

DOI: 10.11779/CJGE201802015

基于静力触探的土层自动划分方法与不确定性表征

曹子君¹, 郑 硕¹, 李典庆¹, 区兆驹²

(1. 武汉大学水资源与水电工程科学国家重点实验室, 湖北 武汉 430072; 2. 利物浦大学风险与不确定性研究所, 利物浦 L69 3GH)

摘 要: 提出了一种基于 I_c 数据自动划分土层的贝叶斯方法, 所提方法不仅能够在考虑 I_c 的空间变异性的条件下自动划分土层, 识别最可能的土层界面, 而且能够定量地表征土层界面的不确定性, 为制定下一步勘探方案和岩土工程设计提供参考依据。本文采用基于子集模拟的贝叶斯更新方法(CBUS)求解贝叶斯方程, 产生土层厚度的后验分布样本, 并计算每个可能的土层数目对应的模型证据, 确定最可能土层数和最可能的土层界面深度, 计算界面深度的标准差作为土层界面不确定性的量化指标。最后, 通过上海市轨道交通 10 号线伊犁站基坑开挖现场的 I_c 数据和模拟 I_c 数据说明了所提方法的有效性和正确性。结果表明: 所提方法划分的土层合理地反映了不同土层 I_c 的统计特性。相邻土层 I_c 的统计特性差异越大, 界面深度的标准差越小, 识别出的土层界面越可靠, 反之亦然。

关键词: 静力触探; 划分土层; 土类指数; 贝叶斯方法; 不确定性

中图分类号: TU413

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2018)02-0336-10

作者简介: 曹子君(1987-), 男, 副教授, 主要从事水利水电岩土工程可靠度分析与风险控制方面的研究。E-mail: zijunca@whu.edu.cn。

Probabilistic characterization of underground stratigraphy and its uncertainty based on cone penetration test

CAO Zi-jun¹, ZHENG Shuo¹, LI Dian-qing¹, AU Sui-kiu²

(1. State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan 430072, China; 2. Institute for Risk and Uncertainty, University of Liverpool, Liverpool L69 3GH, United Kingdom)

Abstract: A Bayesian framework is developed to probabilistically identify the underground stratigraphy based on I_c data. The proposed Bayesian framework identifies the most probable soil layer boundaries with the consideration of spatial variability of I_c and quantifies the uncertainties in the underground stratigraphy, which provides valuable information for making future site investigation plans and geotechnical designs. A subset simulation-based Bayesian updating algorithm (CBUS) is used to generate posterior samples of soil layer thicknesses and to calculate the model evidence for determining the most probable number of soil layers and the most probable soil layer boundaries, and the standard deviations of boundaries are calculated to quantify the uncertainty in soil layer boundaries. Finally, the proposed approach is illustrated and verified using the real I_c data obtained from a deep excavation site at Yili station of Shanghai No. 10 subway line and simulated I_c data from a virtual site. The results show that the underground stratigraphy identified by the proposed approach is based on the statistical similarity of I_c data. With the increase of statistical difference in I_c data within two adjacent soil layers, the standard deviation of the soil layer boundary between them decreases, and the soil layer boundary identified by the proposed approach is more reliable, and vice versa.

Key words: cone penetration test; underground stratigraphy; soil behavior index; Bayesian method; uncertainty

0 引 言

根据勘探资料划分土层是岩土工程勘察中一项重要任务^[1], 为岩土工程分析与设计提供必要的土层剖面信息(包括土层数目和相邻土层的界面位置)。土层划分包括两个方面工作: ①根据钻探取土或原位测试数据确定每个测点的土体类别; ②根据测点的土体类别确定土层界面位置。中国目前并无统一的土体分类

标准, 如《岩土工程勘察规范》、《水利水电工程地质勘察规范》和《公路工程地质勘察规范》中采用的土体分类标准不尽相同^[2]。解决这一问题的关键在于发

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(“973”计划)项目(2016YFC0800208); 国家自然科学基金项目(51579190, 51528901, 51679174)

收稿日期: 2016-11-05

展可靠的土体分类定量指标和统一的土体分类系统。基于静力触探试验 (cone penetration test, CPT) 的土体分类方法在这方面表现出独特的优势。

静力触探数据精度高, 具有良好的连续性和可重复性。国内外学者对基于静力触探的土体分类进行了大量的研究, 提出了基于 CPT 数据的土体分类经验图表和土体分类指数 I_c ^[3-10]。比如, Jefferies 等^[7]提出了综合考虑归一化锥尖阻力 Q_n 、归一化摩阻比 F_r 和孔压参数比 B_q 的 I_c 计算公式和土体分类标准; Robertson 等^[11]在 Q_t - F_r 土体分类图的基础上提出了不同的 I_c 计算公式和对应的土体分类标准。刘松玉等^[12]通过对江苏 14 个试验场地 95 套静力触探和对应的钻孔数据分析, 发现 Robertson 和 Wride 提出的土体分类指数与中国国标土体分类较为接近, 其计算公式如下:

$$I_c = \sqrt{(3.47 - \lg_{10} Q_n)^2 + (\lg_{10} F_r + 1.22)^2} \quad (1)$$

式中 $Q_n=[(q_t-\sigma_{v0})/P_a](P_a/\sigma'_{v0})^n$ 为考虑应力水平的归一化锥尖阻力; $F_r=[f_s/(q_t-\sigma_{v0})]\times 100\%$ 为归一化摩阻比; q_t , σ_{v0} , σ'_{v0} , P_a 和 f_s 分别为修正的锥尖阻力、竖向总应力、竖向有效应力、标准大气压和侧壁摩擦阻力; n 为应力指数, 对于砂土和黏土 n 分别取为 0.5 和 1, 其它土类对应的 n 需要通过迭代计算。如表 1 所示, 根据 I_c 值可将土分为 6 类, 对应 Robertson 和 Wride 在 Q_n - F_r 土体分类图上的 6 个分区。刘松玉等^[12]根据江苏 14 个试验场地的 CPT 数据修正了基于 Robertson 和 Wride 提出的 I_c (即式 (1)) 的土体分类标准, 使之与中国《岩土工程勘察规范》中土体分类相一致, 如表 2 所示。值得注意的是, 基于 I_c 的土体分类标准 (如表 1, 2) 的可靠性依赖于建立分类标准所采用的 CPT 数据。由于数据量有限以及数据的离散性, 所建立的土体分类标准不可避免的存在不确定性^[13], 从而导致基于 I_c 得到的 CPT 每个测点的土体分类结果的不确定性。

由于 CPT 无法获取土样, 只能根据 CPT 每个测点的土体分类结合工程判断推测土层界面的位置, 每个测点土体分类的不确定性直接影响土层划分^[14-15]。为合理地考虑土体分类不确定性对土层划分的影响, Zhang 等^[16]提出基于模糊集和概率方法对土体分类, 给出了沿深度不同土类的发生概率, 进而划分土层; Hegazy 等^[17]、蔡国军等^[18]提出采用聚类分析解译 CPT 数据, 分析得到的每一个相似组代表一种土类, 分类的结果可以过滤异常数据点, 分析结果可作为确定相似组数目和划分土层的依据; Wang 等^[14]、Cao 等^[15]提出贝叶斯系统识别方法, 确定最可能土层数目和土层厚度; Ching 等^[19]直接对 I_c 数据进行小波分析找到土层边界。以上方法可根据 CPT 数据确定土层边界,

但均无法表征划分土层的不确定性。然而, 相邻土层界面处的土体物理组成复杂, 上覆土层与下卧土层的 CPT 数据相互影响, 相邻土层的交叉影响区深度可达 1~2 m^[9, 20], 导致了土层界面位置的不确定性。此外, 土体材料是一种天然材料, 具有空间变异性, 因此同一个土层内的不同位置的 I_c 值必然具有离散性 (如图 1 所示), 构成土层界面位置不确定性的另一个重要来源, 减小这种不确定性需要进一步获取勘探数据。对于给定的 CPT 数据, 合理地考虑空间变异性对土层划分的影响, 量化土层界面位置的不确定性, 能够有效地反映所得土层剖面的可靠性, 为岩土工程分析和设计提供参考。如何在考虑土体材料空间变异性条件下根据 CPT 数据自动划分土层, 并定量表征土层界面位置的不确定性仍不为所知。

表 1 基于 Robertson 和 Wride 的土类指数 I_c 的土分类表^[11]

Table 1 Soil classification based on I_c given by Robertson and Wride^[11]

分区	土类	I_c 范围
2	有机质黏土	>3.60
3	粉质黏土-黏土	2.95~3.60
4	黏质粉土-粉质黏土	2.60~2.95
5	粉质砂土-砂质粉土	2.05~2.60
6	砂土-粉质砂土	1.31~2.05
7	砾砂-密砂	<1.31

表 2 基于土类指数 I_c 的中国土分类表^[12]

Table 2 Soil classification based on I_c in China^[12]

分区	中国国标土分类	I_c 范围
1	淤泥和淤泥质土	>3.45 或 $Q_m < 11.8 \exp(-F_r/1.15) - 0.36$ 2.9~3.45 且 Q_m >11.8exp(- F_r /1.15)-0.36
2	黏土	
3	粉质黏土	2.65~2.90
4	粉土	2.32~2.65
5	粉砂	2.10~2.32
6	细砂	1.87~2.10
7	中砂	<1.87

本文提出了一种基于 I_c 数据自动划分土层的贝叶斯方法, 在合理地考虑 I_c 的空间变异性条件下确定土层数目, 识别最可能的土层界面, 并定量表征土层界面位置的不确定性。本文将首先介绍所提方法及其计算流程, 然后通过上海地铁 10 号线伊犁站基坑开挖现场的一套真实 I_c 数据说明所提出方法的有效性, 并采用模拟 I_c 数据验证了所提方法的正确性。

1 基于贝叶斯理论的土层自动划分方法

根据一套 I_c 数据划分土层需要确定土层数目 N 和每个土层的厚度 H_n , $n=1,2,\cdots,N$ (或相邻土层的界面深度 $\underline{D}_N=\{D_n, n=1,2,\cdots,N-1\}$)。本文提出的基于贝叶斯理论的土层自动划分方法包括两个部分: 首先在给

定 N 的前提下根据 I_c 数据确定 $H_n, n=1,2,\cdots,N$ 的概率密度函数(probability density function, PDF), 识别最可能的土层厚度 $\underline{H}_N^*=\{H_n^*, n=1,2,\cdots,N\}$ 和界面深度 $\underline{D}_N^*=\{D_n^*, n=1,2,\cdots,N-1\}$, 并计算每个土层厚度和界面深度的标准差作为表征所得土层剖面不确定性的量化指标; 然后通过贝叶斯模型分类选择方法确定最可能的土层数目 N^* 。本节将分别介绍这两个部分。

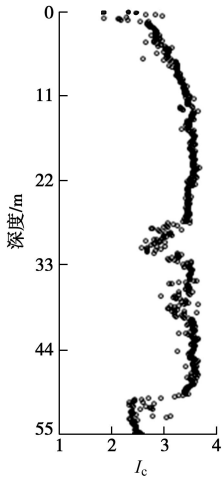


图 1 上海地铁 10 号线伊犁站基坑开挖现场一套 I_c 数据
Fig. 1 I_c data from deep excavation site at Yili station of Shanghai No. 10 subway line

1.1 给定土层数目条件下土层自动划分方法与不确定性表征

对于一套 CPT 数据, 根据式 (1) 计算每个测点的 I_c 值。假设触探深度 H 贯穿 N 个土层, 由于基于 I_c 的土体分类标准的不确定性、 I_c 数据的离散性以及相邻土层对界面附近 CPT 数据的交叉影响, 土层划分具有不确定性, 表现为土层界面深度的不确定性或土层厚度的不确定性。根据贝叶斯定理, 给定一套 I_c 数据和土层数目 N 的条件下, 土层厚度的不确定性由后验分布 $P(\underline{H}_N|\underline{\xi}, N)$ 定量表征, 可表达为

$$P(\underline{H}_N|\underline{\xi}, N) = K_N P(\underline{\xi}|\underline{H}_N, N) P(\underline{H}_N|N) \quad (2)$$

式中 $\underline{H}_N=[H_1, H_2, \cdots, H_N]$ 为土层厚度的随机向量; $\underline{\xi}=[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N]^T$ 表示一套 I_c 数据, 其中 $\xi_n=[\xi_{n,1}=\ln I_{c,1}, \xi_{n,2}=\ln I_{c,2}, \cdots, \xi_{n,kn}=\ln I_{c,kn}]^T$ 为第 n 层 k_n 个测点 I_c 的对数值; $P(\underline{H}_N|N)$ 为土层厚度的先验分布, 反映了获取 CPT 数据之前关于土层厚度的先验信息; $P(\underline{\xi}|\underline{H}_N, N)$ 为似然函数, 反映了 CPT 数据提供的关于土层厚度的信息; $K_N=1/P(\underline{\xi}|N)=1/[P(\underline{\xi}|\underline{H}_N, N)P(\underline{H}_N|N)d\underline{H}_N]$ 为归一化常数, 与土层厚度无关。如式 (2) 所示, 确定土层厚度的后验分布需要 $P(\underline{H}_N|N)$ 和 $P(\underline{\xi}|\underline{H}_N, N)$, 它们的推导过程分别在以下两个小节中介绍。

1.2 先验分布

土层厚度的先验分布 $P(\underline{H}_N|N)$ 反映了获取 CPT

数据之前关于 $\underline{H}_N=\{H_n, n=1, 2, \cdots, N\}$ 的先验信息, 可定量表征工程师关于勘探现场每个土层厚度的工程经验和事先判断。给定 N 的条件下, $H_n, n=1, 2, \cdots, N$ 有无数种可能组合, 任意组合之和等于触探深度 H , 即 $\{\sum_{n=1}^N H_n = H; 0 < H_n < H\}$ 。因此, \underline{H}_N 中有 $N-1$ 个自由变量。换言之, \underline{H}_N 分布在一个 $N-1$ 维超平面 Ω 内, 其中 $\Omega=\{\sum_{n=1}^N H_n = H; 0 < H_n < H\}$ 。若无其它关于 \underline{H}_N 先验信息, 假设 \underline{H}_N 在 Ω 内均匀分布, 即为分布参数均为 1 的 Dirichlet 分布, 则 $P(\underline{H}_N|N)$ 计算如下:

$$P(\underline{H}_N|N) = \Gamma(N) / H^{N-1} \quad (3)$$

式中, $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数, H^{N-1} 为归一化常数, 因此式 (3) 也是一个常数。

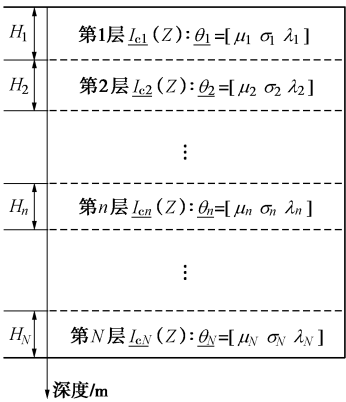


图 2 土层划分示意图及随机场模型
Fig. 2 Illustration of random field model of underground stratigraphy

1.3 似然函数

似然函数 $P(\underline{\xi}|\underline{H}_N, N)$ 定量反映了 CPT 数据提供的关于 N 个土层厚度的信息。假设不同土层的 CPT 数据相互独立, 则 $P(\underline{\xi}|\underline{H}_N, N)$ 可表达为^[21-22]

$$P(\underline{\xi}|\underline{H}_N, N) = \prod_{n=1}^N P(\xi_n|\underline{H}_N, N) \quad (4)$$

式中, $P(\xi_n|\underline{H}_N, N)$ 为第 n 个土层的似然函数。建立 $P(\xi_n|\underline{H}_N, N)$ 需要描述 I_c 数据不确定性的概率模型 $M_P(\underline{\theta}_n)$ (比如随机场), 其中 $\underline{\theta}_n$ 为模型参数向量。对于给定的 $M_P(\underline{\theta}_n)$, 根据全概率定理 $P(\xi_n|\underline{H}_N, N)$ 计算如下:

$$P(\xi_n|\underline{H}_N, N) = \int_{\underline{\theta}_n} P(\xi_n|\underline{\theta}_n, \underline{H}_N, N) P(\underline{\theta}_n|\underline{H}_N, N) d\underline{\theta}_n \quad (5)$$

式中 $P(\xi_n|\underline{\theta}_n, \underline{H}_N, N)$ 为给定一套模型参数 $\underline{\theta}_n$ 条件下根据 $M_P(\underline{\theta}_n)$ 建立的 ξ_n 的联合概率密度函数; $P(\underline{\theta}_n|\underline{H}_N, N)$ 为模型参数的先验分布, 反映了关于 $\underline{\theta}_n$ 的先验信息。为了定量表征每个土层内 I_c 的空间变异性, 本文采用对数正态随机场作为 I_c 的概率模型 M_P 推导 ξ_n 的联合概率密度函数。如图 2 所示, 令 I_{cn} 表示第 n 个土层 I_c 的对数正态随机场, 其平均值为 μ_n ,

标准差为 σ_n 。由于 $\xi = \ln I_c$, 同一个土层内不同测点的 ξ (即 $\ln I_c$) 为正态随机场, 它们的空间相关性由自相关系数定量表征。比如, 采用指数型相关函数时, 自相关系数计算如下:

$$\rho_n = \exp(-2|\Delta D|/\lambda_n) \quad (6)$$

式中 $|\Delta D|$ 为不同测点之间的距离; λ_n 为波动范围。 ξ_n 可视作 ξ 的正态随机场的一次实现, 则 $P(\xi_n | \underline{\theta}_n, \underline{H}_N, N)$ 表达为

$$P(\xi_n | \underline{\theta}_n, \underline{H}_N, N) = (2\pi)^{-k_n/2} |\det \underline{C}_n|^{-1/2} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\xi_n - \mu'_n] \underline{C}_n^{-1} [\xi_n - \mu'_n] \right\} \quad (7)$$

式中 $\underline{\theta}_n = [\mu_n, \sigma_n, \lambda_n]$; $\mu'_n = \ln \mu_n - \sigma_n'^2/2$ 和 $\sigma'_n = [\ln(1+(\sigma_n/\mu_n)^2)]^{0.5}$ 分别为第 n 层土中 ξ 的平均值和标准差, 它们均为 μ_n 和 σ_n 的函数; $\underline{C}_n = \sigma_n'^2 \underline{R}_n$ 为 ξ_n 的协方差矩阵; \underline{R}_n 为 ξ_n 的相关系数矩阵, 其元素根据式(6)计算。如式(7)所示, $P(\xi_n | \underline{\theta}_n, \underline{H}_N, N)$ 由一套模型参数 $\underline{\theta}_n$ 唯一确定, 将其代入式(5)计算似然函数 $P(\xi_n | \underline{H}_N, N)$ 需要 $\underline{\theta}_n$ 的先验信息。在缺乏 $\underline{\theta}_n$ 的先验信息情况下, 可在式(5)中采用 $\underline{\theta}_n$ 的联合均匀分布^[23-25]作为 $\underline{\theta}_n$ 的先验分布:

$$P(\underline{\theta}_n | \underline{H}_N, N) = \begin{cases} \frac{1}{(\mu_{n,\max} - \mu_{n,\min})(\sigma_{n,\max} - \sigma_{n,\min})(\lambda_{n,\max} - \lambda_{n,\min})} \\ (\mu_n \in [\mu_{n,\min}, \mu_{n,\max}], \sigma_n \in [\sigma_{n,\min}, \sigma_{n,\max}], \lambda_n \in [\lambda_{n,\min}, \lambda_{n,\max}]) \\ 0 \quad (\text{其它}) \end{cases} \quad (8)$$

式中 $\mu_{n,\max}$, $\sigma_{n,\max}$ 和 $\lambda_{n,\max}$ 分别为 μ_n , σ_n 和 λ_n 的最大值; $\mu_{n,\min}$, $\sigma_{n,\min}$ 和 $\lambda_{n,\min}$ 分别为 μ_n , σ_n 和 λ_n 的最小值。式(8)中模型参数最大值和最小值如表3所示。表3中 $\mu_{n,\min}$ 和 $\mu_{n,\max}$ 分别取Robertson和Wride提出的 Q_m - F_r 土体分类图上左上角角点(Q_m 的最大值和 F_r 的最小值)和右下角角点(Q_m 的最小值和 F_r 的最大值)对应的 I_c 值, 即 Q_m - F_r 土体分类图上 I_c 的最小值0.52和最大值4.12; 根据定义, 标准差为非负值, 因此 $\sigma_{n,\min}$ 取为0, $\sigma_{n,\max}$ 取 I_c 服从0.52到4.12之间均匀分布时对应的标准差, 即 $(4.12-0.52)/2\sqrt{3}$; $\lambda_{n,\min}$ 和 $\lambda_{n,\max}$ 根据文献[26]确定。将式(5)、(7)和(8)代入式(4)得到似然函数 $P(\xi_n | \underline{H}_N, N)$, 进而根据式(2)~(4)得到后验分布 $P(\underline{H}_N | \underline{\xi}, N)$, 定量地表征了 N 个土层厚度的不确定性。1.1~1.3节中在给定土层数目 N 的条件下推导了 $P(\underline{H}_N | \underline{\xi}, N)$ 。然而, 由于CPT不提供土样, 一套 $\underline{\xi}$ 对应的土层数目 N 是未知数, 下一节中将介绍如何根据一套CPT数据自动识别最可能的土层数目 N^* 。

表3 随机场参数的最大值和最小值

Table 3 Maximum and minimum values of random field parameters

$\mu_{n,\min}$	$\mu_{n,\max}$	$\sigma_{n,\min}$	$\sigma_{n,\max}$	$\lambda_{n,\min}$	$\lambda_{n,\max}$
0.52	4.12	0	1.04	0.1	1.2

1.4 土层数目比选

给定一套CPT数据条件下, 土层数目 N 理论上可能为1到测点数之间的任意整数。然而, 由于CPT测点间距小(0.02~0.05 m), 实际中不可能每个土层中只有一个测点, 因此存在一个小于测点数的最大土层数 N_{\max} , 工程师可以根据地质报告和工程经验进行预判。比如, $N_{\max}=10$ 代表CPT触探深度范围内最多10个土层。对于给定的一套CPT数据 $\underline{\xi}$, 1到 N_{\max} 之间每个可能 N 值的发生概率为 $P(N | \underline{\xi})$ 。根据贝叶斯定理, $P(N | \underline{\xi})$ 计算如下^[14, 21-22]:

$$P(N | \underline{\xi}) = P(\underline{\xi} | N)P(N)/P(\underline{\xi}) \quad (N=1, 2, \dots, N_{\max}) \quad (9)$$

式中 $P(\underline{\xi} | N)$ 为给定 N 条件下 $\underline{\xi}$ 的概率密度函数, 通常被称作“模型证据”, 反映了 $\underline{\xi}$ 提供的关于含有 N 层土的分层模型的信息; $P(N)$ 是 N 的先验概率, 在先验信息不充足的情况下, 可假设每个可能的 N 值具有相同的先验概率 $1/N_{\max}$, 即 N 在1到 N_{\max} 之间服从离散的均匀分布; $P(\underline{\xi}) = \sum_{N=1}^{N_{\max}} P(\underline{\xi} | N)P(N)$ 为归一化常数, 与 N 无关。当 $P(N)$ 为均匀分布时, 式(9)中 $P(N)$ 和 $P(\underline{\xi})$ 均为常数, $P(N | \underline{\xi})$ 与 $P(\underline{\xi} | N)$ 成正比, 因此最可能土层数目 N^* 对应的 $P(\underline{\xi} | N^*)$ 最大。通过对比不同的 N 对应的 $P(\underline{\xi} | N)$ 值即可确定 N^* 。

根据上述介绍, 计算式(2)中的后验分布 $P(\underline{H}_N | \underline{\xi}, N)$ 和式(9)中的模型证据 $P(\underline{\xi} | N)$ 是定量表征土层剖面不确定性的关键。值得注意的是, $P(\underline{\xi} | N)$ 为式(2)中归一化常数 K_N 的倒数。由于似然函数式(4)的复杂性以及 K_N 中涉及的高维积分, 计算 $P(\underline{H}_N | \underline{\xi}, N)$ 和 $P(\underline{\xi} | N)$ 非常困难。本文采用基于子集模拟(Subset Simulation)的贝叶斯更新方法求解 $P(\underline{H}_N | \underline{\xi}, N)$ 和 $P(\underline{\xi} | N)$, 如下节所述。

1.5 基于子集模拟的贝叶斯更新方法

求解后验分布是贝叶斯更新的关键所在, 在高维情况下十分困难。相反, 在可靠度分析领域近年来发展了多种卓有成效的高维复杂可靠度问题计算方法, 如子集模拟^[27-28]。Straub等^[29]提出了采用可靠度分析方法进行贝叶斯更新的新思路(Bayesian Updating with Structural Reliability Methods, BUS)。BUS根据似然函数人为构建一个失效区 F , 将贝叶斯更新问题转化为一个可靠度分析问题, 然后采用可靠度分析法求解失效概率 $P(F)$, 从而得到后验分布。基于BUS, 本文 F 定义为

$$F = \{cP(\underline{\xi} | \underline{H}_N, N) - U > 0\}, \quad (10)$$

式中, c 为保证 $0 < cP(\underline{\xi} | \underline{H}_N, N) < 1$ 的一个常数, U 为服从 0 到 1 之间均匀分布的随机变量。根据式 (10) 定义的失效区 F , 似然函数可改写为^[30-31]

$$P(\underline{\xi} | \underline{H}_N, N) = c^{-1} \int_0^1 I[(\underline{H}_N, U) \in F] dU, \quad (11)$$

式中 $I[(\underline{H}_N, U) \in F]$ 为指示函数。当 \underline{H}_N 和 U 属于 F 时 (即满足 $cP(\underline{\xi} | \underline{H}_N, N) - U > 0$), $I[(\underline{H}_N, U) \in F] = 1$, 否则 $I[(\underline{H}_N, U) \in F] = 0$ 。将式 (11) 代入式 (2) 可得 $P(\underline{H}_N | \underline{\xi}, N)$

$$= \frac{\int_0^1 I[(\underline{H}_N, U) \in F] P(\underline{H}_N | N) dU}{\int_{\underline{H}_N} \int_0^1 I[(\underline{H}_N, U) \in F] P(\underline{H}_N | N) dU d\underline{H}_N} \quad (\underline{H}_N \in \Omega), \quad (12)$$

式中, 分母为模型证据 $P(\underline{\xi} | N)$ 和常数 c 的乘积, 即 $cP(\underline{\xi} | N)$ 。此外, 式 (12) 的分母也为 \underline{H}_N 服从先验分布且 U 服从 0 到 1 之间均匀分布时对应的 $P(F)$, 即

$$\begin{aligned} P(F) &= \int_{\underline{H}_N} \int_0^1 I[(\underline{H}_N, U) \in F] P(\underline{H}_N | N) dU d\underline{H}_N \\ &= \int_{[\underline{H}_N, U] \in F} P(\underline{H}_N | N) P(U) dU d\underline{H}_N, \end{aligned} \quad (13)$$

式中, $P(U)=1$ 为 U 的 PDF。因此

$$P(F) = cP(\underline{\xi} | N). \quad (14)$$

给定的常数 c 条件下通过可靠度分析方法计算 $P(F)$, 即可得到 $P(\underline{\xi} | N)$, 进而得到后验分布。对于似然函数复杂的高维度贝叶斯更新问题, 可采用直接蒙特卡洛模拟 (direct Monte Carlo simulation, DMCS) 根据先验分布 $P(\underline{H}_N | N)$ 和 U 的均匀分布中分别抽取 \underline{H}_N 和 U 的随机样本, 计算 $P(F)$ 和 $P(\underline{\xi} | N)$ 。根据抽样拒绝准则^[29, 31], 属于失效区 F 的随机样本 \underline{H}_N 服从后验分布 $P(\underline{H}_N | \underline{\xi}, N)$ 。尽管 DMCS 算法简单、适用范围广泛, 但是其产生失效样本 (即本文的后验样本) 的效率较低。为了提高后验样本的产生效率, 本文采用子集模拟求解式 (13)。子集模拟是一种适用于高维度、小失效概率问题的高效可靠度分析方法, 已被广泛应用于结构工程^[27, 28]、岩土工程^[32-37]、航空航天工程^[38-39]等领域。值得注意的是, 采用基于子集模拟的 BUS 方法计算 $P(F)$ 和 $P(\underline{\xi} | N)$ 仍需要确定常数 c , 对于复杂的高维度贝叶斯更新问题确定 c 并非易事^[29, 31]。Au 等^[31]基于 BUS 和子集模拟提出了 CBUS 算法, 避免了确定常数 c , 提高了 BUS 的适用性。本文采用 CBUS 算法求解 $P(F)$ 和 $P(\underline{\xi} | N)$, 产生服从后验分布的 \underline{H}_N 的随机样本。由于篇幅限制, 本文对子集模拟和 CBUS 的详细算法不作介绍, 读者可参阅文献^[27, 28, 31~39]。

对每个可能的 N 值, 采用 CBUS 算法产生 \underline{H}_N 的

后验分布样本, 计算 $P(\underline{\xi} | N)$, 选择 $P(\underline{\xi} | N)$ 的最大值对应的 N 作为 N^* 。统计分析 N^* 对应的土层厚度的后验分布样本即可得到每个土层厚度的平均值、标准差和最可能值 $\underline{H}_N^* = \{H_n^*, n=1, 2, \dots, N^*\}$ 。根据 N^* 个土层厚度的后验分布样本计算 N^*-1 个界面深度的后验分布样本, 从而计算 N^*-1 个界面深度的平均值、标准差和最可能值 $\underline{D}_N^* = \{D_n^*, n=1, 2, \dots, N^*-1\}$ 。 \underline{H}_N^* 或 \underline{D}_N^* 代表了根据 I_c 数据划分的最可能土层剖面, 土层厚度和界面深度的标准差定量表征了土层剖面的不确定性。

上述所提方法的计算流程详见图 3。贝叶斯方法的推导过程具有一定的复杂性, 为了便于在工程实践中应用所提出的方法, 可将图 3 中的步骤通过商业软件 (如 MATLAB^[40]) 编制成应用程序。用户只需要输入勘探信息、先验信息以及最大土层数目 N_{\max} , 就可以确定 N^* 及其对应的最可能的土层剖面、土层厚度和界面深度的标准差等信息。此外, 将在下一步研究中基于所提出的方法探索自动识别土层和定量表征分层不确定性的简化方法。

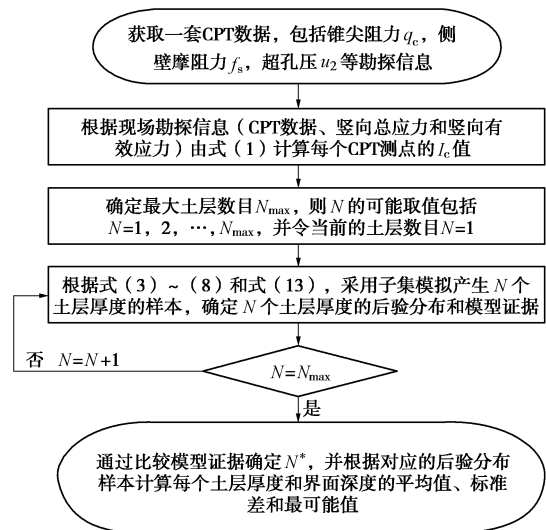


图 3 计算流程

Fig. 3 Flow chart of implementation procedure

2 算 例

本节通过上海市轨道交通 10 号线伊犁站基坑开挖现场一套 CPT 数据说明所提方法的有效性。上海市轨道交通 10 号线一期工程线路起点为虹桥高速铁路客站、终点为新江湾城站, 全长 32.69 km。伊犁站位于长宁区虹桥路北侧、伊犁路西侧, 现场勘察最大深度约为 55 m。图 4 (a)、(b) 所示为该现场的一套 CPT 数据, 根据式 (1) 可计算得到一套 I_c 数据 (见图 4

(c))。图 4 (d) 为根据附近钻探土样绘制的土层剖面图, 如图所示该现场土层主要为黏性土。需要注意的是, CPT 本身不提供土样, 无法直接绘制土层剖面图。本文方法主要应用在现场只有 CPT 数据没有土样的条件下, 根据 CPT 数据合理地划分土层。

采用所提贝叶斯方法根据图 4 (c) 中 I_c 的数据划分土层需要确定 N_{\max} 。本算例中取 $N_{\max}=10$ (即 N 的范围为 $1\sim 10$)。对于每个 N 值, 采用 CBUS 方法产生 \underline{H}_N 的后验分布样本, 计算 $P(\underline{\xi}|N)$ 。图 5 所示为不同 N 对应的模型证据对数值, 即 $\ln P(\underline{\xi}|N)$ 。当 $N=8$ 时, $\ln P(\underline{\xi}|N)$ 最大, $P(\underline{\xi}|N)$ 也最大, 因此本算例中最可能的土层数目 $N^*=8$ 。此外, 如图 5 所示, 当 N 从 1 增至 8 时, $\ln P(\underline{\xi}|N)$ 逐渐增大; 当 N 大于 8 时, $\ln P(\underline{\xi}|N)$ 开始减小, 说明无需进一步增大 N 值。模型证据的变化趋势可作为判断 N_{\max} 是否足够大的依据, 合适的 N_{\max} 值应保证 $\ln P(\underline{\xi}|N)$ (或 $P(\underline{\xi}|N)$) 跨过峰值, 出现逐渐减小的趋势, 类似现象在文献[14, 21]亦有阐述。

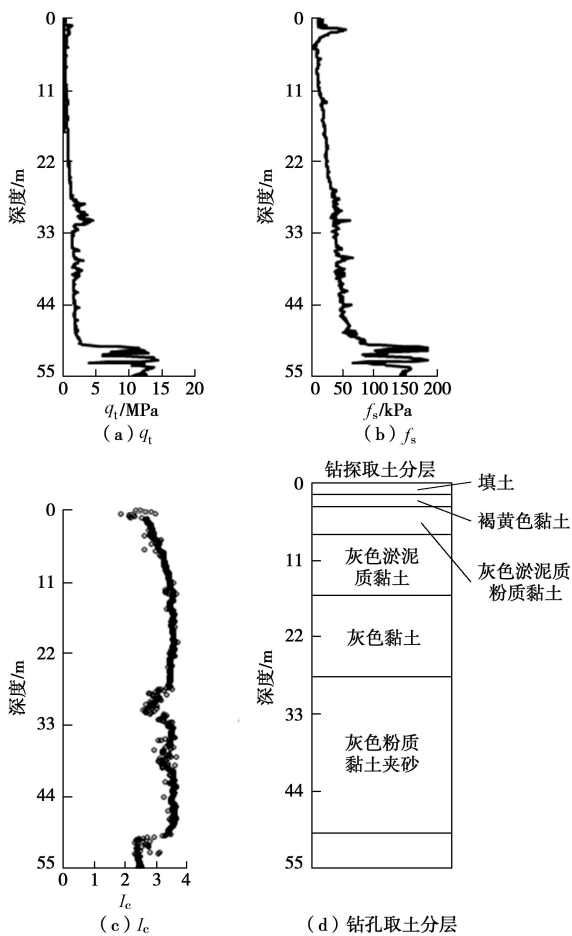


图 4 上海新虹桥中心花园的一套 CPT 数据

Fig. 4 CPT data obtained from New Hongqiao Central Park in Shanghai

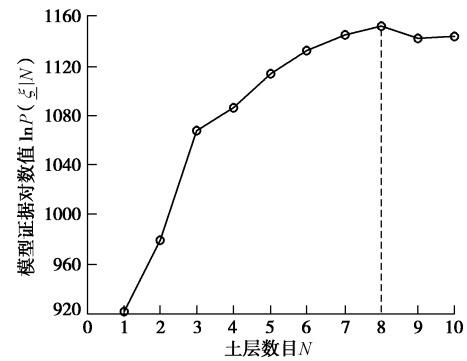


图 5 不同土层数目对应的模型证据对数值

Fig. 5 Logarithmic values of evidence for different model classes with different numbers of soil layers

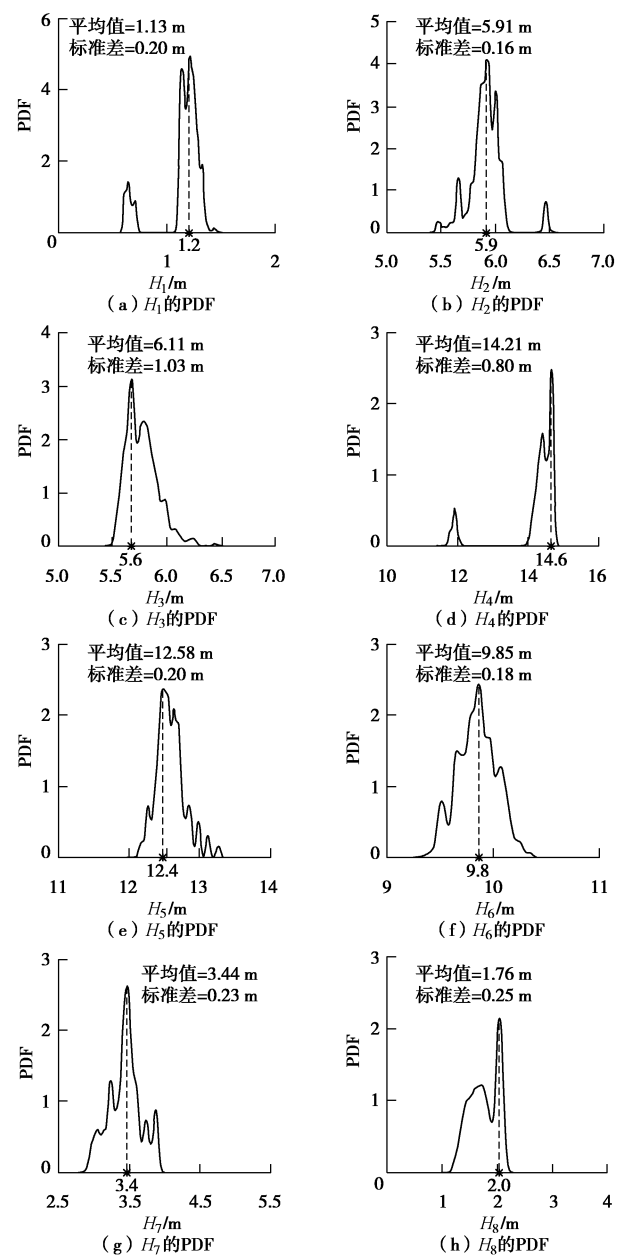


图 6 最可能土层数对应的土层厚度边缘概率密度分布

Fig. 6 Marginal PDFs of thicknesses corresponding to the most probable number of soil layers

根据 $N = 8$ 时 CBUS 产生的 \underline{H}_N 的后验分布样本可估计每个土层厚度的概率密度函数 (PDF)、平均值、标准差和最可能值, 如图 6 所示。与之对应, 图 7 所示为 $N = 8$ 时每个界面深度的 PDF、平均值、标准差和最可能值。本算例中土层厚度和界面深度的 PDF 均为多峰不对称函数, 因此平均值与最可能值不同。本文采用界面深度的最可能值划分土层, 确定土层剖面。图 8 (a) 所示为根据本文所提方法得到土层剖面, 包括 8 个土层, 图中红色水平实线代表土层界面, 竖向虚线代表不同土类的 I_c 边界 (见表 2)。如图 8 (a) 所示, 同一个土层内 I_c 值表现出相似的统计特性 (如趋势性和固有空间变异性), 相邻土层的 I_c 统计特性存在显著差异 (见表 4), 由此可见, 所提方法划分的土层合理地反映了土体力学参数 (I_c) 的统计相似性。虽然基于钻探土样不仅可以得到物质组成还可以通过实验获得土体力学参数, 但是如何同时考虑土体的物质组成和力学参数客观地划分土层仍不得而知。比如根据钻探土样划分的第六层 (见图 4 (d) 深度 27.5~50 m 之间灰色粉质黏土夹砂层) 根据所提方法被分为两个土层 (见图 8 (a) 的第五层和第六层), 这两个土层 I_c 的固有空间变异性显著不同。此外, 根据钻探土样绘制的土层剖面依赖于工程师的工程判断, 不同工程师划分的土层剖面可能不同, 土层界面深度的不确定性 (或可靠性) 未知。本文所提方法基于 I_c 数据自动划分土层, 采用界面深度标准差作为土层界面位置不确定性的量化指标。如图 8 (b) 所示, 本算例界面深度标准差介于 0.16~0.78 m, 第三和第四个土层的界面深度 (12.8 m 处) 标准差最大, 说明该界面深度不确定性较大, 可靠性较低, 需要进一步获取勘察资料确认; 其它土层界面深度的标准差均在 0.2 m 左右, 土层界面位置的可靠性较高。

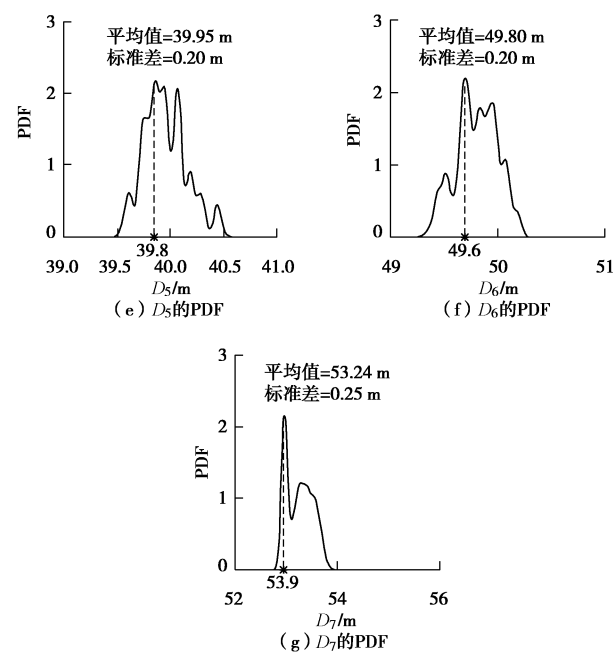
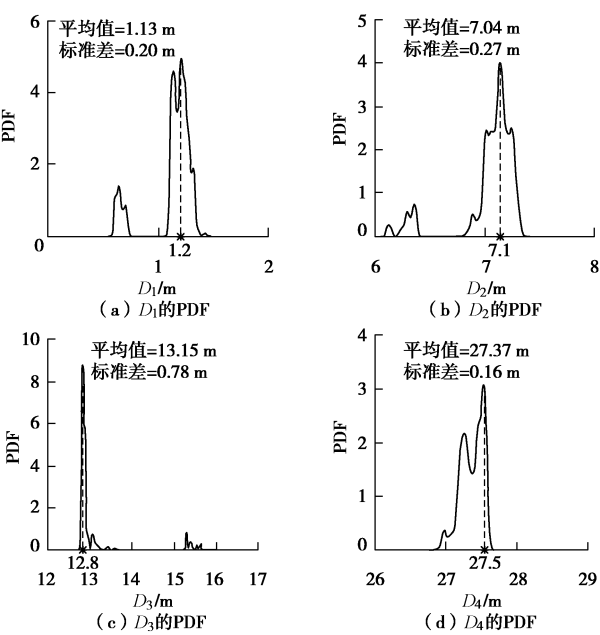


图 7 最可能土层数对应的土层界面深度的边缘概率密度分布

Fig. 7 Marginal PDFs of depths of boundaries corresponding to the most probable number of soil layers

表 4 每个土层 I_c 的统计特性

Table 4 Statistical characteristics of I_c in each soil layer		
土层	趋势性	固有空间变异性
1	不明显	较大
2	明显	较大
3	明显	较小
4	不明显	较小
5	不明显	较大
6	不明显	较小
7	不明显	较大
8	不明显	较小

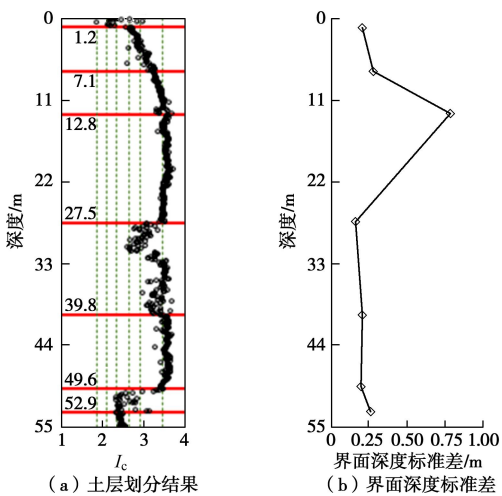


图 8 土层划分结果及界面深度标准差

Fig. 8 Underground stratigraphy identified from proposed approach and its associated uncertainty

3 方法验证

岩土工程勘察中只能根据有限勘探数据（如 CPT 数据或钻探土样）推断土层界面位置，划分土层，无法得知实际土层界面位置。文献[19]中对比了模糊集、聚类分析、贝叶斯系统识别和小波分析等方法识别土层的结果，并指出上述方法中贝叶斯方法是最为严谨的方法。相对于文献中现有的方法（如模糊集、聚类分析、贝叶斯系统识别和小波分析等），本文方法最大创新和不同之处在于可以根据 I_c 数据定量表征土体分层的不确定性，对于这一点文献中无法提供对比结果。本节通过已知土层界面位置的多土层虚拟场地产生模拟 I_c 数据验证本文所提方法的合理性和准确性。如表 5 所示，该虚拟场地由 5 个土层构成，土层厚度分别为 2, 3, 10, 20, 15 m，对应的 4 个土层界面深度分别为 2, 5, 15, 35 m。每个土层采用对数正态随机场模拟 I_c 的空间变异性，随机场参数见表 5。根据式(7)，每个土层内模拟一组 I_c 数据，数据点间距取 0.05 m。图 10（a）所示为模拟的一套 I_c 数据，图中红色水平实线代表真实的土层界面。采用所提贝叶斯方法根据图 10（a）中 I_c 的数据划分土层，将土层划分结果与实际土层剖面对比验证所提方法。

本节中仍取 $N_{\max}=10$ （即 N 的范围为 1~10）。对于每个 N 值，采用 CBUS 方法产生 \underline{H}_N 的后验分布样本，计算 $P(\underline{\xi}|N)$ 。如图 9 所示不同 N 对应的模型证据对数值，即 $\ln P(\underline{\xi}|N)$ 。当 $N=5$ 时， $\ln P(\underline{\xi}|N)$ 最大，因此所提方法识别出的最可能土层数目为 $N=5$ ，与虚拟场地的真实土层数目一致，验证了所提方法识别出的最可能土层数目的正确性。与第 3 节算例结果类似，当 N 从 1 增至 5 时， $\ln P(\underline{\xi}|N)$ 逐渐增大；当 N 大于 5 时， $\ln P(\underline{\xi}|N)$ 已经开始下降，说明 $N_{\max}=10$ 在本算例中足够大，无需考虑更大的 N 值。

表 5 模拟土层厚度以及每层 I_c 的统计特征

Table 5 Summary of soil layer information and statistics used to simulate I_c profile

土层	土层厚度/m	界面深度/m	每层 I_c 的统计特征		
			平均值 μ_n	标准差 σ_n	波动范围 λ_n
1	2	2	3.2	0.4	0.25
2	3	5	2.7	0.2	0.55
3	10	15	1.8	0.3	0.75
4	20	35	3.0	0.4	0.4
5	15	35	2.6	0.2	0.6

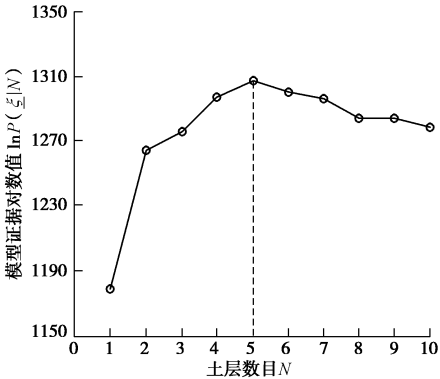


图 9 不同土层数目对应的模型证据对数值

Fig. 9 Logarithmic values of evidence for different model classes with different numbers of soil layers

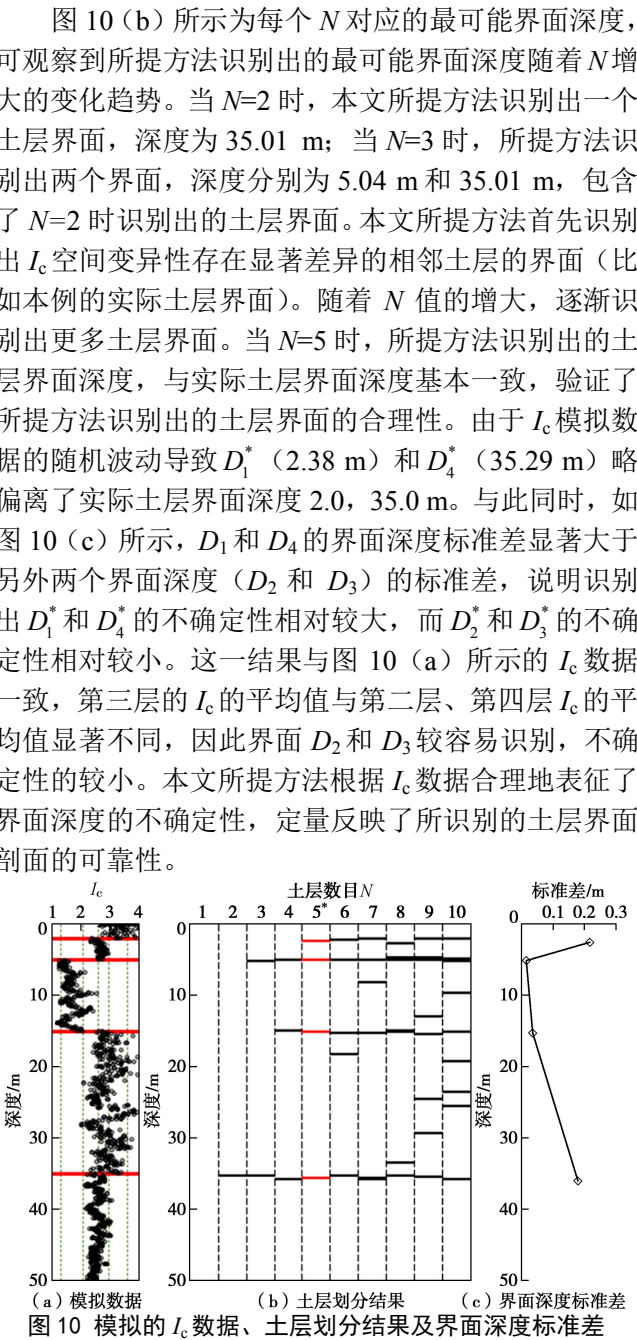


图 10 模拟的 I_c 数据、土层划分结果及界面深度标准差

Fig. 10 Results of Bayesian model class selection and soil layer identification from simulated I_c data

4 结 论

本文提出了一种基于静力触探试验数据自动划分土层的贝叶斯方法,所提方法包括两个部分:给定土层数目 N 条件下划分土层的贝叶斯方法和选择最可能土层数目 N^* 的贝叶斯方法。为了解决贝叶斯方程的求解难题,本文采用基于子集模拟的贝叶斯更新算法(CBUS)计算土层厚度的后验分布和每个 N 对应的模型证据。根据土层厚度后验样本确定最可能土层界面深度,划分土层剖面,并计算界面深度的标准差作为量化土层剖面不确定性的定量指标。通过上海市轨道交通 10 号线伊犁站基坑开挖现场一套 I_c 数据说明了所提方法的有效性,并采用模拟 I_c 数据验证了所提方法的正确性。得到以下 4 点结论。

(1) 本文所提方法不仅能够在考虑 CPT 数据空间变异性的条件下合理地识别最可能的土层界面深度,划分土层剖面,而且定量地表征了土层剖面的不确定性,为制定下一步勘探方案和岩土工程设计提供参考依据。

(2) 所提方法划分的土层客观反映了不同土层 I_c 的统计特性(如趋势性和固有空间变异性),识别出的每个土层内 I_c 值具有统计相似性,相邻土层 I_c 的统计特性差异显著。相邻土层 I_c 的统计特性差异越大,界面深度的标准差越小;反之,统计特性差异越小,标准差越大。所提方法合理地反映了识别出的土层界面的可靠性。

(3) 所提方法首先识别出 I_c 统计特性存在显著差异的相邻土层的界面。随着 N 值增大,逐渐划分更多土层界面。最可能的土层数目 N^* 对应的模型证据最大,计算中可根据模型证据的变化趋势判断所选择 N_{\max} 是否合适。

(4) 本文所提方法也适用于根据其它沿深度变化的数据(如含水率)等划分土层。目前,该方法局限于根据 CPT 数据划分土层,未考虑岩土工程勘探中可能获取的多种数据。由于不同数据代表了土体不同的力学特性,根据不同数据划分的土层界面可能不同。如何合理地考虑多种勘探数据划分土层是本研究中将来需要探讨的问题。

参考文献:

- [1] GB 50021—2001 岩土工程勘察规范[S]. 2009. (GB 50021—2001 Code for investigation of geotechnical engineering[S]. 2009. (in Chinese))
- [2] 李广信. 我国的岩土工程规范标准纵横谈[J]. 工程勘察, 2004(1): 11 - 15. (LI Guang-xin. Discussion on the code and standard of geotechnical engineering in China[J]. Geotechnical Investigation & Surveying, 2004(1): 11 - 15.

(in Chinese))

- [3] DOUGLAS B J, OLSEN R S. Soil classification using electric cone penetrometer[C]// Proceedings of Conference on Cone Penetration Testing and Experience, St. Louis, 1981: 209 - 227.
- [4] ROBERTSON P K, CAMPANELLA R G. Interpretation of cone penetration tests Part I: sand[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1983, 20(4): 718 - 733.
- [5] ROBERTSON P K, CAMPANELLA R G. Interpretation of cone penetration tests Part II: clay[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1983, 20(4): 734 - 745.
- [6] ROBERTSON P K. Soil classification using the cone penetration test[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1990, 27(1): 151 - 158.
- [7] JEFFERIES M G, DAVIES M P. Use of CPTu to estimate equivalent SPT N_{60} [J]. Geotechnical Testing Journal, 1993, 16(4): 458 - 468.
- [8] 张诚厚, 施 健, 戴济群. 孔压静力触探试验的应用[J]. 岩土工程学报, 1997, 19(1): 52 - 59. (ZHANG Cheng-hou, SHI Jian, DAI Ji-qun. The application of piezocone tests in China[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1997, 19(1): 52 - 59. (in Chinese))
- [9] ROBERTSON P K. Interpretation of cone penetration tests - a unified approach[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2009, 46(11): 121 - 123.
- [10] 刘松玉, 蔡国军, 童立元. 现代多功能 CPTU 技术理论与工程应用[M]. 北京: 科学出版社, 2013. (LIU Song-yu, CAI Guo-jun, TONG Li-yuan. Technology theory and engineering application of modern multifunctional CPTU[M]. Beijing: Science Press, 2013. (in Chinese))
- [11] ROBERTSON P K, WRIDE C E. Evaluating cyclic liquefaction potential using the cone penetration test[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1998, 35(2): 351 - 359.
- [12] 刘松玉, 蔡国军, 邹海峰. 基于 CPTU 的中国实用土分类方法研究[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(10): 1765 - 1776. (LIU Song-yu, CAI Guo-jun, ZOU Hai-feng. Practical soil classification methods in China based on piezocone penetration tests[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(10): 1765 - 1776. (in Chinese))
- [13] KU C S, JUANG C H, OU C Y. Reliability of CPT I_c as an index for mechanical behavior classification of soils[J]. Géotechnique, 2010, 60(11): 861 - 875.
- [14] WANG Y, HUANG K, CAO Z J. Probabilistic identification of underground soil stratification using cone penetration tests[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2013, 50(7): 766 - 776.
- [15] CAO Z J, HUANG K, WANG Y. Bayesian inverse analysis for geotechnical site characterization using cone penetration

- test[J]. *International Journal of Reliability and Safety*, 2014, **8**(2/3/4): 97 – 116.
- [16] ZHANG Z J, TUMAY M T. Statistical to fuzzy approach toward CPT soil classification[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 1999, **125**(3): 179 – 186.
- [17] HEGAZY Y A, MAYNE P W. Objective site characterization using clustering of piezocone data[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2002, **128**(12): 986 – 996.
- [18] 蔡国军, 刘松玉, 童立元, 等. 基于聚类分析理论的CPTU土分类方法研究[J]. *岩土工程学报*, 2009, **31**(3): 416 – 424. (CAI Guo-jun, LIU Song-yu, TONG Li-yuan, et al. Soil classification using CPTU data based upon cluster analysis theory[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2009, **31**(3): 416 – 424. (in Chinese))
- [19] CHING J Y, WANG J S, JUANG C H, et al. Cone penetration test (CPT)-based stratigraphic profiling using the wavelet transform modulus maxima method[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2015, **52**(12): 1993 – 2007.
- [20] LI J, CASSIDY M J, HUANG J, et al. Probabilistic identification of soil stratification[J]. *Géotechnique*, 2015, **66**(1): 16 – 26.
- [21] CAO Z J, WANG Y. Bayesian approach for probabilistic site characterization using cone penetration tests[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2013, **139**(2): 267 – 276.
- [22] WANG Y, HUANG K, CAO Z J. Bayesian identification of soil strata in London clay[J]. *Géotechnique*, 2014, **64**(3): 239 – 246.
- [23] CAO Z J, WANG Y. Bayesian model comparison and selection of spatial correlation functions for soil parameters[J]. *Structural Safety*, 2014, **49**: 10 – 17.
- [24] CAO Z J, WANG Y, LI D Q. Quantification of prior knowledge in geotechnical site characterization[J]. *Engineering Geology*, 2016, **203**: 107 – 116.
- [25] TIAN M, LI D Q, CAO Z J, et al. Bayesian identification of random field model using indirect test data[J]. *Engineering Geology*, 2016, **210**: 197 – 211.
- [26] UZIELLI M, VANNUCCHI G. Investigation of correlation structures and weak stationarity using the CPT soil behavior classification index[C]// *International Conference on Structural Safety and Reliability-Icossar*, 2005.
- [27] AU S K, BECK J L. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2001, **16**(4): 263 – 277.
- [28] AU S K, BECK J L. Subset simulation and its application to seismic risk based on dynamic analysis[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2003, **129**(8): 901 – 917.
- [29] STRAUB D, PAPAIOANNOU I. Bayesian updating with structural reliability methods[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2015, **141**(3): 04014134.
- [30] STRAUB D. Reliability updating with equality information[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2011, **26**(2): 254 – 258.
- [31] GARBUNO-INIGO A, DIAZDELAO F A, AU S K, et al. Bayesian updating and model class selection with Subset Simulation[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, 317.
- [32] 曹子君. 子集模拟在边坡可靠性分析中的应用[D]. 成都: 西南交通大学, 2009. (CAO Zi-jun. Application of subset simulation on reliability analysis of slope stability[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2009. (in Chinese))
- [33] AU S K, CAO Z J, WANG Y. Implementing advanced Monte Carlo simulation under spreadsheet environment[J]. *Structural Safety*, 2010, **32**(5): 281 – 292.
- [34] WANG Y, CAO Z J, AU S K. Practical reliability analysis of slope stability by advanced Monte Carlo simulations in a spreadsheet[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2011, **48**(1): 162 – 172.
- [35] 李典庆, 肖特, 曹子君, 等. 基于极限平衡法和有限元法的边坡协同式可靠度分析[J]. *岩土工程学报*, 2016, **38**(6): 1004 – 1013. (LI Dian-qing, XIAO Te, CAO Zi-Jun, et al. Auxiliary slope reliability analysis using limit equilibrium method and finite element method[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2016, **38**(6): 1004 – 1013. (in Chinese))
- [36] 李典庆, 肖特, 曹子君, 等. 基于高效随机有限元法的边坡风险评估[J]. *岩土力学*, 2016, **37**(7): 1994 – 2003. (LI Dian-qing, XIAO Te, CAO Zi-Jun, et al. Slope risk assessment using efficient random finite element method[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2016, **37**(7): 1994 – 2003. (in Chinese))
- [37] LI D Q, XIAO T, CAO Z J, et al. Enhancement of random finite element method in reliability analysis and risk assessment of soil slopes using subset simulation[J]. *Landslides*, 2016, **13**(2): 293 – 303.
- [38] LI H S, AU S K. Design optimization using subset simulation algorithm[J]. *Structural Safety*, 2010, **32**(6): 384 – 392.
- [39] LI H S. Subset simulation for unconstrained global optimization[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, **35**(10): 5108 – 5120.
- [40] Mathworks, Inc. MATLAB – the language of technical computing, <http://cn.mathworks.com>, 2016.