Mechanics*, 1995, **16**(3): 213 - 222. (in Chinese))
- [5] 袁聚云, 赵锡宏. 竖向线荷载和条形均布荷载作用在地基内部时的土中应力公式[J]. 力学季刊, 1999, **20**(2): 156 - 165. (YUAN Ju-yun, ZHAO Xi-hong. Formulus for calculating stresses in soil subjecting to vertical line load and strip distributed load beneath the surface of ground[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 1999, **20**(2): 156 - 165. (in Chinese))
- [6] 王士杰, 张梅, 白永兵, 等. 矩形面积均布荷载下的明氏应力公式[J]. 河北农业大学学报, 2001, **24**(1): 68 - 72. (WANG Shi-jie, ZHANG Mei, BAI Yong-bing, et al. The Mindlin's stress formula under the rectangular area with uniform distributed loading[J]. *Journal of Agricultural University of Hebei*, 2001, **24**(1): 68 - 72. (in Chinese))
- [7] 王洪新. 半无限弹性体内作用竖向矩形和条形均布荷载时的应力计算公式[J]. 岩土力学, 2016, **37**(1): 113 - 118. (WANG Hong-xin. Equations for calculating stresses in a semi-infinite elastic solid subjecting to a vertical rectangular and strip uniform load beneath ground surface[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2016, **37**(1): 113 - 118. (in Chinese))
- [8] 邱明兵, 刘金砾, 秋仁东, 等. 基于 Mindlin 解的单桩竖向附加应力系数[J]. 土木工程学报, 2014, **47**(3): 130 - 137. (QIU Ming-bing, LIU Jin-li, QIU Ren-dong, et al. Study on vertical additional stress coefficient for the single piles based on Mindlin's stress solution theory[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2014, **47**(3): 130 - 137. (in Chinese))
- [9] 皇甫明, 王幼青, 王梦恕. 水平力对竖直桩沉降和承载力影响的研究[J]. 岩土工程学报, 2003, **25**(4): 511 - 513. (HUANGFU Ming, WANG You-qing, WANG Meng-shu. Study of effects of lateral loads on the settlement and bearing capacity of pile[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2003, **25**(4): 511 - 513. (in Chinese))
- [10] 何春保, 蔡健. 十字交叉梁与地基共同作用的半解析半数值分析方法[J]. 岩土工程学报, 2006, **28**(6): 761 - 766. (HE Chun-bao, CAI Jian. Grillage beams on elastic foundation analyzed by a semi-analytical and semi-numerical method[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2006, **28**(6): 761 - 766. (in Chinese))