

DOI: 10.11779/CJGE201803012

论有效应力原理与有效应力

杜修力, 张佩, 许成顺, 路德春

(北京工业大学城市与工程安全减灾教育部重点实验室, 北京 100124)

摘要: 有效应力原理是土力学区别于一般固体力学的基础, 是土力学的核心基石。Terzaghi 有效应力原理从提出至今就一直饱受争议, 特别是有关 Terzaghi 有效应力的近似性问题是争议的焦点。从有效应力原理的任务出发, 阐明有效应力原理的内涵是土体可量测荷载效应—外荷载间的一般规律。指出有效应力的作用是联接土体强度、变形等可量测荷载效应与外荷载间的纽带, 定义对土体强度特性和变形行为等可量测荷载效应产生直接影响的土体应力为有效应力, 因此, 有效应力不是唯一的, 它们是土体中真实存在应力的名义表述, 可以依据应力平衡原理和流体压力与土颗粒间的相互作用关系给出, 不同的有效应力定义就对应不同的有效应力计算公式, 从而解释了 Terzaghi 有效应力原理近似性的原因。提出了强度相关有效应力和变形相关有效应力 (Terzaghi 有效应力) 的概念, 严格推导了他们的计算表达式, 阐述了强度相关有效应力与土体剪切强度、变形相关有效应力与土体变形的一般关系。进一步, 基于莫尔库仑强度准则, 推导了土体抗剪强度与 Terzaghi 有效应力和孔压的关系。

关键词: 有效应力原理; 有效应力; 强度相关有效应力; 变形相关有效应力; Terzaghi 有效应力

中图分类号: TU431

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2018)03-0486-09

作者简介: 杜修力(1962-), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事岩土工程方面的研究与教学工作。E-mail: duxiuli@bjut.edu.cn。

On principle of effective stress and effective stress

DU Xiu-li, ZHANG Pei, XU Cheng-shun, LU De-chun

(Key Lab of Urban Security and Disaster Engineering, Ministry of Education, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: The principle of effective stress is the key stone of soil mechanics, which becomes the fundamental difference between soil mechanics and solid mechanics. As it is put forward, the principle of effective stress is always in the debate, and the discussion focus is its approximation. From the analysis of the assignment of the principle of effective stress, the connotation of the principle of effective stress is illustrated as the general rule between the measurable effects and external loads. The effective stress establishes a connecting bond on the external loads and the measurable effects such as strength or deformation, which is defined as the stress that can influence the measurable effects such as strength or deformation directly. Therefore, the effective stress is not unique, which is the nominal term of real stress and can be given according to the equilibrium of forces and the interaction of soil particles. The different formulas correspond to different definitions of the effective stress, which explains the approximation of Terzaghi principle of effective stress. Then, the physical meanings of the effective stress related to the strength and the deformation are given respectively, indicating the general law of effective stress-strength or effective stress-deformation. Based on the Mohr-Coulomb strength theory, the relationship between the effective stress related to strength and the shear strength is established.

Key words: principle of effective stress; effective stress; effective stress related to strength; effective stress related to deformation; Terzaghi effective stress

0 引言

Terzaghi^[1]基于工程实践经验提出了饱和土有效应力原理, 并在第一届国际土力学和基础工程大会上^[2]对有效应力原理做了清晰的阐述:

“The stress in any point of a section through a mass of soil can be computed from the *total principal*

stresses, σ_1 , σ_2 , σ_3 , which act in this point. If the voids of the soil are filled with water under a stress u , the total principal stresses consist of two parts. One

基金项目: 国家自然科学基金创新研究群体项目 (51421005); 长江学者和创新团队发展计划项目 (IRT13044); 国家自然科学基金面上项目 (51578026)

收稿日期: 2016-06-27

part, u , acts in the water and in the solid in every direction with equal intensity. It is called the neutral stress (or the pore water pressure). The balance $\sigma'_1 = \sigma_1 - u$, $\sigma'_2 = \sigma_2 - u$, and $\sigma'_3 = \sigma_3 - u$ represents an excess over the neutral stress u , and it has its seat exclusively in the solid phase of the soil.”

“The fraction of the total principal stresses will be called the effective principal stresses.....A change in the neutral stress u produces practically no volume change and has practically no influence on the stress conditions for failure...Porous materials (such as sand, clay, and concrete) react to a change of u as if they were incompressible and as if their internal friction were equal to zero. All the measurable effects of a change of stress, such as compression, distortion and a change of shearing resistance are exclusively due to changes in the effective stresses σ'_1 , σ'_2 and σ'_3 . Hence every investigation of the stability of a saturated body of soil requires the knowledge of both the total and the neutral stresses.”

依据他的阐述, Terzaghi 有效应力原理实际上包含 3 个方面的内容, 一是明确地给出了有效应力的定义, 二是给出了有效应力的计算方法, 三是说明了引入有效应力概念的意义和作用。

Terzaghi 有效应力原理的提出, 阐明了由土骨架、孔隙水组成的松散颗粒集合体(土体)材料与连续固体材料在力学性质上的区别, 并在连续介质力学框架中建立了分析土体力学性质的方法, 使得土力学区别于一般固体力学而成为了一门独立的学科。Mitchell 在《Fundamentals of soil behaviour》一书中指出 Terzaghi 有效应力原理是现代土力学的拱心石^[3] (the keystone of modern soil mechanics), 是经典土力学中固结理论、抗剪强度理论、渗流理论的基础, 高度概括了有效应力原理在土力学中的核心地位。

自从 Terzaghi 有效应力原理提出后, 在国际上就一直受到争议^[4-27], 核心问题是有效应力是否为真实应力(本征应力)和其计算公式的近似性。众多研究者从有效应力物理含义的不同理解出发, 得到了大量不同的有效应力计算表达式 $\sigma' = \sigma - \eta p$, 式中 σ 为总应力, p 为孔压, η 为修正系数, 见表 1 所示。而大多数土力学研究者毫不怀疑 Terzaghi 有效应力计算公式的正确性, 认为提出质疑者是不了解由松散颗粒集合体组成的土体介质与其它固体介质性质上的差异性。但另一方面, 在推导 Terzaghi 有效应力计算公式时, 土力学与岩土工程学者们仍然绕不开假定条件的引入, 使得 Terzaghi 有效应力计算公式事实上成为了近似, 从而使问题的争论变得更加复杂。近期, 也有

一些土力学研究者从试验的角度发现饱和土体的强度会受到高孔隙水压力或反压的影响^[27-34], 这实际上又从另一个角度质疑了 Terzaghi 有效应力原理的准确性。鉴于有效应力原理在土力学中特殊的重要地位, 笔者认为有必要厘清这一问题, 从而使土力学的基石变得更为稳固, 也可以籍此揭示和解释一些新问题。

表 1 参数 η 的取值

Table 1 Values of parameter η	
η	研究者
1	Terzaghi ^[1-2]
	Skempton ^[4]
	Oka ^[5]
	Li ^[6-7]
	Shao ^[8]
	Lu et al ^[9]
n n 为孔隙比	Hoffman ^[10]
	Fillunger ^[11]
	Lubinski ^[12]
	Biot ^[13]
$n \leq \eta \leq 1$	Schiffman ^[14]
$1 - a'_c$ a'_c 为接触面积系数	Skempton and Bishop ^[15]
	Bishop ^[16]
	Skempton ^[4]
	Cao ^[17]
	Biot ^[18]
$1 - C_s/C$ or $1 - K/K_s$ C_s 为土颗粒的压缩系数 C 为土骨架的压缩系数	Gassmann ^[19]
	Biot and Willis ^[20]
	Skempton ^[4]
	Lade and De Boer ^[22]
	Chen ^[23]
	Ronaldo ^[24]
	Bishop ^[21]
	Zhang ^[25]
$1 - a'_c \tan \psi / \tan \phi'$	Skempton ^[4]
$1 - (1 - n)C_s/C$	Suklje ^[26]
	Lade and De Boer ^[22]
$\frac{C_b - C_s + n(C - C_s)}{C_b - C_s}$	Oka ^[5]

1 有效应力及有效应力原理

为厘清这一问题, 笔者认为还是应该回到 Terzaghi 对有效应力原理的原始阐述上来。首先必须搞清楚的问题是 Terzaghi 提出有效应力原理的目的是什么? 实际上, 这一问题在他本人对有效应力原理的作用叙述上已做了十分清晰的表述, 那就是有效应力是荷载作用下影响土体可量测荷载效应的独立变量。也就是说, 有效应力是联接土体强度、变形等可量测荷载效应与外荷载间的纽带或“桥梁”。

对于理想的单相连续固体介质, 固体介质中的本征应力(真实应力), 也即是名义应力或总应力, 固体介质的强度、变形与外荷载间的关系较为直观, 用固体介质中的应力表述即可。对于多孔固体介质, 特别是充满气-液混合体的多孔固体介质, 由于介质中存在

固相、气相、液相等多相介质应力,且存在复杂的各相介质间的相互作用,各相介质中的本征应力一般并不等于其名义应力,总应力也不简单是各相名义或本征应力之和。特别是对于多孔固体介质是非连续的颗粒集合体情况,由于颗粒体接触界面的存在,问题就变得更为复杂,其单位截面面积上的接触应力与颗粒介质中的应力也不相同。对于这种充满气-液混合体的颗粒集合型多孔固体介质,由于多种应力和颗粒间接触应力以及相互间耦合关系的存在,固体骨架的强度、变形与外荷载间的关系到底应该通过什么样的应力来建立就变得复杂多了。

Terzaghi 有效应力原理的提出正是考虑到了这一复杂性,注意到土体强度、变形不能简单用土体总应力来表述,也即是土体的强度、变形和外荷载间的关系应该用与土体强度、变形直接关联的应力来表述,为此,他提出了有效应力的计算表达式。认为定义的有效应力就是与土体强度、变形均直接关联的。遗憾的是, Terzaghi 忽视了土体的强度和变形等荷载效应与外荷载间的“桥梁”一般情况下应该是不同的(颗粒间为“点”接触的特殊情况除外),他简单地用了同样的一座“桥梁”来沟通强度与外荷载间、变形与外荷载间的关系,实际上是认为影响土体强度特性和变形行为等可量测荷载效应的应力是唯一的。正如 Santamarina^[35]指出“the impact of skeletal forces by external forces, particle-level forces, and contact-level forces on soil behavior is different, and mixing both types of forces in a single algebraic expression in terms of effective stress can lead to incorrect prediction”。因此,针对不同的荷载效应,由于其相关“应力”一般是不同的,也即应采用不同的有效应力来进行描述和分析,而不是一座普适的“桥梁”。

众所周知,按一般固体力学概念,材料的强度取决于作用在其剪切破坏面上的法向力,复杂受力情况下,它还受到中主应力^[36-38]和静水压力^[39-41]的影响,前者体现了应力诱导各向异性特征并与剪切破坏面的定义关联,后者反映了材料特性的差异并可由法向应力表述,这两种应力实际上都不是独立的。因此,问题实质就归结为如何确定剪切破坏曲面和相应的法向应力了,这与外荷载的作用方式和大小直接关联。如何确定剪切破坏面的问题实际上也是一个非常复杂的问题,目前一般有理论假定和经验判断两种方法,本文将不讨论这一问题。当然,材料的强度还与材料黏聚、摩擦特性等物性参数以及温度、湿度等环境条件引起的材料物理化学特性相关,这些也不是本文要讨论的内容。对于无流体压力作用的干燥性土体,虽然它们是散体材料的集合体,但本质上仍然是固体材料,

因此,它们的强度特性应该服从于一般固体材料的强度理论,也即它们的破坏形式本质上仍为剪切破坏。对于有流体压力存在的气-液混合土体,由于流体不能承受剪力,所以,土体的剪切强度仍然就只与作用在土体剪切破坏面上的法向应力相关,按照破坏路径的最小能量耗散原理,外荷载下形成的剪切破坏曲面通常将选择土颗粒间的接触曲面,也就是说这个面上的土颗粒间的法向接触力的合力就是与土体强度关联的自变量了。这就意味着,土体剪切破坏面上土颗粒间的法向接触力是建立土体剪切强度与外荷载间的那座“桥梁”,这也就是几乎所有的土力学教材中推导有效应力表达式的基础。另一方面,虽然流体压力不直接对土体的剪切强度产生作用,但由于土体中流体压力的存在改变了土颗粒间的接触力,这间接地也对土体的剪切强度产生了影响,这就是土力学强度理论与一般固体力学强度理论的差异所在。

土体变形通常是指其中的固体介质变形,也即是土骨架介质的变形。与无流体压力的干燥性土体相比,不同的是,同样的外荷载作用下,流体压力的存在会改变作用在土体中土骨架上的外荷载,从而使得两者的变形不同。孔隙流体压力作用对土体变形的影响有3种效应:一是它直接分担了部分外荷载,减少了土骨架本身所承担的外荷载,会间接影响土体变形;二是孔隙流体与土骨架的相互作用会改变土颗粒间的接触力,起到调整土骨架实际承担外荷载的作用,从而对土骨架产生类似于一种附加外荷载的影响,导致对土体变形产生影响,这实际上也是一种对土体变形产生的间接效应。第三种是流体压力作用在可压缩土颗粒上产生的变形。第一种间接效应影响部分比较直观较易分离,但第二种间接效应影响部分比较复杂,它涉及到固体骨架与流体压力间的相互作用,这也是研究者和工程技术人员一直没有很好理解这一问题的原因。由于土颗粒的变形相对于土骨架的变形小得多,因此土力学中常将土颗粒视为不可压缩,从而忽略了第三种变形,为简单起见,本文后面的讨论中采纳了这一观点。由上面的叙述还可见,无孔隙流体压力存在时,土骨架本身承担的那部分外荷载直接决定了土体的变形,而由于流体压力存在分担的部分外荷载和改变土颗粒接触力产生的附加外荷载作用效应是土体变形的间接影响因素,也就是说当能够将对土体变形产生直接影响的应力从土体所承担的总外荷载中分离出来时,它就是建立土体变形与外荷载间的那座“桥梁”。对土体变形间接产生影响的那两种因素则可依据混合体平衡和流体连续性条件来确定。因此,对于有孔隙流体压力存在的土体变形与外荷载的关系仍然应该由无流体压力存在时土骨架承担的外荷载来表述

的。本文后面的推导可以看到, 无流体压力存在时土体截面单位面积内土骨架承担的外荷载等于孔隙流体压力存在时的土体截面单位面积所承担的总外荷载与同面积孔隙流体压力之差。这与 Terzaghi 有效应力计算公式给出的值完全相同, 它与土体截面单位面积内土颗粒间的法向接触力的区别在于后者考虑了孔隙流体压力的影响, 当假定土颗粒间为“点”接触时, 这种影响理论上就不存在了。有关 Terzaghi 有效应力计算公式值的含义在邵龙潭^[8]、路德春等^[9]的文章中也有讨论, 结论与本文分析完全一致。本文这里明确指出 Terzaghi 有效应力计算公式定义的有效应力是仅与土体变形关联的。

如上所述, 无论是土颗粒间的法向接触力或是土骨架上承担的外荷载都是真实存在的力, 由于相应的应力表述都是采用的土体的单位面积截面, 因此, 它们事实上都是名义应力, 而非本征应力, 有关这一问题的争议应该是可以明晰了。

对于 Terzaghi 有效应力计算公式的近似性问题, 笔者的理解是: ①按照 Terzaghi 定义的有效应力, 它是土体的单位面积截面上土骨架所传递的外荷载, 将其应用与变形问题讨论时, 它是精确的, 这就是大多数土力学工作者坚持 Terzaghi 有效应力不用修正的原因所在; ②与土体强度相关联的有效应力是单位面积截面上的剪切破坏面上的土颗粒间的法向接触力, 除假定土颗粒为“点”接触时的特殊情况外, 由此有效应力定义出发推导获得的 Terzaghi 有效应力就必然是一个近似的结果。

事实上, 这两种有效应力的定义本身就不是一回事, 硬把这两个有联系又有区别的定義說成是一个东西, 在理论上就是有错误的, 这才导致学术界出现了持续至今的争论。其根源在于 Terzaghi 有效应力原理忽视了土体的强度、变形等荷载效应与外荷载间的“桥梁”应该是不同的, 他简单地用一个有效应力来表述多个关系, 而这多个关系的内涵和表达式都是不同的。

基于上述分析, 本文总结:

(1) 影响土体强度特性的应力是土体剪切破坏面上土颗粒间的法向接触应力, 影响土体变形行为的土体应力是与土骨架承担的外荷载对应的应力。这两种应力物理概念上是完全不同的, 一般情况下, 它们也是不相等的。从建立土体强度-外荷载、变形-外荷载间关系的目的而言, 它们的作用效果是同样的, 因此, 都应称为有效应力。本文定义对土体强度特性和变形行为等可量测荷载效应产生直接影响的土体应力为有效应力。由于影响土体强度特性和变形行为等可量测荷载效应的土体应力是不同的, 因此, 有效应力不是

唯一的。

(2) 有效应力原理是指, 土体可量测荷载效应(如: 强度、变形等)-外荷载间的一般规律。由于这种一般规律是通过有效应力作为自变量来确定的, 因此, 它被称之为有效应力原理。值得指出的是, 有效应力原理只是建立土体可量测荷载效应-外荷载间的一般规律, 而不是建立具体的关系, 具体关系的建立还得考虑材料的物性参数和受荷、温度、湿度等环境条件引起的材料物理化学特性变化以及混合体平衡、连续和各相间的相互作用等。

综上, 有效应力不是唯一的, 它们是土体中真实存在应力的名义表述, 可以依据应力平衡原理和流体压力与土颗粒间的相互作用关系给出, 不同的有效应力定义就对应不同的有效应力计算公式。下面按照这一观点, 笔者严格推导了强度相关和变形相关两种有效应力的计算公式, 并分别给出了它们与强度和变形的关联方式。

2 流体孔压对土颗粒接触力影响分析

为方便推导出土体的强度相关和变形相关两种有效应力的计算公式, 这里先讨论土体孔隙中流体孔压对土颗粒间接触力的影响问题。

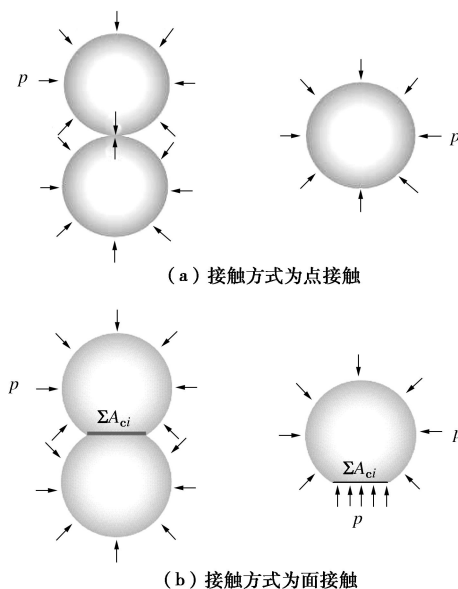


图1 孔隙流体作用下接触面上应力分析

Fig. 1 Contact force analysis with applied pore fluid pressure

土体是由土骨架、孔隙水及孔隙气组成的松散集合体, 孔隙水和孔隙气形成混合流体(下面均简称为流体)并充填于土骨架的孔隙中。在外荷载作用时, 土体骨架与流体共同承担外荷载, 并且存在相互作用。流体对土骨架的作用体现为作用在土骨架上的孔压,

它不仅影响了土颗粒中的介质应力,而且一般情况下会通过影响颗粒间的接触力改变其接触状态。孔隙流体作用对土颗粒接触力的影响,因土颗粒接触方式的不同而产生差异。

图 1 为在孔隙流体作用下,土体中的颗粒在不同接触方式时的简化分析模型。当土颗粒间的接触方式为点接触时,如图 1(a)所示,流体压力 p 均匀地作用在土骨架中每个土颗粒的外表面。对于整个土骨架和每个土颗粒,流体压力都是一组自相平衡的应力。此时,流体压力的存在不影响土颗粒间的接触力,土单元的任一截面中土颗粒间的接触力 $\sum P_{vi}$ 也就是土体骨架承担的外荷载 F_{sk} ,

$$\sum P_{vi} = F_{sk} \quad (1)$$

当土颗粒间的接触方式为面接触时,如图 1(b)所示,对于土体中的任一颗粒,孔隙流体压力均匀地作用在非接触面上,此时,由于接触面的存在,流体压力作用对土颗粒而言将产生一种不平衡力系,为保持体系平衡,土颗粒间的接触力就必然会做相应的调整,土颗粒间的接触力将增加为

$$\sum P_{vi} = F_{sk} + \sum A_{ci}p = F_{sk} + \alpha_c(A - A_m)p \quad (2)$$

式中,如图 2 所示, A 为土体中任一截面 $a-a$ 的面积, A_m 为流体的截面积, $\sum A_{ci}$ 为土颗粒间接触面积之和在 $a-a$ 截面方向的分量, $\alpha_c = \sum A_{ci} / (A - A_m)$ 为土颗粒接触面积比。此时,土颗粒间的接触荷载 $\sum P_{vi}$ 是无孔隙流体存在时土骨架承担的外荷载 F_{sk} 与孔隙流体压力存在增加的颗粒间接触力 $\sum A_{ci}p$ 之和。

3 强度相关有效应力及其计算表达式

强度相关的有效应力 σ'_i 为单位面积土体剪切破坏面在投影截面上对应的土颗粒间的法向接触力,它是土体中剪切破坏面上土颗粒间实际接触力的一种名义表述形式。

如图 2 所示,截面 $a-a$ 为土体中的任一截面,通过土颗粒及气液混合流体。截面 $a-a$ 面积为 A ,其中土颗粒的截面积为 A_s ,流体的截面积为 A_m ,即 $A = A_s + A_m$ 。截面 $x-x$ (剪切破坏面)为截面 $a-a$ 上的土颗粒与上层颗粒或下层颗粒的接触点或接触面构成的曲面。

土体孔隙中的流体压力为 p ,为各向等值应力。截面 $a-a$ 上的荷载包括两部分:

- (1) 流体承担的荷载 $A_m p$;
- (2) 土颗粒承担的荷载 $\sum P_{svi}$ 。

如图 3 所示,第 i 个土颗粒承担的荷载为 P_{svi} ,它是由截面 $x-x$ 中接触点或接触面处的接触荷载在法

向的分量 P_{vi} 和作用在土颗粒表面的流体压力 p 共同形成的。

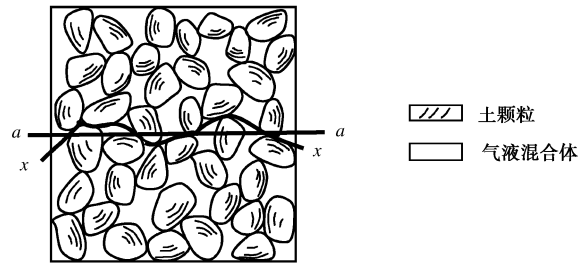


图 2 土体示意图

Fig. 2 Schematic diagram of saturated soils

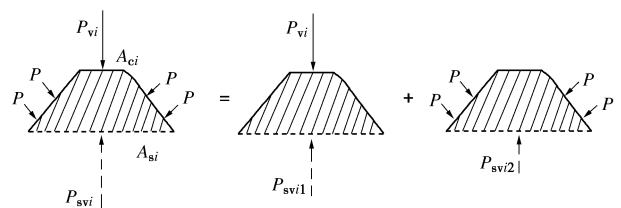


图 3 截面 $a-a$ 中第 i 个土颗粒所承担的荷载

Fig. 3 Load bearing by i th soil particle in section $a-a$

从颗粒间的接触荷载角度入手,得到截面 $a-a$ 法线方向上力的平衡方程为

$$\begin{aligned} \sigma A &= \sum P_{svi} + A_m p \\ &= \sum P_{svi1} + \sum P_{svi2} + A_m p \\ &= \sum P_{vi} + (A - A_m) \left(1 - \frac{\sum A_{ci}}{A - A_m} \right) p + A_m p \\ &= \sum P_{vi} + (A - A_m)(1 - \alpha_c)p + A_m p \\ &= \sum P_{vi} + Ap + \alpha_c(A_m - A)p \quad (3) \end{aligned}$$

式中, $\sum P_{vi}$ 为土颗粒间接触荷载之和在 $a-a$ 法向的分量, $\sum P_{svi1}$ 为在截面 $a-a$ 上,由 $\sum P_{vi}$ 引起的作用在土颗粒中的荷载, $\sum P_{svi2}$ 为在截面 $a-a$ 上,由流体引起的作用在土颗粒中的荷载。

将式 (3) 两边同时除以 A , 得

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sum P_{vi}}{A} + p + p\alpha_c \left(\frac{A_m}{A} - 1 \right) \\ &= \sigma'_i + p + \alpha_c(n-1)p \quad (4) \end{aligned}$$

由式 (4) 和强度相关有效应力的定义可知, $\sum P_{vi}/A$ 就是强度相关有效应力 σ'_i 。式 (4) 中, $n = A_m/A$, 为土体的孔隙率; $\alpha_c = \alpha'_c/(1-n)$, α'_c 为土力学教材中定义的颗粒接触面积系数。将式 (4) 进行变化, 可得到如下形式:

$$\sigma'_i = \sigma - p + \alpha_c(1-n)p \quad (5)$$

式(5)即为与强度相关的有效应力的计算表达式。它不仅与外荷载相关, 而且与土体的孔隙率和颗粒接触面积比相关。当土颗粒间的接触方式假定为点接触时, 由式(5)可知, 它就是 Terzaghi 给出的有效应力表达式。

强度相关的有效应力 σ'_1 是由土骨架承担的外荷载和流体压力共同决定的, 体现出外荷载和流固耦合作用对土体的综合影响。用强度相关的有效应力 σ'_1 替代连续介质力学中的应力, 就可以采用与单相连续介质力学理论相同的方式, 建立适用于流体饱和土强度的关系, 其一般关系可以表示为

$$\tau_f = f(\sigma'_1) \quad (6)$$

式(6)是强度与有效应力或外荷载间的一般关系。若采用莫尔-库仑理论来描述土体的剪切强度, 于是有

$$\tau_f = c' + \sigma'_1 \tan \varphi' \quad (7)$$

式中, τ_f 为抗剪强度, c' 和 φ' 为土的有效应力强度指标。将式(5)带入式(7), 得

$$\tau_f = c' + [\sigma - p + p\alpha_c(1-n)]\tan \varphi' \quad (8)$$

将式(8)进行展开, 得到如下形式:

$$\tau_f = c' + (\sigma - p)\tan \varphi' + p\alpha_c(1-n)\tan \varphi' \quad (9)$$

令 $\tan \beta' = \alpha_c(1-n)\tan \varphi'$, 它反映了孔隙流体压力对土体抗剪强度的影响程度。式(9)可进一步表示为

$$\tau_f = c' + (\sigma - p)\tan \varphi' + p\tan \beta' \quad (10)$$

从式(8)~(10)可以看出, 对于饱和土体, 在常见的工程应力条件下, 孔隙水压力一般不大, 且参数 $\alpha_c(1-n)\tan \varphi'$ 也很小, 因而, $p\tan \beta'$ 可略去不计。即在通常的工程状态孔隙水压力情况下, 可以不考虑孔隙水压力对土体强度的影响。但是, 对于处于高孔隙水压力作用下的土体(如深海条件下的土体), 土体的抗剪强度将会受到明显的影响, 且孔隙水压力越大, 影响程度越大。由式(10)可知, 当 Terzaghi 有效应力为零时, 土体仍然是有一定强度, 只有 τ_f 为零时, 土体液化才会产生。此外, 即使 p 的绝对值不是很大, 但当 $(\sigma - p)\tan \varphi'$ 与 $p\tan \beta'$ 接近时, 孔压大小对土体剪切强度的影响也是难以忽视的。

4 变形相关有效应力及其计算表达式

变形相关的有效应力 σ'_{11} , 其物理含义为单位面积截面土体中土颗粒骨架直接承担的那部分外荷载, 也即是要在土体承担的总外荷载中扣除流体直接和间接承担的外荷载部分。土体的变形包含土骨架的变形和土颗粒的变形两部分。忽略流体压强作用引起的土颗粒本身的体积变化, 仅考虑土骨架的变形, 下面将介绍变形相关有效应力与土体变形的关系, 在此前先讨

论它的计算方法。由式(3)、(2)得

$$\begin{aligned} \sigma A &= \sum P_{svi} + A_m p \\ &= \sum P_{svi1} + \sum P_{svi2} + A_m p \\ &= \sum P_{vi} + (A - A_m) \left(1 - \frac{\sum A_{ci}}{A - A_m} \right) p + A_m p \\ &= F_{sk} + \sum A_{ci} p + (A - A_m) \left(1 - \frac{\sum A_{ci}}{A - A_m} \right) p + A_m p \\ &= F_{sk} + A p \quad (11) \end{aligned}$$

将式(11)两边同时除以 A , 得

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{F_{sk}}{A} + p \\ &= \sigma'_{11} + p \quad (12) \end{aligned}$$

则 F_{sk}/A 就是变形相关有效应力 σ'_{11} 。将式(12)进行变换, 得到如下形式:

$$\sigma'_{11} = \sigma - p \quad (13)$$

式(13)也是 Terzaghi 给出的有效应力计算表达式, 其实质就是土骨架承担的剔除孔隙流体压力影响的那部分外荷载。

为了说明式(13)定义的有效应力是变形与外荷载间的桥梁作用, 在土体中取以微元体, 如图4示, 其在三维条件下的平衡方程表达式为

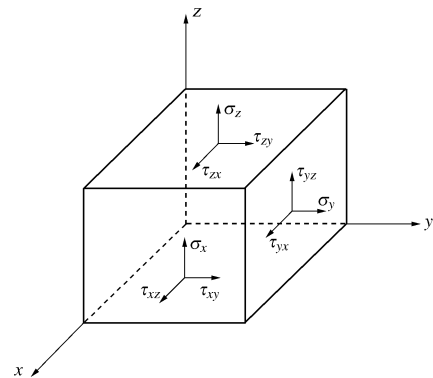


图4 土体中的任一微元体

Fig. 4 A tiny body of soil

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (16)$$

对于饱和流体土体, 包括土骨架系统和孔隙水, 土体骨架能同时承担剪应力和正应力, 孔隙水只能承担各向同性的正应力, 不承受剪应力, 根据与变形相关有效应力计算表达式, 可得

$$\sigma_x = \sigma'_{11x} + p \quad (17)$$

$$\sigma_y = \sigma'_{ly} + p, \quad (18)$$

$$\sigma_z = \sigma'_{lz} + p. \quad (19)$$

将式 (17) ~ (19) 分别带入式 (14) ~ (16), 则土体的平衡方程可转化为

$$\frac{\partial \sigma'_{lx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{ly}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{lz}}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (22)$$

小变形条件下, 反映土体形变和位移的几何方程为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (23)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (24)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (25)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (26)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (27)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (28)$$

式中, u, v, w 为 x, y, z 方向土体位移。

线性情况下可假设土体骨架变形服从胡克定律, 则土体应力应变关系为

$$\sigma'_{lx} = 2G \left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_v \right), \quad (29)$$

$$\sigma'_{ly} = 2G \left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_v \right), \quad (30)$$

$$\sigma'_{lz} = 2G \left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_v \right), \quad (31)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \tau_{yx}, \quad (32)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = \tau_{zy}, \quad (33)$$

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = \tau_{xz}. \quad (34)$$

式中 $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, G 为剪切变形模量, ν 为土体的泊松比。

将式 (23) ~ (28) 代入式 (29) ~ (34) 后, 再代入式 (20) ~ (22) 可得到土体位移的控制方程为

$$\left(\frac{G}{1-2\nu} \right) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + G \nabla^2 u - \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (35)$$

$$\left(\frac{G}{1-2\nu} \right) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + G \nabla^2 v - \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (36)$$

$$\left(\frac{G}{1-2\nu} \right) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} + G \nabla^2 w - \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (37)$$

式中, ∇^2 为拉普拉斯算子, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$,

孔隙流体压力一般可由如下的流体连续性方程表述:

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \frac{k_x}{\gamma_w} \frac{\partial p}{\partial x^2} + \frac{k_y}{\gamma_w} \frac{\partial p}{\partial y^2} + \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial p}{\partial z^2} = 0, \quad (38)$$

式中, k_x, k_y, k_z 为 x, y, z 方向的渗透系数, γ_w 为水的重度, t 为时间。

由式 (35) ~ (37) 再结合具体的初值条件和边界条件即可获得土体的变形。

考察土体变形求解推导的整个过程, 可以看到式 (13) 定义的有效应力是连接土体变形和外荷载的唯一桥梁。除初-边值和外荷载条件外, 土体变形不仅与土体骨架的变形模量参数相关, 而且与流体连续方程中的各物理参数相关, 也即反映了孔隙流体与土体骨架的相互作用。换句话讲, 土体骨架变形除取决于初-边值、外荷载条件和本身的变形特性外, 孔隙流体压力与土体骨架的相互作用也是土体骨架变形的一个影响因素。通常情况下, 土颗粒的体积变形相对于土体整体变形是非常小的, 可以忽略不计, 所以可认为土颗粒是不可压缩的, 土体的变形完全是由孔隙的改变引起的。当要考虑土颗粒本身的变形时, 问题将变得复杂化。

5 结 论

本文分析了有关 Terzaghi 有效应力原理争议的原因, 从有效应力的作用和有效应力原理的任务出发开展了相关讨论, 明晰了有效应力定义和有效应力原理的内涵。进一步, 基于流固耦合作用分析, 分析了孔隙流体压力对土颗粒接触力的影响机理, 主要结论如下:

(1) 分析了 Terzaghi 有效应力近似性的原因, 指出建立土体不同的可量测效应 (如强度、变形等) - 外荷载的关系时应采用不同的有效应力。

(2) 明确了有效应力定义, 指出有效应力不是唯一的。阐述了有效应力原理是指, 用有效应力的方式来表述土体可量测效应 (如强度、变形等) - 外荷载间的一般规律。

(3) 基于土体剪切破坏曲面对应的平截面上的法向应力和莫尔-库仑强度准则推导出流体饱和土强度准则为 $\tau_f = c' + (\sigma - p) \tan \phi' + p \tan \beta'$ 。

(4) 从土体变形求解过程出发, 阐述了土体中任一平截面单位面积土骨架所承担的外荷载 (变形相关有效应力 $\sigma'_n = \sigma - p$) 与变形的一般关系。

(5)土体剪切破坏曲面对应的平截面上的法向应力和变形相关有效应力物理含义不同, 其计算表达式也因土颗粒间接触方式不同而有所差异。当土颗粒间为点接触时, $\sigma'_I = \sigma'_{II}$ 。当土颗粒间为面接触时, $\sigma'_I \neq \sigma'_{II}$ 。

参考文献:

- [1] TERZAGHI K. Die berechnung der durchlässigkeitsziffer des tones aus dem verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen[J]. Sitzungber Akad Wiss Wien, 1923, **132**: 125 - 138.
- [2] TERZAGHI K. The shearing resistance of saturated soils and the angle between the planes of shear[C]// Proceedings of the 1st International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. New York, 1936, **1**: 54 - 56.
- [3] MITCHELL J K, SOGA K. Fundamentals of soil behavior[M]. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, 2005.
- [4] SKEMPTON A W. Effective stress in soils, concrete and rock[C]// Conference on Pore Pressure and Suction in Soils. Butterworths, 1960.
- [5] OKA F. Validity and limits of the effective stress concept in geomechanics[J]. Mechanics of Cohesive-Frictional Materials, 1996(1): 219 - 234.
- [6] 李广信. 有效应力原理能够推翻吗[J]. 岩土工程界, 2007, **10**(7): 22 - 26. (LI Guang-xin. Can the principle of effective stress be overthrown[J]. Geotechnical Engineering World, 2007, **10**(7): 22 - 26. (in Chinese))
- [7] 李广信. 关于有效应力原理的几个问题[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(2): 315 - 320. (LI Guang-xin. Some problems about the principle of effective stress[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(2): 315 - 320. (in Chinese))
- [8] 邵龙潭. 饱和土的骨架应力方程[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(12): 1833 - 1837. (SHAO Long-tan. Skeleton stress equation for saturated soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(12): 1833 - 1837. (in Chinese))
- [9] 路德春, 杜修力, 许成顺. 有效应力原理解析[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**: 146 - 151. (LU De-chun, DU Xiu-li, XU Cheng-shun. Analytical solutions to principle of effective stress[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**: 146 - 151. (in Chinese))
- [10] HOFFMAN O. Permeazoni d'Acqua e loro Effetnei Muri di Ritenuta, Hoepli, Milan, 1929. (HOFFMAN O. Seepage water and its influence on walls[M]. Milan, Hoepli, 1929.)
- [11] FILLUNGER P. Auftrieb und Unterdruck in Staumauern[C]// Gesamtbericht, Zweite Weltkraftkonferenz. Berlin, 1930: 323 - 329. (FILLUNGER P. Bouncy and negative pressure in reservoir dam[C]// Proceedings of the 2nd Conference on Transportation and World Power. Berlin, 1930: 323 - 329.)
- [12] LUBINSKI A. The theory of elasticity for porous bodies displaying a strong pore structure[C]// Proceedings of the 2nd US National Congress on Applied Mechanics. Michigan, 1954: 247 - 256.
- [13] BIOT M A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid[J]. Journal of Applied Physics, 1955, **26**(2): 182 - 185.
- [14] SCHIFFMAN R L. The stress components of a porous medium[J]. Journal of Geophysical Research, 1970, **75**(20): 4035 - 4038.
- [15] SKEMPTON A W, Bishop A W. Soils in building materials, their elasticity and inelasticity[M]. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1954: 417 - 482.
- [16] BHISHOP A W. The principle of effective stress[J]. Norwegian Geotechnical Institute, 1960, **32**: 1 - 5..
- [17] 曹宇春. 考虑骨架压缩效应的饱和土有效应力原理[J]. 施工技术, 2013, **42**(6): 7 - 11. (CAO Yu-chun. Effective stress principle of saturated soils in terms of skeleton compressibility[J]. Construction Technology, 2013, **42**(6): 7 - 11. (in Chinese))
- [18] BIOT M A. General theory of three-dimensional consolidation[J]. Journal of Applied Physics, 1941, **12**(2): 155 - 164.
- [19] GASSMANN F. UÈ ber die Elastizität poroËser Medien, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in ZuÈrich, 1951, **96**: 1 - 23. (GASSMANN F. About the elasticity of porous media[J]. Quarterly Journal of the Naturforschenden Gesellschaft in Zurich, 1951, **96**: 1 - 23. (in German))
- [20] BIOT M A, WILLIS D G. The elastic coefficients of the theory of consolidation[J]. Journal of Applied Mechanics, 1957, **24**(2): 594 - 601.
- [21] BISHOP A W. The influence of an undrained change in stress on the pore pressure in porous media of low compressibility[J]. Géotechnique, 1973, **23**(3): 435 - 442.
- [22] LADE P V, DE BOER R. The concept of effective stress for soil, concrete and rock[J]. Géotechnique, 1997, **47**(1): 61 - 78.
- [23] CHEN M, CHEN Z D. Effective stress laws for multi-porosity media[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1999, **11**(20): 1207 - 1213.

- [24] BORJA R I. On the mechanical energy and effective stress in saturated and unsaturated porous continua[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, **43**(6): 1764 – 1786.
- [25] ZHANG Z C, CHENG X H. Effectives stress in saturated soil: a granular solid hydrodynamics approach[J]. *Granular Matter*, 2014, **16**: 761 – 769.
- [26] SUKLJE L. Rheological aspects of soil mechanics[J]. *Hydrotechnical Construction*, 1969, **5**(3): 300 – 301.
- [27] BISHOP A W, SKINNER A E. The influence of high pore-water pressure on the strength of cohesionless soils[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1977, **284**(1318): 91 – 130.
- [28] AL-KARNI A A. Effect of pore water pressure on stress- strain characteristics of dense sand[J]. *Soil and Rock Behavior and Modeling*, 2014, **94**(3): 35 – 41.
- [29] XIA H, HU T. Effects of saturation and back pressure on sand liquefaction[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1991, **9**(117): 1347 – 1362.
- [30] 黄 博, 汪清静, 凌道盛, 等. 饱和砂土三轴试验中反压设置与抗剪强度的研究[J]. *岩土工程学报*, 2012, **34**(7): 1313 – 1319. (HUANG Bo, WANG Qing-jing, LING Dao-sheng et al. Effects of back pressure on shear strength o saturated sand in triaxial tests[J]. *Chineses Journal of Geotechnical Engineering*, 2012, **34**(7): 1313 – 1319. (in Chinese))
- [31] HYODO M, YONEDA J, YOSHIMOT N, et al. Mechanical and dissociation properties of methane hydrate - bearing sand in deep seabed[J]. *Soils and Foundations*, 2013, **53**(2): 299 – 314.
- [32] HYODO M, NAKATA Y, YOSHIMOTO N, et al. Mechanical behavior of methane hydrate-supported sand[C]// *International Symposium on Geotechnical Engineering Ground Improvement and Geosynthetics for Human Security and Environmental Preservation*. Thailand, 2007: 195 – 208.
- [33] MIYAZAKI K, MASUI A, SAKAMOTO Y, et al. Triaxial compression properties of artificial methane-hydrate-bearing sediment[J]. *Journal of Geophysical Research Solid Earth*, 2011, **116**(B6): 309 – 319.
- [34] 许成顺, 耿 琳, 杜修力, 等. 反压对土体强度特性的影响试验研究及其影响机理分析, 2016, **49**(3): 105 – 111. (XU Cheng-shun, GENG Lin, DU Xiu-li et al. Effect of back pressure on shear strength of sand: experimental study and mechanism analysis[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2016, **49**(3): 105 – 111. (in Chinese))
- [35] SANTAMARINA J C. Soil behavior at the microscale particle force[J]. In Germaine J T, Sheahan T C and Whitman R V Edition, *Soil Behavior and Soft Ground Construction*, ASCE Geotechnical Special Publication, 2003(119): 25 – 56.
- [36] 张 敏, 许成顺, 杜修力, 等. 中主应力系数及应力路径对砂土剪切特性影响的真三轴试验研究[J]. *水利学报*: 2015, **46**(9): 1072 – 1079. (ZHANG Min, XU Cheng-shun, DU Xiu-li, et al. True triaxial experimental research on shear behaviors of sand under different intermediate principle stress and different stress path[J]. *Chinese Journal of Hydraulic Engineering*, 2015, **46**(9): 1072 – 1079. (in Chinese))
- [37] 郑永来, 邓树新, 李文岷, 等. 中主应力对散粒体材料强度和变形影响的数值模拟研究[J]. *岩石力学与工程学报*, 2015, **34**(增刊 1): 3389 – 3396. (ZHENG Yong-lai, DENG Shun-xin, LI Wen-xun, et al. Numerical simulation study of influence of intermediate principal stress on strength and deformation of granular materials[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2015, **34**(S1): 3389 – 3396. (in Chinese))
- [38] 迟明杰, 李小军, 周正华, 等. 中主应力对砂土强度影响的细观机制研究[J]. *岩土力学*, 2010, **31**(12): 3751 – 3757. (CHI Ming-jie, LI Xiao-jun, ZHOU Zheng et al. Meso-scale study of effects of intermediate principal stress on strength of sand[J]. *Chinese Journal of Rock and Soil Mechanics*, 2010, **31**(12): 3751 – 3757. (in Chinese))
- [39] 路德春. 基于广义非线性强度理论的土的应力路径本构模型[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2006. (LU De-chun. A constitutive model for soils considering complex stress paths based on the generalized nonlinear strength theory [D]. Beijing: Beihang University, 2006. (in Chinese))
- [40] 路德春, 杜修力. 岩石材料的非线性强度与破坏准则研究[J]. *岩石力学与工程学报*, 2013, **32**(12): 2394 – 2408. (LU De-chun, DU Xiu-li. Research on nonlinear strength and failure criterion of rock material [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2013, **32**(12): 2394 – 2408. (in Chinese))
- [41] 杜修力, 马 超, 路德春. 岩土类材料的静水压力效应[J]. *岩石力学与工程学报*, 2015, **34**(3): 572 – 582. (DU Xiu-li, MA Chao, LU De-chun. Effect of hydrostatic pressure on geomaterials[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2015, **34**(3): 572 – 582. (in Chinese))