

DOI: 10.11779/CJGE201803003

# 考虑土体-结构相互作用的数值极限分析上限法

贾苍琴<sup>1</sup>, 黄齐武<sup>\*1, 2</sup>, 王贵和<sup>1</sup>

(1. 中国地质大学(北京)工程技术学院, 北京 100083; 2. 北京市轨道交通建设管理有限公司, 北京 100068)

**摘要:** 非连续面拓扑优化技术(discontinuity topology optimization, DTO)是考虑涉及土体-结构相互作用的岩土稳定性问题的极限分析数值上限法。稳定性问题的几何范围采用规则的栅格点阵进行离散, 且点阵之间潜在连接线即滑移线或非连续面构造形成允许速度场或破坏模式。诸如土钉、支撑挡墙等结构体与土体建模时同时考虑, 不用区别对待, 而且非连续面可以穿过结构体是本文DTO技术的独特之处。DTO技术可以涵盖平动和指定边界区域结构体的转动。最终优化问题呈线性特征, 并借助线性优化问题的内点法进行求解。刚性块体平动和转动以及刚塑性结构的塑性铰屈服破坏模式均可模拟。以拱桥结构、锚定板桩墙以及内支撑挡墙基坑稳定性问题为例证, 检验程序的有效性。DTO的计算结果以图示的形式清晰且细致地表述了非连续面布局构造的临界破坏模式。

**关键词:** 上限法; 土体-结构相互作用; 平动与转动; 非连续面拓扑优化; 内点法

中图分类号: TU431 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2018)03-0408-10

作者简介: 贾苍琴(1976-), 女, 讲师, 主要从事岩土力学数值分析等方面的教学和科研。E-mail: jiacangqin@cugb.edu.cn。

## Numerical upper bound limit analysis based on topology optimization considering soil-structure interaction

JIA Cang-qin<sup>1</sup>, HUANG Qi-wu<sup>1, 2</sup>, WANG Gui-he<sup>1</sup>

(1. School of Engineering and Technology, China University of Geosciences, Beijing 100083, China; 2. Beijing MTR Construction Administration Corporation, Beijing 100068, China)

**Abstract:** The discontinuity topology optimization (DTO) is an upper bound limit analysis technique for modeling the stability of geotechnical problems involving soil-structure interaction. The slip-lines or discontinuities used for DTO are typically generated by interconnecting a set of nodes located at regular grid points within a domain under consideration. A key feature of this implementation is that the soil reinforcement is simulated by the soil model such that allows the soil to flow past the reinforcement as might occur for soil nailing and propped wall. And also the procedure is extended to enable rotations at the boundaries of prescribed regions to be considered as well as translation failure mechanisms to be modelled. The resulting procedure is solved by the interior point method with linear programming formulation, which allows identification of a wide variety of failure modes, including translation and /or rigid body rotation, and rigid-plastic bending of the structure due to the formation of plastic hinge. The effectiveness of this procedure is demonstrated by analyzing the stability of masonry arch bridge, anchored sheet pile wall and propped wall. The DTO output is provided, which clearly illustrates the clarity and detail of the discontinuity collapse mechanism solutions.

**Key words:** upper bound method; soil-structure interaction; translation and rotation; discontinuity topology optimization; interior point method

## 0 引言

正如岩土力学传统稳定性问题一样, 考虑一定安全系数的土体-结构相互作用的土工结构(如基坑开挖支护)同样可以以其极限状态作为研究对象。极限分析理论在数学逻辑上更为严密, 构造简单, 而且无需复杂的本构关系, 在求解稳定系数或安全系数上更为直接、简明。一般而言, Sloan<sup>[1]</sup>最早实现有限元法与极限分析相结合, 采用数学规划方法求解岩土工程稳

定性问题。这也标志着数值极限分析法的诞生。但是, 极限分析有限元法至今仍囿于浅基础承载力和边坡稳定性问题的简单运用; 尽管 Ukritchon<sup>[2-3]</sup>在基坑稳定性分析中得以应用, 但没有详细说明其构造方法和运

基金项目: 国家自然科学基金项目(40902085, 41202219); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(2652013104)

收稿日期: 2016-11-15

\*通讯作者(E-mail: richardhuangqw@163.com)

算效率。因而, 在某种程度上而言, 对于考虑土体-结构相互作用的数值极限分析方法仍亟待深入研究。

由于数值极限分析方法兼具数值方法的灵活和极限定理的简单与直接, 因此, 采用离散技术和数学规划法进行极限分析问题的求解是当前研究的主流。由于无厚度间断面(非连续面)的引入, 使得计算结果受非连续面的分布影响较大。因此, 部分学者探讨和引入了线性单元的有限元网格自适应技术, 如 Borges 等<sup>[4]</sup>、Christiansen 等<sup>[5]</sup>、Lyamin 等<sup>[6]</sup>、Lyamin 等<sup>[7]</sup>。显然, 这也促使数值极限分析方法理论更趋复杂。

Yuan 等<sup>[8]</sup>、Munoz 等<sup>[9]</sup>采用极限分析有限元对锚桩墙、板桩墙稳定性进行分析, 进一步验证该方法的优越性。尽管采用有限单元技术进行离散, 由于单元间公用边界为非连续面, 每个单元都必须独立进行编号, 稀疏矩阵奇异问题难以回避<sup>[10-11]</sup>, 进而使得优化求解的整体计算效率降低。

近年来, 如何提高数值极限分析方法的计算效率, 一直是理论研究的热点和难点。其中, 静力许可应力场或机动容许速度场的构造方式和离散形式上的研究是主流方向之一。Milani 等<sup>[12]</sup>采用曲线和线性单元进行离散; Hambleton 等<sup>[13]</sup>采用线性三角形单元进行离散, 并通过单元节点的摄动方式(perturbation method)进行速度场的构造。Le<sup>[14]</sup>采用无网格法(meshless method)和二阶锥形规划方法进行极限定理的实现; Zhou 等<sup>[15]</sup>采用自然单元法(natural element method)实现板结构的极限上限方法。由此可见, 采用新型的离散方式构造数值极限理论是提高数值计算效率的有效方式。

与边坡稳定性问题类似, 考虑土体-结构相互作用的土工结构失稳破坏形态上存在两种主要形式: 滑动破坏与转动破坏, 即存在土体的屈服、结构的屈服(塑性铰)或两者兼而有之。土体-结构的相互作用也体现在土体与结构均存在破坏失效的可能。因此, 考虑土体-结构相互作用的稳定性问题的最优化解认为是在可行域上(所有失稳破坏模式)求得的全域最优解。

事实上, 上限法的优势在于确定土工结构的临界破坏模式, 其中, 非连续面或是滑移面的确定则是其关键之所在。依据 Smith 和 Gilbert<sup>[16]</sup>的研究思路, 借助大规模桁架结构优化理论的进步, 本文以非连续面拓扑优化技术为核心, 在土体平动的基础上, 引入结构转动的失效模式, 丰富非连续面拓扑优化的内涵和功能, 并以拱桥的极限承载力和围护结构的稳定性问题进行例证, 验证非连续面拓扑优化理论的有效性和正确性。

## 1 非连续面拓扑优化

问题研究域采用  $n$  个节点,  $m$  个节点间连线(非连续线)进行构造, 每个非连续线均是潜在的破坏滑移面。非连续面通过节点间连线产生。每个非连续面赋予材料特性和参数, 并定义边界条件, 非连续面组成破坏模式, 最终确定内部能量的极值。极限分析上限法非连续面拓扑优化(discontinuity topology optimization, DTO)的数学构造形式<sup>[16-17]</sup>可表述为

$$\min \lambda \mathbf{f}_L^T \mathbf{d} = -\mathbf{f}_D^T \mathbf{d} + \mathbf{g}^T \mathbf{p}, \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{Bd} = 0, \\ \mathbf{Np} - \mathbf{d} = 0, \\ \mathbf{f}_L^T \mathbf{d} = 1, \\ \mathbf{p} \geq 0, \end{array} \right\} \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{f}_L$  ( $2m$ )、 $\mathbf{f}_D$  ( $2m$ ) 分别为活载、恒载的切向和法向分量;  $\lambda$  为破坏荷载系数;  $\mathbf{g}$  ( $2m$ ) 为非连续面的长度  $l$  ( $m$ ) 和黏聚力  $c'$  (kPa) 的乘积;  $\mathbf{B}$  为  $(2n \times 2m)$  含有方向余弦的相容矩阵;  $\mathbf{N}$  为  $(2m \times 2m)$  塑性流动矩阵。在方程式(1)中,  $\mathbf{d}$  和  $\mathbf{p}$  为线性规划问题的未知量, 且  $\mathbf{d}^T = \{s_1, n_1, s_2, n_2, \dots, n_m\}$ ,  $s_i$  和  $n_i$  分别为块体间非连续面  $i$  的相对剪切和法向位移, 如图 1 所示;  $\mathbf{p}$  是  $(2m)$  塑性算子矩阵。

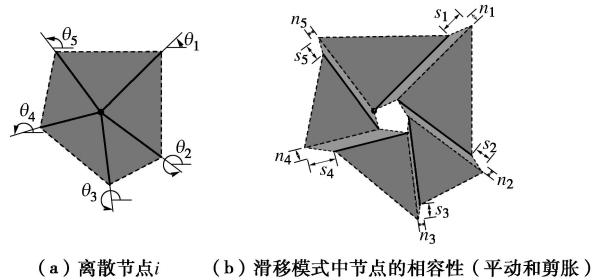


图 1 节点的相容性条件示意

Fig. 1 Compatibility at a node for cohesive-frictional soils

DTO 的实质内核是加强离散节点的协调条件, 非连续面位移  $\mathbf{d}$  和塑性算子  $\mathbf{p}$  为优化问题变量。当采用 Mohr-Coulomb 屈服准则时, 可通过线性规划法(linear programming)或二阶锥形规划法(second order cone programming)进行求解。获得的优化解表述为塑性真解的上限, 其计算的准确度由离散节点的数量控制。图 2 为 DTO 方法的具体步骤; 为确保计算结果的准确性, 离散节点密度或数量必须适中。在优化迭代计算过程中, 通过调整非连续面的布置获得问题的最优解。

在 DTO 构造中, 其数学构造形式完全基于非连续面的相对位移(速度), 每个非连续面设置变量来定义相对滑动位移。当采用相对位移后, 几何相容条件

可直接通过节点的线性约束方程进行校验。最终的优化函数定义为含有运动变量的所有非连续面(滑移面)的总的能量耗散。位移变量为线性优化问题的变量, 所获得的最优解界定优化的非连续面构建而成的相容破坏机构和最小能量耗散。DTO 从大规模的非连续面中优化确定临界速度非连续面的临界布置和最小的上限值。

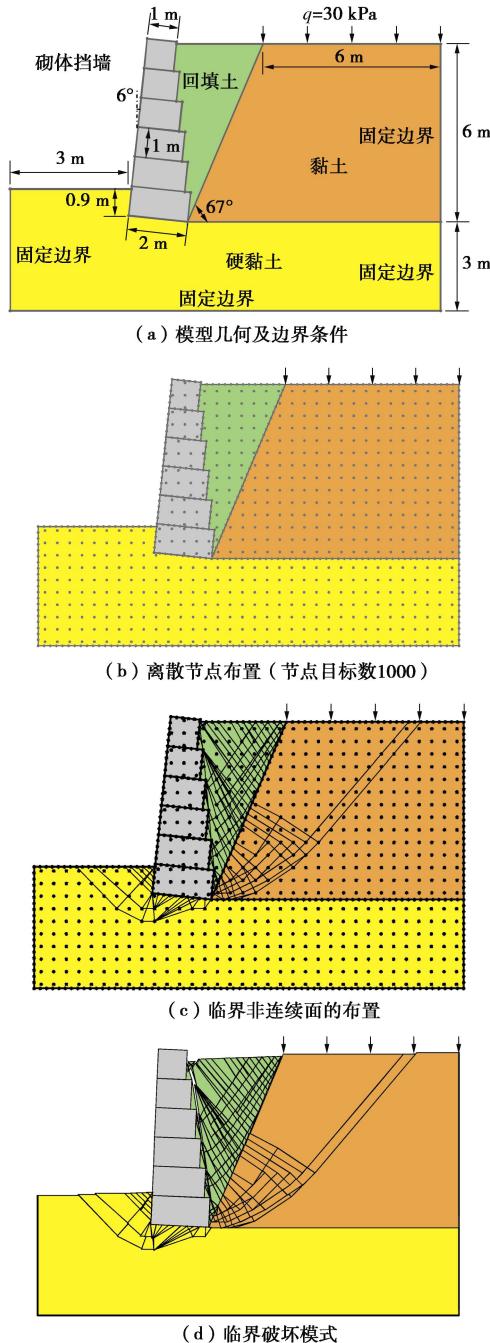


图 2 非连续面拓扑优化步骤示意图

Fig. 2 Procedure of discontinuity topology optimization stages

方程式 (1) 和 (2) DTO 数学优化问题最终借助线性规划的原-对偶内点法 (primal-dual interior point method) 进行求解。Karmarkar<sup>[18]</sup>和 Gill 等<sup>[19]</sup>提出能

处理大规模优化变量的内点法, 并成功运用于非线性优化问题。原-对偶内点法源于数学规划问题的对偶原理, 其核心仍基于拉格朗日函数 (Lagrangian function) 和 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件进行优化计算。其内涵意指若原问题通过构造和求解获得, 则其对偶问题的变量即可知道。一旦对偶问题获得优化解, 那么原线性规划问题可直接得到。

## 2 结构转动与平动

在前节 DTO 极限分析构造中引入结构体, 必须能够实现结构体与土体之间的相对运动。为实现这一目标, 所有潜在的非连续面 (或滑移线) 仅在固体内部产生, 除了穿越结构体上的离散节点外, 不能直接穿过结构体。这种做法的直接结果就是需要在边界或结构上增加节点密度 (或数量)。

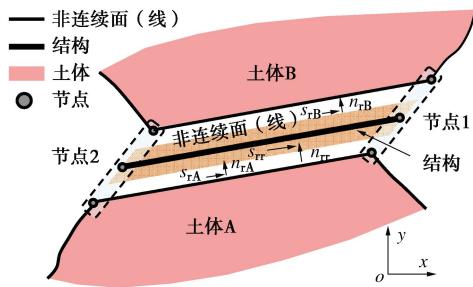


图 3 土体-结构相对运动示意图

Fig. 3 Relative movement between soil-structure interaction

### 2.1 结构平动

图 3 为结构体与周围土体相对运动以及土体与结构相对运动的示意图。结构体模拟为条块, 类似“三明治”形式夹在固(土)体 A 和 B 之间。细条块(结构体)和相邻固体的相对运动可通过固体条块上面和下面的潜在非连续面来模拟。而结构自身的运动则通过条块的相对运动获得。考虑结构的平动(结构的绝对速度在局部坐标内表述为  $u_r$  和  $v_r$ ), 可引入新的变量表征结构与固体(土体)的相对运动, 即

$$s_{rr} = u_r - u_t, \quad (3)$$

$$n_{rr} = v_r - v_t. \quad (4)$$

式中,  $s_{rr}$  和  $n_{rr}$  分别为结构与土体的相对滑移和法向速度, 在全域坐标系中以绝对速度  $u_t$  和  $v_t$  运动。尽管在 DTO 程序中, 滑移线速度通常是相对的, 但是在边界的绝对值通过上述公式可以直接得出。

结构与细条块之间的相对运动可以通过边界特性来计算, 如剪胀性, 即

$$s_{rA} = u_t - u_A, \quad (5)$$

$$n_{rA} = v_t - v_A. \quad (6)$$

式中,  $s_{rA}$  和  $n_{rA}$  分别表示理论土条与固体 A 边界的相

对滑移和法向速度;  $u_A$  和  $v_A$  分别为固体 A 在局部坐标内的绝对速度。变量  $s_{rB}$  和  $n_{rB}$  的定义与固体 A 类似。

不难发现, 连接结构到 DTO 程序中的变量是  $s_{rr}$  和  $n_{rr}$ , 这些并不涉及几何相容条件(协调方程), 结构体模拟为平动仅对能量耗散方程有影响。因此, 对类似土钉、锚杆等结构体, 拉拔系数  $T$  (kN/m) 和侧阻系数  $N$  (kN/m) 对能量耗散方程有影响, 即

$$dW = (T|s_{rr}| + N|n_{rr}|)dl \quad , \quad (7)$$

其中,  $dW$  为功率,  $dl$  为长度,  $|s_{rr}| = s_{rr}^+ + s_{rr}^-$ ,  $s_{rr} = s_{rr}^+ - s_{rr}^-$ , 且  $s_{rr}^+, s_{rr}^- \geq 0$ 。

## 2.2 结构转动

对于土体-结构相互作用的问题, 转动模式不可避免。DTO 程序在刚性块体界面和边界处考虑转动破坏, 块体自身不考虑转动。实际上, 转动总是出现在土体和结构单元或是相邻结构单元之间的边界上。转动破坏的形式有以下几种可能: 土体屈服破坏、结构屈服破坏或两者兼之。以浅基础地基极限承载力为例, 考虑对数螺旋滑移面的几何尺寸, 地基极限承载力状态下的浅基础屈服破坏如图 4 所示。运动容许机构的发展为基础结构的塑性铰, 该塑性铰的出现导致基础转动和临近土体的变形。在这种情况下, 能量耗散不仅出现在土体和接触面, 而且也出现在基础(或结构)的塑性铰中。

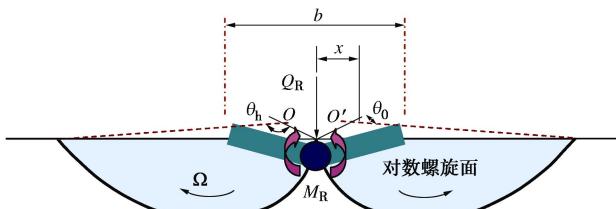


图 4 浅基础的破坏模式<sup>[20]</sup>

Fig. 4 Collapse mechanism of shallow foundation

由于考虑转动变量, 需修正 DTO 的数值形式。基本变量  $\mathbf{d}^T = \{s_1, n_1, \omega_1, s_2, n_2, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ , 其中, 非连续面  $i$  的相对剪切和法向位移变量为  $s_i$  和  $n_i$  外, 增加相对转动变量  $\omega_i$ 。对于非连续面  $i$  的全域协调约束变为

$$\mathbf{B}_i \mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & -\beta_i & \frac{l_i \beta_i}{2} \\ \beta_i & \alpha_i & -\frac{l_i \alpha_i}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_i & \beta_i & \frac{l_i \beta_i}{2} \\ -\beta_i & -\alpha_i & -\frac{l_i \alpha_i}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_i \\ n_i \\ \omega_i \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中,  $\mathbf{B}_i$  和  $\mathbf{d}_i$  分别为局部协调矩阵和非连续面  $i$  位移;  $\alpha_i$  和  $\beta_i$  分别为非连续面  $i$  的  $x$  和  $y$  轴的余弦,  $l_i$  为非连续面  $i$  的长度。并且, 非连续面  $i$  的局部塑性流动约束可改写成

$$\mathbf{N}_i \mathbf{p}_i - \mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ \tan \phi_i & \tan \phi_i & u_i l_i & u_i l_i \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i^1 \\ p_i^2 \\ p_i^3 \\ p_i^4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_i \\ n_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = 0, \quad (9)$$

$$u_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{1 + \exp(\pi \tan \phi_i)}, \quad (10)$$

其中, 塑性算子  $p_i^1, p_i^2$  增加额外的变量  $p_i^3, p_i^4$ ;  $u_i$  为在临近屈服区域的转动的距离因子, 或当转动仅在边界发生时, 可取常系数 0.5;  $\phi$  土体-结构接触面摩擦角。需要指出的是, 这些塑性铰无需事先知道, 重叠非连续面等情况也可以包含在分析过程中。当转动在临近土体中调整, 考虑功率方程  $\mathbf{g}^T = \{c_1 l_1, c_1 l_1, c_1 l_1^2 u_i / \tan \phi_i, c_2 l_2, c_2 l_2, c_2 l_2^2 u_i / \tan \phi_i, \dots, c_m l_m^2 u_m / \tan \phi_m\}$ ,  $c_m l_m^2 u_m / \tan \phi_m$  的推导过程不在此赘述。

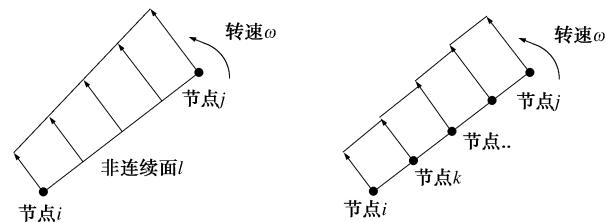


图 5 非连续面转动等效处理示意图

Fig. 5 Equivalent stress distribution of discontinuity

为便于转动问题的计算, 在 DTO 程序中进行了部分简化, 如图 5 所示。通过细分在边界或结构单元上节点数量, 将结构转动引致的不均衡力, 化整为零, 使得转动临近区域的土体受力条件不做任何改变。也就是说, 仅结构或接触面考虑转动, 而土体单元则仍以平动为主, 转动引发的不均衡力可通过多分段均衡力代替。

至此, DTO 程序的土体-结构相互作用的机制基本建立完成, 由于以非连续面布局为主, 线-线接触形式成为主导。为简化计算, 仅考虑问题边界、土体-结构接触面的转动, 土体形成块体本身不考虑转动破坏。

另外, 对于支护体系结构作用的发挥, 可借助地基极限承载力理论来实现。在集中荷载作用下, 致使地基达到极限承载力状态, 基础会适度出现塑性铰; 此时, 基础的受荷作用状态可匹配支护结构屈服时的作用状态。而基础的自由度在二维空间仅增加转角与作用弯矩; 并且其他作用荷载形式均可在此基础上进行衍生和拓展。



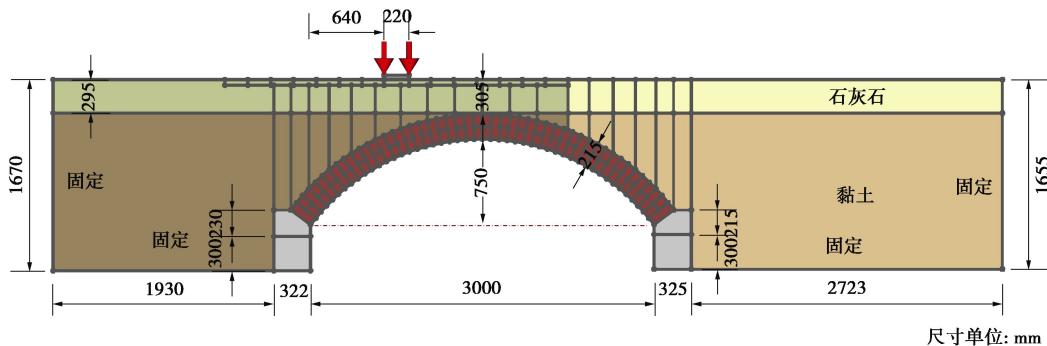


图 6 拱桥模型尺寸及边界条件

Fig. 6 Geometry and boundary conditions of masonry arch bridge

表 1 拱桥 Arch02 材料参数

Table 1 Parameters of masonry arch bridge Arch02

材料	摩擦系数	抗压强度 /( $\text{kN} \cdot \text{m}^{-2}$ )	重度 /( $\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$ )	黏聚力 $c$ /kPa	摩擦角 $\phi$ (°)	土体-结构接触面强度系数
砌体	0.64	25000	23.7			
石灰石	3.3	54.5	19.1	3.3	54.5	0.33
黏土	30	0	21.7	3.0	0	0.33

### 3 验证与应用

为例证本节土体-结构相互作用的有效性和准确性, 分别以复杂的砌体拱桥承载力、锚定板桩墙和基坑内支撑围护结构等问题进行分析。本节算例均在 2.67 GHz Intel Core i7 内核, 4GB 内存和 32 位 Windows XP 系统便携式电脑上计算求解。引用计算时间包括节点连接, 建立和求解线性规划问题所需的时间。

#### 3.1 拱桥结构承载力

土体-拱桥结构相互作用对拱桥的极限承载力影响甚大, 但土体-结构相互作用的复杂机理并未很好地被掌握。本节依托英国 Sheffield 大学和 Salford 大学的联合拱桥试验, 仅以 Arch02 为例证, 验证 DTO 法的有效性和准确性, 同时, 对涉及岩土强度参数的合理性选择进行探讨。

拱圈 (arch barrel) 分块和跨径 3 m, 矢高比 4:1, 平均宽度为 1010 mm。拱圈由两个拱环和错缝拱头组成, 以确保试验中出现拱环分离。在拱顶以上采用石灰石回填 305 mm, 拱顶以下采用黏土填充, 平均宽度 1045 mm。试验拱桥 Arch02 具体几何尺寸和构造见图 6。

拱桥材料参数取值详见表 1, 其中材料参数已参照应变水平进行确定。砌块采用刚性模型, 而砌缝采用无黏性 Mohr-Coulomb 屈服准则 ( $c=0$ ), 而摩擦角为测试摩擦系数的 0.64, 即  $\varphi=\tan^{-1}(0.64)$ 。另外, 为考虑砌体的压缩破坏出现塑性铰, 砌体的抗压强度为  $25 \text{ N/mm}^2$ 。

填土材料的参数选择是 DTO 数值模拟计算的关键要素。对于土体-砌体接触面摩擦角由于没有直接进行试验测试, 本节模拟采用常规的做法取周边土体强

度参数的 1/3。根据 Eurocode 7 的推荐, 砂/卵石和预制混凝土之间为  $2/3\varphi_{cv}$ , 其中  $\varphi_{cv}$  为土体临界强度。尽管临界强度没有测试, 一般认为远小于峰值强度。

拱桥填土分为主动区域 (近荷载作用影响区域) 和被动区域 (远离作用荷载区域), 通过调整发挥系数  $M$  (mobilization factor,  $\varphi_{mob}=M\varphi$ ) 改变被动区域土体参数, 使得极限荷载数值结果变化较大。从 Nguyen<sup>[21]</sup> 采用 MSLA (mobilized strength limit analysis) 计算应变的结果来看, 在达到极限破坏荷载时, 拱桥主动与被动区域土体的剪应变水平相差一个数量级。也就是说, 对于被动区域的土体强度参数不能采用峰值强度, 否则, 其破坏荷载高于实际值。为简便计算, 本算例采用分区域确定参数 (区域划分详见图 6), 假设主动区域土体应变达到极限强度, 而仅考虑被动区域土体受发挥系数影响, 即被动区域土体强度发挥系数  $M$  为 0.5。

黏土填充拱桥 (Arch02) 破坏荷载为 90 kN, 拱桥的荷载-位移关系曲线如图 7。试验拱圈结构破坏模式最终是“四铰”机构 (four-hinged mechanism), 如图 8 所示。

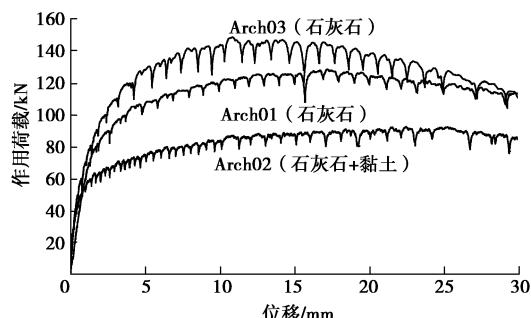


图 7 Salford 拱桥荷载-位移曲线 (Arch02)

Fig. 7 Load-vertical displacement (quarter span) relationship for Arch02 test

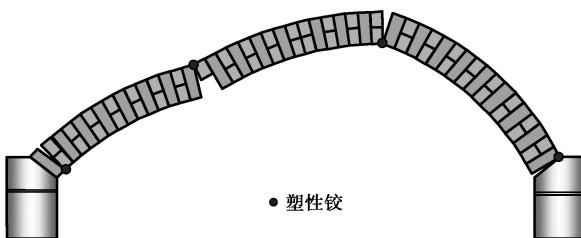


图 8 拱桥拱圈(肋)试验破坏图

Fig. 8 Collapse mechanism of arch barrel

图 9 为典型的 DTO 节点离散布置示意图, DTO 数值计算的极限荷载及线性优化问题的变量数与离散节点数的关系如图 10 所示。从中不难发现, 由于拱桥因涉及土体-结构相互作用结构形式较为复杂, 因此, 离散节点或节点目标数均较大, 一般达到 5000 左右才能获得较为满意的解。由图 10 可知, 当节点数量超过 5000 后, 由于极限荷载差异不大, 而优化变量数呈线性增加, 足见其计算成本增加而准确性提升的效率降低。因此, 节点目标数 5000 可以获得准确而又高效的数值解。拱桥 Arch02 的试验与 DTO 模拟计算结果如表 2, 拱桥的 DTO 极限荷载和试验破坏荷载误差约为 5.9% (节点数 5000, 具体计算结果见表 3)。研究分析发现两者结果误差主要源于从三轴试验中获得黏土的剪切强度因差异性较大而难以确定。

表 2 拱桥 Arch02 具体组成及相关结果

Table 2 Physical and numerical results of Arch02

序号	回填土类型		桥墩 主体部分	试验 类型	DTO 结果/kN
	近地表	自由			
1	黏土	石灰石		自由	90
					84.82

表 3 Salford 拱桥计算结果统计

Table 3 Statistical results of Salford masonry arch bridge Arch02

编号	节点密度 (潜在连接线)	迭代步	变量	约束	耗时 /s	DTO 结果
Arch02	5010 (978206)	8	195966	105756	188.735	84.82

由图 11 可知, 荷载作用处土体破坏模式明显, 载荷板因土体局部破坏而刺入土体。拱桥最终的破坏呈

现“四铰机构”破坏类型, 只是右侧的桥墩进入被动区域土体, 引致较大的剪切带。试验获得的拱圈破坏形式与模拟结果极其一致, 拱肋上个别砌块因破坏而分离。Salford 拱桥 Arch02 破坏形式与 DTO 数值模拟结果比对发现, 两者的破坏模式基本一致, 只是部分塑性铰的位置略有出入。事实上, 极限分析上限定理表述是当且仅当上限解与真解一致时, 其构造的破坏模式才是真实的。

### 3.2 锚定板桩墙

如图 12 所示, 采用此案例的目的是考虑钢板桩与土锚的屈服破坏, 以及转动破坏类型。Krabbenhoft 等<sup>[22]</sup>针对本案例采用非线性优化对支护结构体系的特定值 (如板桩屈服强度、嵌固深度、土锚拉力等) 进行多目标计算求解。本文仅以计算结构体系的整体稳定性为目的, 选择 Brinch Hansen 的参数进行分析与结果比较。锚定板桩墙几何尺寸和计算模型如图 13 (a) 所示, 土体、土锚和钢板桩墙的参数详见表 4, 土体-墙体之间接触完全光滑 ( $\phi=0$ ) 和完全粗糙 (摩擦角  $\phi=\phi'$ )。其中, 板桩受地锚的作用力分别维持 75kN 和 105 kN。安全系数为土体强度折减系数, 与常规有限元强度折减法类似, 此时, 式 (1) 和式 (2) 中目标函数关键变量为安全系数, 破坏荷载系数  $\lambda$  则为 1。

表 4 锚定板桩墙的模型参数

Table 4 Parameters for modelling of anchored sheet pile wall

类别	参 数	数 值
土体	重度 $\gamma/(kN \cdot m^{-3})$	18
	黏聚力 $c'/kPa$	0
	摩擦角 $\phi'/(^{\circ})$	30
板桩	嵌固深度 $d_w/m$	完全粗糙 2.0 完全光滑 3.27
	塑性抗弯弯矩 $M_p/(kN \cdot m \cdot m^{-1})$	完全粗糙 125 完全光滑 182
地锚	拉拔系数 $T/(kN \cdot m^{-1})$	完全粗糙 75 完全光滑 105
	土体-墙接触面 摩擦角 $\phi/(^{\circ})$	完全粗糙 30 完全光滑 0

注: 本表粗糙和光滑代表两种不同案例的数值模拟条件。

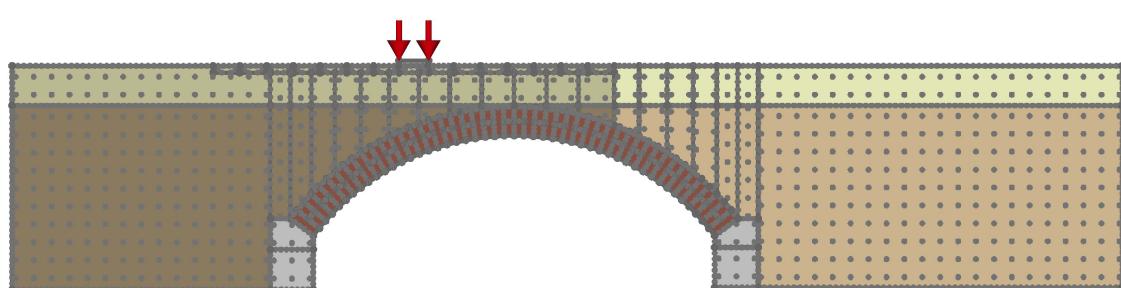


图 9 Arch02 拱桥离散点分布示意图 (节点数 1910 个以及 124796 个节点间潜在滑移线)

Fig. 9 Grid-node distribution of masonry arch bridge Arch02 (nodal density 1910 and 124796 potential inter-node connections)

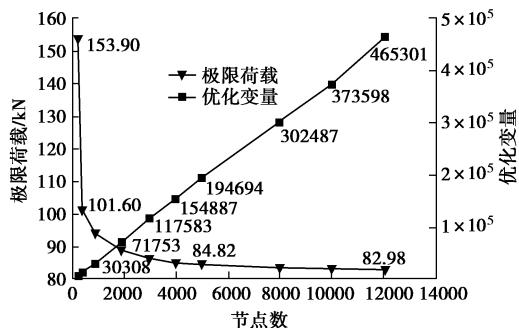


图 10 极限荷载、优化变量与节点目标数关系示意图

Fig. 10 Relationships among collapse load, optimum variables and node target numbers with DTO

图 13 (b)、(c) 为不同土体强度参数条件下的 DTO 模拟的锚定板桩墙破坏模式图。不难发现，在土体-墙体接触完全光滑和完全粗糙的情况下，土锚均因达到其极限拉力而屈服（土锚固定端发生滑移），钢板桩并未达到屈服极限而出现塑性铰。DTO 程序求解的安全系数为强度折减系数，也是优化变量，而破坏荷载系数为 1，土体-墙体接触完全光滑和粗糙情况下其安全系数 FOS (factor of safety) 分别为 1.023 和 1.006；与 Brinch Hansen 的安全系数 1.0 的误差仅为 2.3% 和 0.6%。

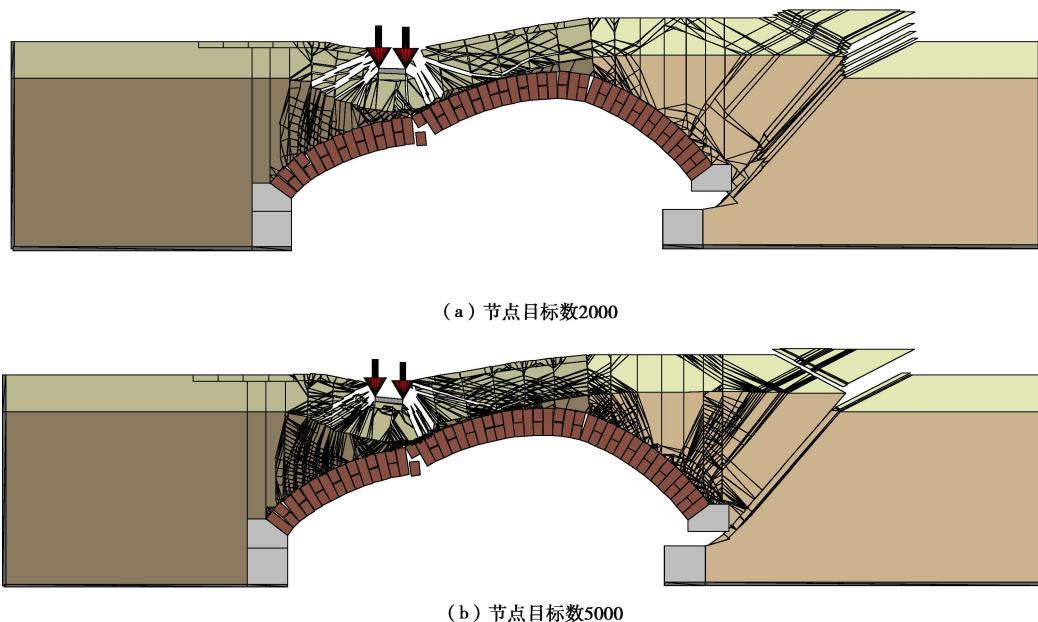


图 11 Arch02 拱桥 DTO 计算破坏模式

Fig. 11 Collapse mechanism of Arch02 calculated by DTO method

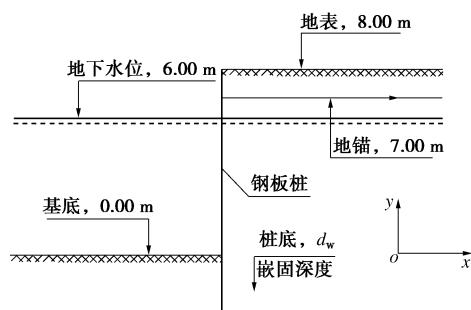
图 12 锚定板桩墙<sup>[22]</sup>

Fig. 12 Anchored sheet pile wall<sup>[22]</sup>

### 3.3 基坑围护结构

考虑较为复杂的基坑围护结构稳定性问题，如图 14 所示。钢筋混凝土连续墙结构长 8 m，嵌固深度 2 m，距墙顶部 1.0 m 处有内支撑，高 0.2 m，其左侧端部固定。模型左右及底部固定，地表荷载 10 kPa，如图 14 (a) 所示。支撑与墙体通过接触单元连接，可自由转

动。为简便计，考虑土体-结构接触面完全光滑和完全粗糙两种情形，基于短期不排水情况进行分析。假设墙体刚性，仅考虑结构体系的整体破坏，材料参数见表 5。

表 5 基坑围护结构的模型参数

Table 5 Parameters for numerical modelling of propped wall

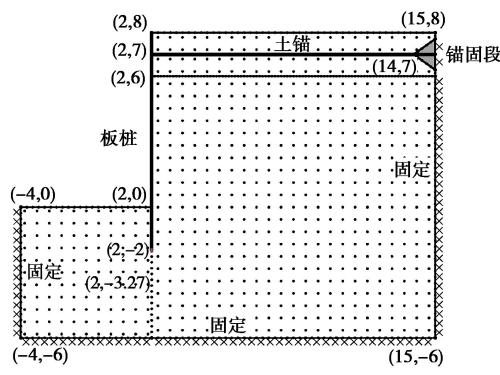
土体		墙体及支撑		土体-墙 体接触 面
重度 $\gamma/(kN\cdot m^{-3})$	黏聚力 $c_u/kPa$	重度 $\gamma/(kN\cdot m^{-3})$	塑性抗弯 矩 $M_p$ $/(kN\cdot m\cdot m^{-1})$	
20	35	24	刚性	光滑

支撑为受拉截断模型，选择不同节点密度或节点目标数进行稳定性分析，安全系数为土体强度折减系数（与上例相同），计算迭代步、优化变量、线性约束数量以及计算结果统计详见列表 6。

表 6 基坑支护结构稳定性计算统计表

Table 6 Statistic results of stability analysis of propped wall

序号	节点数(潜在连接线)	迭代步	变量	约束	耗时/s	安全系数/FOS
1	997 (262692)	15	27304	12940	17.439	1.355
2	1989 (958161)	22	55275	25630	65.504	1.342
3	3062 (2077385)	23	93920	42031	121.529	1.338
4	4013 (3339304)	24	126803	56108	210.36	1.335
5	4948 (4736407)	25	161167	70587	283.976	1.333
6	6073 (6531062)	23	201314	87554	374.255	1.332



(a) 锚定板桩墙数值模型及离散点分布(节点目标数1000)

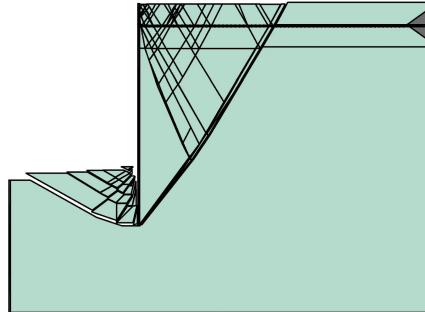
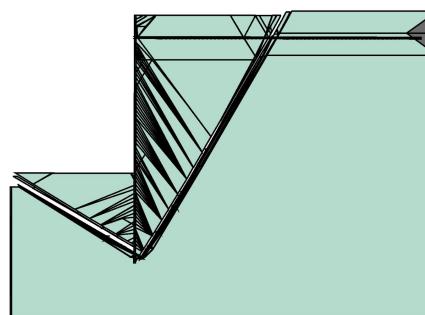
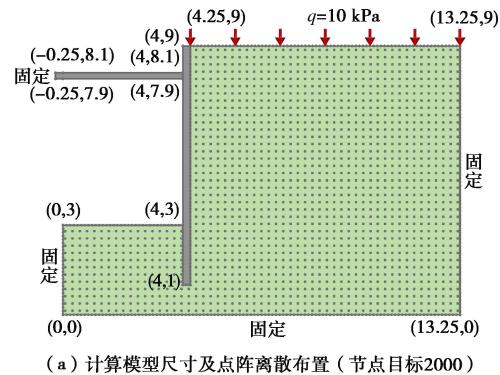
(b) 土体-墙接触光滑锚定板桩墙破坏模式  
( $T=75 \text{ kN}$ ,  $M_p=125 \text{ kNm/m}$ , 安全系数为1.023)(c) 土体-墙接触粗糙锚定板桩墙破坏模式  
( $T=125 \text{ kN}$ ,  $M_p=182 \text{ kNm/m}$ , 安全系数为1.006)

图 13 锚定板桩墙稳定分析

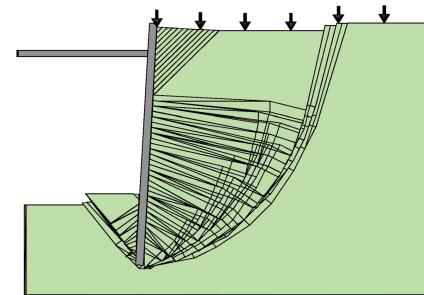
Fig. 13 Stability analysis of anchored sheet pile wall

由图 14 (b)、(c) 可知, 基坑围护结构为基底隆起破坏模式, 墙体可绕支撑转动。土体-结构(地连墙)接触完全光滑与安全粗糙的整体稳定安全系数分别为 1.342 和 1.610, 而基于常规瑞典条分法的整体稳定安

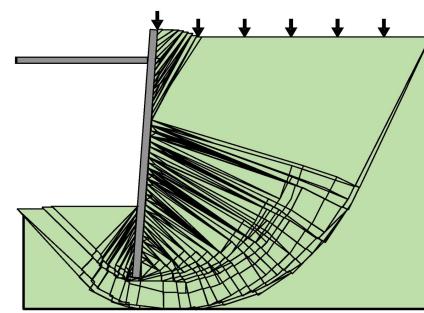
全系数为 1.471 (如图 14 (d) 所示), 抗倾覆和抗隆起安全系数分别为 6.076 和 1.466。对于整体稳定安全系数而言, 两者误差分别为 8.8% 和 9.4%。其中, 在土体-结构接触完全粗糙的情形下, 临界破坏模式的非连续面(或滑移面)达到数值几何模型的边界, 对最终的优化结果略有影响。放大支撑和墙体的接触(如图 15), 不难发现, 墙体因转动与支撑仅有下半端部接触。这主要是源于接触面无张拉作用, 而墙体抗压强度又足够大。



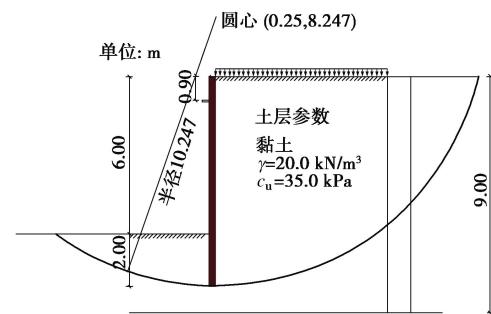
(a) 计算模型尺寸及点阵离散布置(节点目标2000)



(b) 支护结构破坏模式(土体-地连墙接触光滑, 安全系数1.342)



(c) 支护结构破坏模式(土体-地连墙接触粗糙, 安全系数1.610)



(d) 瑞典条分法临界破坏模型(条分法宽度0.4 m, 安全系数1.471)

图 14 基坑支护结构稳定性分析

Fig. 14 Stability analysis of propped wall

这里需要指出的是, DTO 程序的最优解是从全域优化的角度来考虑安全系数的最小值, 其涵盖所有破坏可能, 如整体稳定性、抗倾覆、抗隆起等, 且无需预先假设任何破坏模式; 而常规的极限平衡法则是根据不同的破坏类型, 预先构造不同的破坏模式再分别求解安全系数最小值。



图 15 支撑与墙体细部图

Fig. 15 Details of free rotation about prop

## 4 结 论

由于土体-结构相互作用机理较为复杂, DTO 构造形式与常规有限元离散不同, 因此, 结构单元和土体-结构接触面的构造必须区别对待。在点阵栅格离散的基础上, 引入可考虑土锚、连续墙等性能结构单元, 并且涵盖平动和结构转动破坏模式。最终在不影响数学规划问题线性特征的基础上, 采用原-对偶内点法进行求解, 且能满足工程应用的大规模计算需求。

采用点阵离散的拓扑优化技术主要特征是将研究对象的相容条件转化为离散节点的相容性, 节点间的潜在连接线即为速度非连续面(耗散面)或滑移线, 非连续面的临界布局构成最终的临界破坏模式。当然, DTO 技术也有值得特别注意的地方。尽管数学构造形式上满足几何约束, 但是 DTO 必须考虑应变与速度相容条件, 在拱桥承载力问题中合理区分土体主动和被动区域, 并选择特定应变条件下的强度参数, 可以确保在数学和物理意义上的应变协调性的统一, 也提高数值计算的精度和可靠度。

应变协调性或发挥强度的引入为 DTO 考虑物理意义上的几何相容创造条件, 为 DTO 在各类岩土工程问题中的应用创造可能。尽管 DTO 功能强大, 需要参数较少, 但对于应用范畴需要持审慎的态度; 针对特定的稳定性问题选择合理的强度参数还需进一步研究。

## 参考文献:

- [1] SLOAN S W. Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Engineering, 1988, **12**:

61 - 77.

- [2] UKRITCHON B, WHITTLE A J, SLOAN S W. Undrained limit analyses for combined loading of strip footings on clay[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 1998, **124**(3): 265 - 276.
- [3] UKRITCHON B, WHITTLE A J, KLANGVIJIT C. Calculations of bearing capacity factor  $n_y$  using numerical limit analyses[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2003, **129**(6): 468 - 474.
- [4] BORGES L A, ZOUAIN N, COSTA C, et al. An adaptive approach to limit analysis[J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, **38**: 1707 - 1720.
- [5] CHRISTIANSEN E, PEDERSEN O S. Automatic mesh refinement in limit analysis[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, **50**(6): 1331 - 1346.
- [6] LYAMIN A V, SLOAN S W. Mesh generation for lower bound limit analysis[J]. Advances in Engineering Software, 2003, **34**(6): 321 - 338.
- [7] LYAMIN A V, SLOAN S W, KRABBENHOFT K, HJIAJ M. Lower bound limit analysis with adaptive remeshing[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, **63**(14): 1961 - 1974.
- [8] YUAN Y, WHITTLE A J. Evaluation and prediction of 17th Street Canal I-wall stability using numerical limit analyses[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2011, **139**(6): 841 - 852.
- [9] MUÑOZ J J, LYAMIN A V, HUERTA A. Stability of anchored sheet wall in cohesive-frictional soils by FE limit analysis[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2013, **37**(13): 1213 - 1230.
- [10] 黄齐武. 基于锥形规划理论的数值极限分析下限法及其应用 [D]. 上海: 同济大学, 2007. (HUANG QI-WU. Numerical lower bound limit analysis using second-order cone programming and its applications[D]. Shanghai: Tongji University, 2007. (in Chinese))
- [11] MAKRODIMOPOULOS A, MARTIN C M. Upper bound limit analysis using discontinuous quadratic displacement fields[J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2008, **24**: 911 - 927.
- [12] MILANI G, LOURENÇO P B. A discontinuous quasi-upper bound limit analysis approach with sequential linear programming mesh adaptation[J]. International Journal of

- Mechanical Sciences, 2009, **51**: 89 - 104.
- [13] HAMBLETON J P, SLOAN S W. A perturbation method for optimization of rigid block mechanisms in the kinematic method of limit analysis[J]. Computers and Geotechnics, 2013, **48**: 260 - 271.
- [14] LE C V. Novel numerical procedures for limit analysis of structures: mesh-free methods and mathematical programming [D]. Sheffield: University of Sheffield, UK, 2010.
- [15] ZHOU S T, LIU Y H, CHEN S S. Upper bound limit analysis of plates utilizing the C1 natural element method[J]. Computational Mechanics, 2012, **50**(5): 543 - 561.
- [16] SMITH C, GILBERT M. Application of discontinuity layout optimization to plane plasticity problems[J]. Proceedings the Royal of Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2007, **463**: 2461 - 2484.
- [17] JIA CANG-QIN, HUANG QI-WU, XIA BAI-RU. Stability analysis of soil slope using discontinuity layout optimization[J]. Advanced Materials Research, 2015, **1065-1069**: 190 - 198.
- [18] KARMARKER N. A new polynominal-time algorithm for linear programming[J]. Combinatorica, 1984, **4**: 373 - 395.
- [19] GILL P E, MURRAY W, SAUNDERS M A, et al. On projected Newton barrier methods for linear programming and an equivalence to Karmarkar's projective method[J]. Mathematical Programming, 1986, **36**: 183 - 209.
- [20] PLUMEY S. Soil-structure interaction in cut-and-cover tunnels[D]. Switzerland: EPFL, 2007.
- [21] NGUYEN D. Application of computational limit analysis to soil-structure interaction in masonry arch bridges[D]. Sheffield: University of Sheffield, 2008.
- [22] KRABBENHOFT K, DAMKILDE L, KRABBENHOFT S. Ultimate limit state design of sheet pile walls by finite elements and nonlinear programming[J]. Computers and Structures, 2005, **83**: 383 - 393.

## 2018年度第21讲黄文熙讲座学术报告会

### 第1号通知

2018年度第21讲黄文熙讲座学术报告会将于2018年4月22日（星期日）在北京中国科技会堂举行。2018年度黄文熙讲座主讲人为东南大学刘松玉教授和中国水利水电科学研究院汪小刚教高。刘松玉教授讲座题目为“污染场地测试评价与处理技术”，汪小刚教高讲座题目为“高土石坝几个问题探讨”。讲座文稿已分别刊登在《岩土工程学报》2018年第1期和第2期的黄文熙讲座栏目。

第21讲黄文熙讲座学术报告会由中国水利水电科学研究院和流域水循环模拟与调控国家重点实验室承办。黄文熙讲座学术报告会期间，还将邀请有关学者专家做学术报告。热烈欢

迎全国岩土工程界的专家学者及各有关单位的代表参会。有关本次学术报告会的更多信息请关注[www.iwhr.com](http://www.iwhr.com)（中国水利水电科学研究院）和[www.cgejournal.com](http://www.cgejournal.com)（岩土工程学报）后续发布的第2号通知。

4月21日（星期六）晚8时召开《岩土工程学报》编委会全体会议。请第十二届《岩土工程学报》编委出席会议，并于2018年4月21日下午14:00~20:00在北京中国科技会堂报到。

联系人：田继雪女士：15910917077，[tianjx@iwhr.com](mailto:tianjx@iwhr.com)，王玉杰博士：13651192199，[wangyj@iwhr.com](mailto:wangyj@iwhr.com)，会务联系邮箱：[geo\\_2018@163.com](mailto:geo_2018@163.com)。

（本刊编辑部）